

Correction Devoir surveillé n°1 type ECRICOME-EML

Exercice 1. d'après EML 2004

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels, I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) ; AM = M\} \\ E_2(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) ; A^2M = AM\} \end{aligned}$$

Partie I

1. On vérifie les critères :

- $E_1(A) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par définition de $E_1(A)$. De même pour $E_2(A)$.
- Comme $A \cdot 0 = 0$ alors $0 \in E_1(A)$. Et comme $A^2 \cdot 0 = 0 = A \cdot 0$ alors $0 \in E_2(A)$.
Donc les deux ensembles sont non vides.
- Si M et N sont deux matrices de $E_1(A)$ et α un réel alors
 $\alpha M + N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $A(\alpha M + N) = \alpha AM + AN = \alpha M + N$ car M et N sont dans $E_1(A)$.
Donc $\alpha M + N \in E_1(A)$.
Si M et N sont deux matrices de $E_2(A)$ et α un réel alors
 $\alpha M + N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et
 $A^2(\alpha M + N) = \alpha A^2M + A^2N = \alpha AM + AN$ car M et N sont dans $E_2(A)$.
Donc $\alpha M + N \in E_2(A)$.

Donc $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont bien des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. (a) Montrons que si $M \in E_1(A)$ alors $M \in E_2(A)$.

Si $M \in E_1(A)$ alors $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $AM = M$ donc $A^2M = A(AM) = AM$ et donc $M \in E_2(A)$.

Donc $E_1(A) \subset E_2(A)$.

(b) Pour montrer l'égalité des deux ensembles, on doit montrer l'inclusion réciproque.

Si $M \in E_2(A)$ alors comme A est inversible, $A^2M = AM \Rightarrow A^{-1}A^2M = A^{-1}AM$. d'où $AM = M$.

Donc $M \in E_1(A)$.

Donc $E_2(A) \subset E_1(A)$ et finalement $E_1(A) = E_2(A)$.

3. (a) Comme on a déjà $0 \in E_1(A)$, il reste à montrer que

si $M \in E_1(A)$ alors $M = 0$.

Or $M \in E_1(A) \Rightarrow AM = M$ d'où $AM - M = 0$ et $(A - I)M = 0$.

Et comme $A - I$ est inversible alors $M = 0$.

Donc $E_1(A) = \{0\}$ si $A - I$ est inversible.

(b) Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Comme B est diagonale é coefficients diagonaux non nuls, B est inversible donc

$E_1(B) = E_2(B)$. Comme $B - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est également inversible alors $E_1(B) = \{0\} = E_2(B)$.

Partie II

1. On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Programme Python complété, en utilisant les commandes "np.ones" et "np.zeros" afin d'obtenir la matrice P

```
import numpy as np

P=np.ones((3,3))#attention aux deux parenthèses, P est composée que de 1
P[1,2]=np.zeros(1)#on remplace en 2eme ligne 3eme colonne (avec le decalage) par un 0
P[2,1]=np.zeros(1)#on remplace en 3eme ligne 2eme colonne par un 0
print(P)
```

2. Montrons que P est inversible :

Soit on montre que les vecteurs colonnes de P forment une famille libre (ce qui est assez simple à voir) et donc P est inversible ou bien on effectue une réduite de Gauss car on nous demande le calcul de P^{-1} :

Donc par réduite de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_3 \\ L_2 \rightarrow L_1 \\ L_3 \rightarrow L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 - L_2 \rightarrow L_2 \\ L_3 - L_1 \rightarrow L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 + L_3 \rightarrow L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ On obtient une matrice triangulaire supérieure avec aucun zéro sur la diagonale donc P est inversible. On poursuit le calcul pour trouver } P^{-1}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 - L_2 \rightarrow L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

3. $C = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}CP = D$.

