

Analyse dimensionnelle.

Table des matières

1

Dimension d'une grandeur physique

1

1.1

Dimension et unité

1

1.2

Équation aux dimensions

1

2

Homogénéité d'une expression

2

2.1

Principe

2

2.2

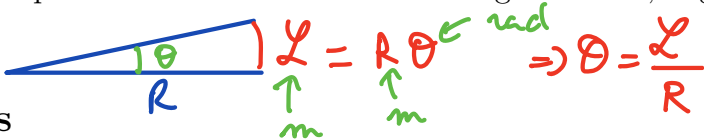
Exemples détaillés

3

1 Dimension d'une grandeur physique

1.1 Dimension et unité

Il faut distinguer **dimension** et **unité**. Par exemple, une distance a pour dimension une longueur, mais peut s'exprimer en mètres, miles, angströms, etc.
Une grandeur purement numérique (rapport de deux longueurs, par exemple) est *sans dimension*. Ainsi, l'angle plan θ , défini comme le rapport entre une longueur d'arc de cercle et le rayon du cercle, est sans dimension (bien qu'on lui associe des unités d'usage : radian, degré, grade).



1.2 Équation aux dimensions

Toute grandeur physique peut être exprimée au moyen de sept dimensions de base (choix SI) et leurs symboles dimensionnels :

Dimensions de base du Système International	
grandeur de base	symbole dimensionnel
masse	M
longueur	L
temps	T
intensité électrique	I
température thermodynamique	Θ
intensité lumineuse	J
quantité de matière	N

Remarque

⚠ *Attention* : à chaque dimension est associée une *unité* SI (kg, m, s, A, K, cd, mol), mais le symbole dimensionnel n'est pas le symbole d'unité.

Équation aux dimensions

On appelle **équation aux dimensions** l'écriture de la dimension d'une grandeur G en fonction des sept dimensions précédentes. On note $[G]$ sa dimension. Exemples :

$$[\text{distance}] = L, \quad [v] = L T^{-1}, \quad [\text{grandeur sans dimension}] = 1.$$

💡 Méthode 💡

Pour établir $[G]$, on peut utiliser sa définition ou une relation la reliant à d'autres grandeurs dont les dimensions sont connues.

Exemple : la deuxième loi de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ donne immédiatement

$$[F] = [m] [a] \Rightarrow [F] = M L T^{-2}.$$

 **Exercice 1.** Déterminer l'équation aux dimensions des grandeurs suivantes :

1. énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow [E_c] = [m] [v]^2 = M (L \cdot T^{-1})^2 = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$

2. champ de pesanteur g $P = mg \Rightarrow [g] = [P/m] = L \cdot T^{-2}$

3. masse volumique $\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow [\rho] = M \cdot L^{-3}$

4. charge électrique q $i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow [i] = \frac{[q]}{T} \Rightarrow [q] = I \cdot T$

5. pulsation $\omega = 2\pi f \Rightarrow [\omega] = [f] = T^{-1}$

6. constante gravitationnelle G $F = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \Rightarrow [G] = [F] \times [r^2] \times M^{-2} = M \cdot L \cdot T^{-2} \times L^2 \times M^{-2} = L^3 \cdot T^{-2} \cdot M^{-1}$

2 Homogénéité d'une expression

2.1 Principe

Propriété

Une expression est **homogène** (donc admissible du point de vue dimensionnel) si :

- les termes d'une somme ou d'une différence ont la *même* dimension ;
- les deux membres d'une égalité ont la *même* dimension ;
- l'argument d'une fonction transcendante (sin, cos, tan, exp, ln, ...) est *sans dimension*.

L'analyse d'homogénéité est un outil puissant pour détecter une erreur : **une expression non homogène est nécessairement fautive**. En fin de calcul littéral, il est *vivement* recommandé de contrôler l'homogénéité (sans avoir substitué des valeurs numériques en cours de route).

 **Exercice 2.** Analyser l'homogénéité des expressions suivantes :

1. $\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ (association parallèle) ✓

2. $u(t) = E \exp(-t)$ ✗

3. $x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + 1$ ✗ $[v_0t] = L \cdot T^{-1} \cdot T = L$

$[x] = L$; $[\frac{1}{2}gt^2] = [g] \cdot T^2 = L \cdot T^{-2} \cdot T^2 = L$

2.2 Exemples détaillés

✗ Dans une copie d'étudiant, on rencontre parfois l'affirmation « la constante de temps τ d'un circuit (R, L) vaut $\tau = \frac{R}{L}$ ». Vérifions l'homogénéité de τ .

✓ On dispose de la loi d'Ohm $u = Ri$ et de la relation bobine $u = L \frac{di}{dt}$. Ce qui donne :

$$[u] = [R] I \quad \text{et} \quad [u] = [L] I T^{-1}.$$

→ On en déduit :

$$\Rightarrow [R] \cdot I = [L] \cdot I \cdot T^{-1} \Rightarrow \frac{[L]}{[R]} = T.$$

Ainsi, $\frac{L}{R}$ a la dimension d'un temps, alors que $\frac{R}{L}$ ne l'a pas : l'expression $\tau = \frac{R}{L}$ est donc nécessairement fausse.

Remarque importante : une formule homogène n'est pas pour autant garantie correcte ; l'homogénéité est une condition nécessaire, pas suffisante.

 **Exercice 3.** Vérifier l'homogénéité des expressions suivantes :

1. $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ (période des petites oscillations d'un pendule) ✓

2. $\tau = RC$ (constante de temps d'un circuit (R, C)) ✓

3. $\lambda = \frac{v}{f}$ (longueur d'onde, fréquence f , vitesse v) ✓

4. Équation différentielle : $\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = \frac{E}{\tau}$ ✗

② $[u] = [R] \cdot I$ et $i = C \frac{du}{dt} \Rightarrow I = [C] \frac{[u]}{T}$
 $\Rightarrow [R] I = \frac{I \cdot T}{[C]} \Rightarrow [RC] = T$ $\Rightarrow [u] = \frac{I \cdot T}{[C]}$