

Ex 1

1. a. On a $I \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OI} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, et $C \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OC} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$
 b. On en déduit que $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OC} = 4 \times 0 + 3 \times 4 = 12$.
2. a. D'après le texte, le point H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (OI), donc $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OI}$. Les vecteurs \overrightarrow{OH} et \overrightarrow{OI} sont colinéaires et de même sens donc $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OI} = OH \times OI$.
 De plus, $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OI}$.
 On peut donc conclure que $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OC} = OH \times OI$.
- b. $\overrightarrow{OI} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $OI = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$
- c. On a : $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OC} = OH \times OI$
 $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OC} = 12$
 $OI = 5$

On en déduit que $OH \times 5 = 12$ donc que $OH = \frac{12}{5} = 2,4$.

3. a. Le point H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (OI), donc les vecteurs \overrightarrow{OI} et \overrightarrow{CH} sont orthogonaux, donc le vecteur \overrightarrow{OI} est un vecteur normal à la droite (CH).
 Or \overrightarrow{OI} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc la droite (CH) a une équation cartésienne de la forme $4x + 3y + c = 0$, où c est un réel à déterminer.
 La droite (CH) contient le point C de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, et le point C appartient à la droite (CH); donc : $4 \times 0 + 3 \times 4 + c = 0$ donc $c = -12$.
 La droite (CH) a pour équation $4x + 3y - 12 = 0$.
- b. Le cercle \mathcal{E} de centre D (2,2) et de rayon 0,5 a pour équation :
 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 0,5^2$ soit $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 - 0,25 = 0$
 c'est-à-dire $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7,75 = 0$

c. Soit M le point de coordonnées (1,5; 2).

$$\begin{aligned} \bullet \quad x_M^2 + y_M^2 - 4x_M - 4y_M + 7,75 &= 1,5^2 + 2^2 - 4 \times 1,5 - 4 \times 2 + 7,75 \\ &= 2,25 + 4 - 6 - 8 + 7,75 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $M \in \mathcal{E}$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad 4x_M + 3y_M - 12 &= 4 \times 1,5 + 3 \times 2 - 12 \\ &= 6 + 6 - 12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $M \in (CH)$.

On peut donc dire que le point M(1,5; 2) appartient à l'intersection du cercle \mathcal{E} et de la droite (CH)

Ex 2

1. On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = x^2 - 5x + 4$.
On note \mathcal{P} la courbe représentative de la fonction g .

a. $x^2 - 5x + 4$ est un polynôme du second degré.

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 4 = 25 - 16 = 9 = 3^2$$

Le polynôme admet donc deux racines :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-3}{2} = 1 \text{ et } x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+3}{2} = 4$$

On en déduit que $g(x) = (x-1)(x-4)$. On détermine alors le signe de g .

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x-1$		-	0	+		+	
$x-4$		-		-	0	+	
signe de g		+	0	-	0	+	

b. On considère un entier naturel n quelconque.

On note A_n le point de la courbe \mathcal{P} d'abscisse n .

On note a_n le coefficient directeur de la droite $(A_n A_{n+1})$ donc $a_n = \frac{y_{A_{n+1}} - y_{A_n}}{x_{A_{n+1}} - x_{A_n}}$.

Par définition, $x_{A_n} = n$, et comme le point A_n est un point de la courbe \mathcal{P} , on a : $y_{A_n} = g(x_{A_n}) = g(n) = n^2 - 5n + 4$.

$$\begin{aligned} \text{De même : } y_{A_{n+1}} &= g(x_{A_{n+1}}) = g(n+1) = (n+1)^2 - 5(n+1) + 4 \\ &= n^2 + 2n + 1 - 5n - 5 + 4 = n^2 - 3n \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } y_{A_{n+1}} - y_{A_n} = (n^2 - 3n) - (n^2 - 5n + 4) = n^2 - 3n - n^2 + 5n - 4 = 2n - 4.$$

$$\text{Or } x_{A_{n+1}} - x_{A_n} = n + 1 - n = 1; \text{ donc } a_n = \frac{y_{A_{n+1}} - y_{A_n}}{x_{A_{n+1}} - x_{A_n}} = \frac{2n - 4}{1} = 2n - 4.$$

c. $a_{n+1} - a_n = (2(n+1) - 4) - (2n - 4) = 2n + 2 - 4 - 2n + 4 = 2$

Donc la suite (a_n) est arithmétique de raison 2.