On calcule D par calcul direct.

$$P^{-1}C = \begin{pmatrix} -0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

4. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{aligned} M \in E_1(C) &\Leftrightarrow CM = M \Leftrightarrow CPN = PN \Leftrightarrow P^{-1}CP = N \\ &\Leftrightarrow DN = N \Leftrightarrow N \in E_1(D). \end{aligned}$$

5. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients sont : $\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix}$ alors

$$N \in E_1(D) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x \\ 0 = y \\ 0 = z \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a = a \\ b = b \\ c = c \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 2u = u \\ 2v = v \\ 2w = w \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b, c tels que

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Donc une matrice M est dans $E_1(C)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b, c tels que

$$\begin{aligned} M &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc une famille génératrice de $E_1(C)$ et libre (car échelonnée) est $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

qui est donc une base de $E_1(C)$ qui a finalement une dimension de 3.

7. Comme D donc C n'est pas inversible on ne peut pas utiliser les résultats de la question I2.a).

Par contre on peut refaire le même raisonnement que précédemment :

$$M \in E_2(C) \iff C^2 M = CM \iff PD^2 P^{-1} N = P D P^{-1} M \iff D^2 N = DN \iff N \in E_2(D).$$

Comme D est diagonale, on a son carré sur les coefficients diagonaux et avec les mêmes coefficients que précédemment pour N :

$$\begin{aligned} N \in E_2(D) &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 0=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a=a \\ b=b \\ c=c \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 4u=2u \\ 4v=2v \\ 4w=2w \end{cases} \\ &\iff N = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc les matrices de $E_2(C)$ sont celles qui s'écrivent :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a & y+b & z+c \\ x+a & y+b & z+c \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

D'où une famille génératrice et libre (vu la place des zéros dans les matrices) de $E_2(C)$ est :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

C'est donc une base de $E_2(C)$.

La dimension de $E_2(C)$ est donc 6.

Donc comme $E_1(C)$ et $E_2(C)$, n'ont pas la même dimension, ils ne peuvent pas être égaux.

Exercice 2. d'après Écriricome 2023

1. (a) f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$ (car $x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable $]0; \infty[$, avec $\sqrt{x} \neq 0$).
De plus, pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{2}e^{x/2}\sqrt{x} - e^{x/2} \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \\ &= \frac{e^{x/2}x - e^{x/2}}{2x\sqrt{x}} \quad (\text{on multiplie en haut et en bas par } 2\sqrt{x}) \\ &= \frac{(x-1)e^{x/2}}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Ce qui donne bien : $f'(x) = \frac{x-1}{2\sqrt{x}} f(x)$.

- (b) Commençons par chercher les limites. En 0^+ , on a $e^{x/2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et $\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0^+$, donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$.

En $+\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}} = +\infty$ par croissances comparées. D'où $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Maintenant, en ce qui concerne les variations, on a, pour tout $x > 0$, $e^{x/2} > 0$ et $\sqrt{x} > 0$, donc $f(x) > 0$. Ainsi, d'après la question précédente, $f'(x)$ est du signe de $x - 1$ pour tout $x > 0$.

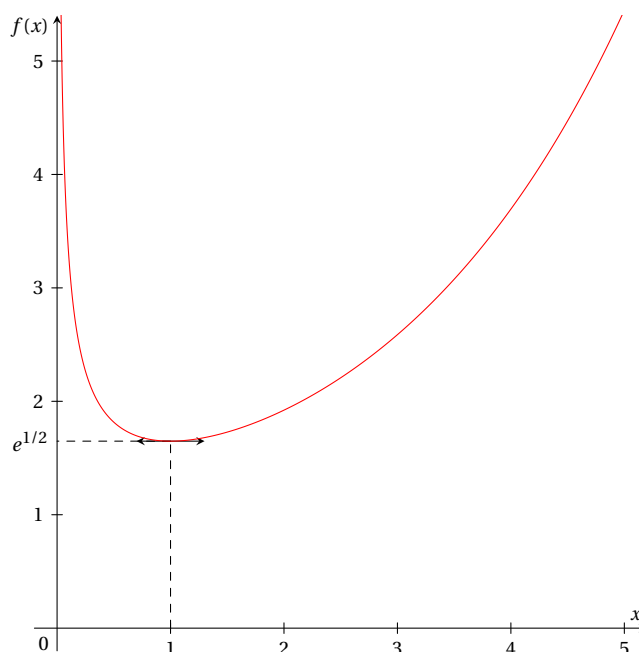
D'où $f'(x) > 0$ si $x > 1$ et $f'(x) < 0$ si $0 < x < 1$.

