

CONCOURS BLANC 2026

ECG1 Mathématiques Approfondies

Durée : 4 Heures

Le sujet comporte 4 pages. Il est composé de deux problèmes.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de **tout matériel électronique est interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On veillera à rédiger les deux problèmes sur des **copies séparées** .

Problème 1

Dans tout ce problème, p désigne un réel de $]0;1[$ et on pose $q = 1 - p$. Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}; P)$.

On considère en particulier une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = (1 - p)^k p$$

Partie A

1) Montrer que la variable aléatoire $Y = X + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

2) En déduire que X admet une espérance et une variance et préciser $E(X)$ et $V(X)$.

3) Compléter la fonction Python ci-contre afin que, prenant en entrée le réel p , elle renvoie une simulation de la variable aléatoire X .

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def simule_X(p):
    Y = .....
    while ..... :
        Y = Y + 1
    Return Y - 1
```

Partie B

Un casino a conçu une nouvelle machine à sous dont le comportement est le suivant :

- le joueur introduit un nombre k de jetons de son choix ($k \in \mathbb{N}$) puis il appuie sur un bouton pour activer la machine
- si $k = 0$, la machine ne reverse aucun jeton
- si $k \geq 1$, la machine définit k variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_k$, indépendantes et de même loi que X , et reverse au joueur $X_1 + X_2 + \dots + X_k$ jetons.
- les fonctionnements de la machine à chaque activation sont indépendants les uns des autres et ne dépendent que du nombre de jetons introduits.

Le casino s'interroge sur la valeur à donner à p pour que la machine soit attractive pour le joueur, tout en étant rentable. Le casino imagine alors le cas d'un joueur invétéré qui, avant chaque activation, place l'intégralité de ses jetons dans la machine, et continue de jouer encore et encore.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Z_n la variable aléatoire égale au nombre de jetons dont dispose le joueur après n activations de la machine.

On suppose que le joueur commence avec un seul jeton ; ainsi $Z_0 = 1$.

On remarque en particulier que Z_1 suit la même loi que X .

4) Compléter la fonction Python ci-contre afin que, prenant en entrée un entier $n \in \mathbb{N}$ et le réel p , elle simule l'expérience aléatoire et renvoie la valeur de Z_n .

Cette fonction pourra utiliser la fonction `simule_X`.