2. Soit f la fonction définie pour tout réel x de $[0,5; 8]$ par $f(x) = x - 5 + \frac{4}{x}$.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f .

a. $f(x) = x - 5 + \frac{4}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{5x}{x} + \frac{4}{x} = \frac{x^2 - 5x + 4}{x} = \frac{g(x)}{x}$

b. La position de la courbe \mathcal{C} par rapport à l'axe des abscisses dépend du signe de $f(x)$: si $f(x) > 0$, alors la courbe \mathcal{C} est au-dessus de l'axe des abscisses, et si $f(x) < 0$, alors la courbe \mathcal{C} est en dessous de l'axe des abscisses.

$f(x) = \frac{g(x)}{x}$, et sur $[0,5; 8]$, $x > 0$; donc $f(x)$ est du même signe que $g(x)$ sur $[0,5; 8]$.

Corrigé des exos type bac première générale spé maths

D'après le résultat de la question 1.a. :

- sur l'intervalle $[0,5; 1[$, $g(x) > 0$ donc $f(x) > 0$, donc la courbe \mathcal{C} est au-dessus de l'axe des abscisses;
- sur l'intervalle $]1; 4[$, $g(x) < 0$ donc $f(x) < 0$, donc la courbe \mathcal{C} est en dessous de l'axe des abscisses;
- sur l'intervalle $]4; 8]$, $g(x) > 0$ donc $f(x) > 0$, donc la courbe \mathcal{C} est au-dessus de l'axe des abscisses.

c. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0,5; 8]$.

$$\text{Sur l'intervalle } [0,5; 8], f'(x) = 1 - 0 + 4 \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}.$$

d. On détermine le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0,5; 8]$.

x	0,5	2	8
$x - 2$	-	0	+
$x + 2$	+		+
$(x - 2)(x + 2)$	-	0	+
x^2	+		+
$f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$	-	0	+

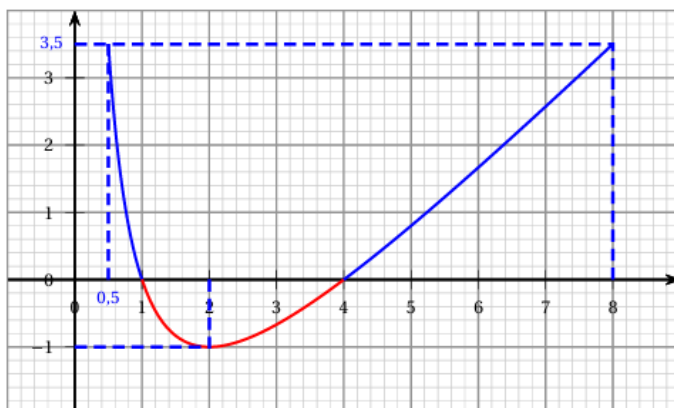
On peut calculer les valeurs intéressantes de $f(x)$ pour compléter le tableau de variations.

$$f(0,5) = 0,5 - 5 + \frac{4}{0,5} = 0,5 - 5 + 8 = 3,5; \quad f(2) = 2 - 5 + \frac{4}{2} = 2 - 5 + 2 = -1, \text{ et}$$

$$f(8) = 8 - 5 + \frac{4}{8} = 8 - 5 + 0,5 = 3,5$$

x	0,5	2	8
$f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$	-	0	+
variations de f	3,5	-1	3,5

e. On réalise un schéma de l'allure de la courbe \mathcal{C} sur lequel on fait apparaître les résultats des questions 2.b et 2.d.