Donc f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, et strictement décroissante sur $]0, 1]$.

On en déduit le tableau de variations de f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$e^{1/2}$	$+\infty$

- (c) D'après ce qui précède, l'allure de la courbe représentative de f est la suivante :



- (d) Soit $n \geq 2$. La fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]0; 1]$. Donc d'après le théorème de la bijection, f établit une bijection de $]0; 1]$ sur $f(]0; 1]) = [e^{1/2}; +\infty[$ (d'après les limites calculées à la question 1.(b)). De plus, $n \in f(]0; 1])$ ($e < 4$, donc $e^{1/2} < 2$ et donc $e^{1/2} < n$). Par conséquent, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution u_n sur $]0; 1]$. De plus, u_n ne peut pas être égal à 1 car $f(1) = e^{1/2}$, qui est strictement inférieur à n . Donc $0 < u_n < 1$. De même, f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$, donc d'après le théorème de la bijection, f établit une bijection de $]1; +\infty[$ sur $f(]1; +\infty[) =]e^{1/2}; +\infty[$ (qui contient n pour les mêmes raisons que ci-dessus). Donc, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution v_n sur $]1; +\infty[$.

Conclusion : l'équation $f(x) = n$ admet exactement 2 solutions u_n et v_n sur $]0; +\infty[$, qui vérifient $0 < u_n < 1 < v_n$.

2. (a) Pour tout $n \geq 2$, on a $n \leq n+1$, soit $f(v_n) \leq f(v_{n+1})$. Par stricte croissance de f sur $]1; +\infty[$, on en déduit que $v_n \leq v_{n+1}$. Par conséquent, la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est croissante.
- (b) La suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est croissante. Donc, par le théorème de la limite monotone, soit elle est majorée et dans ce cas elle converge vers une limite finie ℓ , soit elle ne l'est pas et dans ce cas elle diverge vers $+\infty$ lorsque

n tend vers $+\infty$.

Par l'absurde, supposons qu'on soit dans le premier cas. Comme $v_n \geq 1$ pour tout $n \geq 2$, on a $\ell \geq 1$ (en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$). Or, f est continue sur $[1; +\infty[$, donc $f(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$. Mais ceci est absurde car $f(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ (étant donné que $f(v_n) = n$ pour tout $n \geq 2$). On ne peut donc pas être dans le premier cas.

Conclusion : la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ diverge vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. (a) De même qu'à la question 2.(a), pour tout $n \geq 2$, on a $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$. Par stricte décroissance de f sur $]0; 1]$, on en déduit que $u_n \geq u_{n+1}$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

- (b) La suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante et minorée (par 0). Par le théorème de la limite monotone, on en déduit que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ converge vers $\ell \geq 0$.

- (c) Le principe est le même qu'à la question 2.(b). Supposons que u_n converge vers une limite finie ℓ strictement positive. Par continuité de f sur $]0; 1]$, on a alors $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$. Or, ceci est absurde car $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ (étant donné que $f(u_n) = n$ pour tout $n \geq 2$). Ainsi, la limite ℓ de $(u_n)_{n \geq 2}$ ne peut être strictement positive.

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

- (d) Pour tout $n \geq 2$, on a, par définition de u_n : $f(u_n) = n$, soit $\frac{e^{u_n/2}}{\sqrt{u_n}} = n$. Par conséquent (en élevant au carré) : $\frac{e^{u_n}}{u_n} = n^2$, ce qui donne $e^{u_n} = n^2 u_n$. Or, d'après la question précédente, $e^{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. On en déduit que $n^2 u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, et donc $u_n \sim \frac{1}{n^2}$.

4. (a) Il suffit d'appliquer l'algorithme décrit dans l'énoncé. Les deux cas $b=c$ et $a=c$ sont dans cet ordre par décroissance de f sur $]0; 1]$.

```
import numpy as np

def approx_u(n,eps):
    a = 0
    b = 1
    while (b-a > eps):
        c = (a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n:
            b = c
        else:
            a=c
    return (a+b)/2
```

Remarque : on teste : `approx_u(10, 1e-6)` donne 0.01010179519653320, ce qui est bien en accord avec le résultat de la question précédente.