```
def simule_Z(n, p):
    Z = 1
    for i in range(n):
        s = 0
        for j in range(Z):
            s = .....
        Z = .....
    return Z
```

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = P(Z_n = 0)$

On note également R l'événement : « le joueur finit par ne plus avoir de jeton. »

5a) Préciser les valeurs de u_0 et u_1 .

b) Comparer les événements $(Z_n = 0)$ et $(Z_{n+1} = 0)$. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et convergente.

Dans la suite de l'exercice, on note $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

6) Justifier que $P(R) = L$

7a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $P_{(Z_1=k)}(Z_2 = 0) = (u_1)^k$

On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $P_{(Z_1=k)}(Z_{n+1} = 0) = (u_n)^k$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1 = k)(u_n)^k = \frac{p}{1 - qu_n}$

8a) Montrer que L vérifie : $(L-1)(qL-p)=0$

b) On suppose $p \geq \frac{1}{2}$. Montrer que : $P(R)=1$

c) On suppose $p < \frac{1}{2}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0; \frac{p}{q}\right]$ puis en déduire que $P(R) < 1$

d) Expliquer pourquoi le casino préférera choisir p dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

PARTIE C On suppose désormais $p \geq \frac{1}{2}$.

On note T la variable aléatoire égale au nombre d'activations de la machine effectuées par le joueur lorsque, pour la première fois, celui-ci n'a plus de jeton.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = 1 - u_n$

9) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(T \leq n) = u_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(T = n) = v_{n-1} - v_n$

10) Montrer que : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N nP(T = n) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} v_n\right) - Nv_N$

11) On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{n+1}$

b) En déduire que T n'admet pas d'espérance.

12) On suppose dans cette question que $p > \frac{1}{2}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{1-u_n}{\frac{p}{q}-u_n}$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{q}{p} w_n$

b) En déduire une expression de u_n , puis que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^n$

c) Montrer que T admet une espérance et que $E(T) \leq \frac{1}{1-\frac{q}{p}}$

13) Le casino cherche la valeur à donner à p pour que le joueur joue le plus longtemps possible dans le casino et ainsi, dépense plus d'argent dans ses consommations au bar. Quelle est cette valeur ?

Problème 2

On note $C^0(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction $f \in C^0(\mathbb{R})$, on définit la fonction $L(f)$ par $\forall x \in \mathbb{R}, L(f)(x) = \int_0^1 t.f(x-t)dt$

Partie A : Exemples et résultats préliminaires

1) Calculer la fonction $L(f)$ dans les deux cas particuliers suivants :

a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$

2a) A l'aide d'un changement de variable, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, L(f)(x) = x \cdot \int_{x-1}^x f(u)du - \int_{x-1}^x u.f(u)du$

b) En déduire que la fonction $L(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}, L(f)'(x) = \int_{x-1}^x f(u)du - f(x-1)$.

3a) Justifier que l'application $L : f \mapsto L(f)$ est un endomorphisme de $C^0(\mathbb{R})$.

b) D'après la question 2)b), cet endomorphisme est-il surjectif ?

Partie B : Une étude de fonction

On définit la fonction a par : $\forall x \in \mathbb{R}, a(x) = \frac{1}{1+|x|}$. On note $b = L(a)$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}, b(x) = \int_0^1 \frac{t}{1+|x-t|} dt$

- 1) Justifier que a est bornée et en déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq b(x) \leq \frac{1}{2}$.
- 2) Montrer que : $\forall x \geq 1, b(x) = -1 + (x+1) \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ (On pourra éventuellement faire le changement de variable $u = 1 + x - t$ après l'avoir justifié)
- 3a) Calculer $b'(x)$ pour tout $x \geq 1$.
- b) Justifier que $\forall t \geq 0, \ln(1+t) \leq t$ et en déduire le sens de variation de la fonction b sur $[1; +\infty[$.
- 4a) Rappeler l'équivalent de $\ln(1+t)$ lorsque t tend vers 0. En déduire la limite de la fonction b en $+\infty$.
- b) A l'aide d'un développement limité, trouver un équivalent simple de $b(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
- 5) En utilisant la question A)2)b), montrer que : $\forall x \in [0;1], b'(x) = \ln(2-x) + \ln(1+x) + \frac{1}{x-2}$.
- 6a) Montrer que la fonction b' change de signe exactement une fois sur $[0;1]$ en un point que l'on notera x_0 .
- b) Préciser les variations de la fonction b sur l'intervalle $[0;1]$.
- c) Ecrire un programme Python qui calcule et affiche une valeur approchée de x_0 à 0,01 près.

Partie C : Etude de deux restrictions de L

- 1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction e_k par : $\forall x \in \mathbb{R}, e_k(x) = e^{kx}$
 - a) Expliquer, sans faire de calcul d'intégrale, pourquoi $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}, L(e_k) = \lambda_k e_k$ puis calculer λ_k en procédant à une intégration par parties.
 - b) Calculer la fonction $L(e_k)'$ en utilisant la question A)2)b) et retrouver la valeur de λ_k .
- 2a) Justifier que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.
- b) On note $F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$. Quelle est la dimension de F ?
- c) On s'intéresse à la restriction à F de l'application L . On la notera $\tilde{L}$.
Justifier que $F = \text{Ker}(\tilde{L} - \lambda_1 \text{id}_F) + \text{Ker}(\tilde{L} - \lambda_2 \text{id}_F) + \text{Ker}(\tilde{L} - \lambda_3 \text{id}_F)$
On précise que si A, B et C sont 3 sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel, on note $A + B + C = (A + B) + C$
- 3) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_k par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = x^k$.
 - a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $L(f_n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{n+2-k} f_k$
 - b) Combien vaut $L(f_n)(0)$?
 - c) Calculer $L(f_n)'$ en utilisant le résultat du A)2)b) et en déduire une nouvelle expression de $L(f_n)$.
 - d) Déduire des 3 questions précédentes que $\sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{n+2} \binom{n}{j} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.
- 4) On s'intéresse à la restriction à $\mathbb{R}_2[X]$ de l'application L . On la notera $\hat{L}$.
On note $B = (f_0, f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
 - a) Vérifier que la matrice de l'application $\hat{L}$ dans la base B est $M = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.
 - b) Expliquer pourquoi M est inversible.
 - c) Calculer $(2M - I)^2$ puis $(2M - I)^3$ (où I est la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$)
 - d) Expliciter M^{-1} en fonction de I, M et M^2 .