- (b) Les erreurs d'arrondis s'accumulent. Donc pour avoir une erreur au plus eps sur la somme, il faut calculer chaque terme avec une précision de eps/N . D'où le programme :

```
def sp(N,eps):
    somme=0
    for n in range(2,N+1):
        somme=somme+approx_u(n,eps/N)
    return somme
```

Exercice 3.

1. Étude préliminaire

- (a) Comme on sait que la série converge, on travaille directement la somme pour tout réel x de $[0, 1]$, on reconnaît une série géométrique de raison x et une série géométrique dérivée première de raison x :

$$s_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{0} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$s_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{1} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

- (b) Le rappel suggère de coder la fonction en commençant par écrire un coefficient binomial comme quo-

$$\text{tient de produits. Observons que, pour } n \in \mathbb{N}, \text{ et } k \in [0, n], \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\prod_{j=n-k+1}^n j}{\prod_{j=1}^k j}.$$

Il en découle le programme suivant :

```
def c_bin(n,k):
    a=np.prod([j for j in range(n-k+1, n+1)])
    b=np.prod([j for j in range(1, k+1)])
    return a/b
```

- (c) Pour tout couple d'entiers naturels (n, k) tels que $k < n$, on a $k+1 \leq n$ donc les coefficients s'écrivent sous forme factorielle :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-k+k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

- (d) On démontre pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0, 1[$:

$$xs_k(x) + xs_{k+1}(x) = x \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n + x \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} x^n.$$

On calcule les sommes partielles :

$$\begin{aligned} x \sum_{n=k}^M \binom{n}{k} x^n + x \sum_{n=k+1}^M \binom{n}{k+1} x^n &= \sum_{n=k+1}^M \binom{n}{k} x^{n+1} + \sum_{n=k+1}^M \binom{n}{k+1} x^{n+1} \\ &\quad + \binom{k}{k} x^{k+1} \text{ en isolant les } \binom{n}{k} \\ &= \sum_{n=k+1}^M \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right) x^{n+1} + x^{k+1} \\ &= \sum_{n=k+1}^M \binom{n+1}{k+1} x^{n+1} + x^{k+1} \\ &= \sum_{m=k+2}^{M+1} \binom{m}{k+1} x^m + \binom{k+1}{k+1} x^{k+1} \\ &= \sum_{m=k+1}^{M+1} \binom{m}{k+1} x^m \\ \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} x^n &= s_{k+1}(x) \end{aligned}$$

et donc $s_{k+1}(x) = xs_k(x) + xs_{k+1}(x)$

- (e) Soit $x \in [0, 1[$. On fait apparaître la relation de récurrence qui permettra de déterminer s_{k+1} à partir de s_k :

$$s_{k+1}(x) = xs_k(x) + xs_{k+1}(x) \text{ donc } s_{k+1}(x)(1-x) = xs_k(x) \text{ et } s_{k+1}(x) = s_k(x) \frac{x}{1-x}.$$

Puis on montre par récurrence que pour tout entier naturel k , $\forall x \in [0, 1[$, $s_{k+1}(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.

— Initialisation : pour $k=0$ on a $s_0(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{x^0}{(1-x)^{0+1}}$.

— Hérité : soit $k \geq 0$ tel que $s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ alors d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} s_{k+1}(x) &= s_k(x) \frac{x}{1-x} = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \cdot \frac{x}{1-x} \\ &= \frac{x^{k+1}}{(1-x)^{k+1+1}} \end{aligned}$$

— Conclusion : pour tout entier k , $\forall x \in [0, 1[$: $s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.

2. Étude d'une expérience aléatoire

- (a) Si on continue le tirage des boules après la noire, le rang de la première reste le même. Donc la loi de N correspond au temps d'attente du premier succès (**première** boule noire obtenue) dans une suite de tirages identiques et **indépendants** de Bernoulli de paramètre $1/5$. Donc $N \hookrightarrow \mathcal{G}(1/5)$ et $E(N) = \frac{1}{1/5} = 5$.
- (b) Quand $N = n$, on effectue n tirages indépendants dans l'urne. Donc la variable X compte le nombre de boules noires obtenues dans une succession de n épreuves identiques et indépendantes de Bernoulli de paramètre $1/5$. D'où X suit une loi binômiale de paramètres n et $1/5$. Donc pour $k \in [[0, n]]$: $p(X = k/N = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$ et 0 si $k > n$.
- (c) Comme la probabilité **dépend de** la valeur de n , on utilise la formule des probabilités totales en conditionnant avec comme système complet d'événements $(N = n)_{n \in [[1, +\infty[[$. La série est convergente et

$$P(X = 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{P_{N=n}(X=0)}_{\text{avec } 0 \leq n} P(N = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \frac{1}{5}$$

on regroupe les puissances pour n'avoir qu'une puissance n et on factorise les constantes :

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \frac{1}{5} \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{2n} = \frac{1}{4} \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{2n} - \left(\frac{4}{5}\right)^0 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 - \frac{16}{25}} - 1 \right) = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

car $|16/25| < 1$

- (d) $(N = n)_{n \in [[1, +\infty[[$ est là encore un système complet d'événements. Mais dans la formule des probabilités totales, seules les termes pour lesquels $n \geq k$ seront non nuls

$$P(X = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_{N=n}(X = k) P(N = n)$$

On calcule la somme partielles (le découpage de la somme peut se faire si $k \geq 1$) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^M P_{N=n}(X = k) P(N = n) &= \sum_{n=1}^{k-1} 0 + \sum_{n=k}^M \binom{n}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \frac{1}{5} \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^{-k-1} \left(\frac{1}{5}\right)^{k+1} \sum_{n=k}^M \binom{n}{k} \left(\frac{4}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \sum_{n=k}^M \binom{n}{k} \left(\frac{16}{25}\right)^n \text{ on va retrouver } s_k \\ &\xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \frac{\left(\frac{16}{25}\right)^k}{\left(1 - \left(\frac{16}{25}\right)\right)^{k+1}} = \frac{1}{4^k} \frac{16^k}{9^k} \frac{25}{9} \frac{1}{4} \\ P(X = k) &= \left(\frac{4}{9}\right)^k \frac{25}{36} \end{aligned}$$

- (e) On étudie l'absolue convergence de la série $\sum_{k \geq 0} k \cdot P(X = k)$ et comme $|k \cdot P(X = k)| = k \cdot P(X = k)$

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} k \cdot P(X = k) &= \sum_{k \geq 1} k \cdot P(X = k) + 0 \\ &= \sum_{k \geq 1} k \left(\frac{4}{9}\right)^k \frac{25}{36} = \frac{25}{36} \frac{4}{9} \left(\sum_{k \geq 1} k \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} \right) \end{aligned}$$

on a reconnu une série géométrique dérivée première

CV car $|4/9| < 1$

D'où, $E(X)$ existe et vaut : $E(X) = \frac{25}{36} \frac{\frac{4}{9}}{(1-\frac{4}{9})^2} = 1$

- (f) On a pour $k \geq 1$ (pour pouvoir mettre à part le terme pour $k = 0$), en utilisant les résultats sur les sommes géométriques

$$\begin{aligned} P(X \leq k) &= \sum_{i=0}^k p(X=i) = \frac{4}{9} + \sum_{i=1}^k \left(\frac{4}{9}\right)^i \frac{25}{36} = \frac{4}{9} + \frac{25}{36} \left(\sum_{i=0}^k \left(\frac{4}{9}\right)^i - 1 \right) \\ &= \frac{4}{9} + \frac{25}{36} \left(\frac{\left(\frac{4}{9}\right)^{k+1} - 1}{\frac{4}{9} - 1} - 1 \right) = \frac{4}{9} + \frac{25}{36} \frac{\left(\frac{4}{9}\right)^{k+1} - 1 + \frac{5}{9}}{-\frac{5}{9}} \\ &= \frac{4}{9} - \frac{5}{4} \left(\left(\frac{4}{9}\right)^{k+1} - \frac{4}{9} \right) = 1 - \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^k \end{aligned}$$

et également pour $k = 0$ où $p(X \leq 0) = p(X = 0) = 4/9$.