Corrigé des exos type bac première générale spé maths

Ex 3

1. u_1 représente le nombre d'habitants pour l'année 2020 + 1 soit le nombre d'habitants en 2021.

$$u_1 = 1,08u_0 - 300 = 1,08 \times 10\,000 - 300 = 10\,800 - 300 = 10\,500$$

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3\,750$.

a. $v_0 = u_0 - 3\,750 = 10\,000 - 3\,750 = 6\,250$

b. Pour tout entier naturel n , on a $v_n = u_n - 3\,750$ donc $u_n = v_n + 3\,750$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3\,750 = 1,08u_n - 300 - 3\,750 = 1,08(v_n + 3\,750) - 300 - 3\,750 \\ &= 1,08v_n + 4\,050 - 4\,050 = 1,08v_n \end{aligned}$$

c. Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,08$ et de premier terme $v_0 = 6\,250$.

d. On en déduit que, pour tout entier naturel n , on a $v_n = v_0 \times q^n = 6\,250 \times 1,08^n$.

e. Pour tout n on a $v_n = 6\,250 \times 1,08^n$ et $u_n = v_n + 3\,750$ donc on peut en déduire que $u_n = 6\,250 \times 1,08^n + 3\,750$.

3.

Le tableau ci-contre, extrait d'une feuille automatisée de calcul, a été obtenu par recopie vers le bas après avoir saisi la formule suivante dans la cellule B2 :

$$= 6250 * 1,08^{A2} + 3750$$

La municipalité envisage d'ouvrir une nouvelle école maternelle dès que la population atteindra 19 000 habitants.

	A	B
1	n	Un
2	0	10000
3	1	10500
...
13	11	18322,74373
14	12	19488,56323
15	13	20747,64829
...

La population dépasse 19 000 habitants pour $n = 12$ soit en 2032.

La construction d'un tel établissement nécessite deux ans ; il faut donc commencer les travaux en 2030.

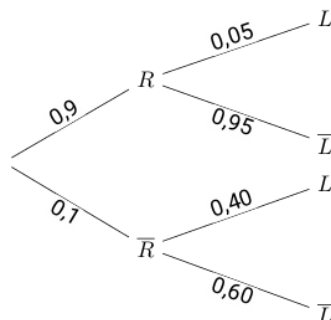
Ex 4

On note \bar{R} l'évènement contraire de R : « Le participant n'a pas choisi la randonnée », ce qui correspond à « Le participant a choisi le cross ».

1. a. Parmi ceux qui ont choisi la randonnée, 5 % sont licenciés. Donc $P_R(L) = \frac{5}{100} = \boxed{0,05}$.

b. Parmi ceux qui ont choisi le cross, 40 % sont licenciés. Donc $P_{\bar{R}}(L) = \frac{40}{100} = \boxed{0,40}$.

2. Représentation par un arbre pondéré :



Corrigé des exos type bac première générale spé maths

3. a. $P(R \cap L) = P(R) \times P_R(L) = 0,9 \times 0,05 = \boxed{0,045}$. *Interprétation* : La probabilité que le participant interrogé ait choisi la randonnée **et** soit licencié dans un club est de 0,045 (soit 4,5 %).

- b. Les événements R et \bar{R} forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(L) = P(R \cap L) + P(\bar{R} \cap L)$$

On sait que $P(\bar{R} \cap L) = P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(L) = 0,1 \times 0,40 = 0,04$.

Ainsi, $P(L) = 0,045 + 0,04 = \boxed{0,085}$.

4. On cherche la probabilité que le participant ait choisi le cross sachant qu'il est licencié, soit $P_L(\bar{R})$:

$$P_L(\bar{R}) = \frac{P(\bar{R} \cap L)}{P(L)} = \frac{0,040}{0,085} \approx \boxed{0,47}$$

La probabilité est d'environ 47 %. Comme 47 % n'est pas "largement supérieure à 50 %" (elle est même inférieure), **l'intuition du journaliste n'est pas correcte**.

5. Deux événements R et L sont indépendants si et seulement si $P(R \cap L) = P(R) \times P(L)$.

Or, $P(R) \times P(L) = 0,9 \times 0,085 = 0,0765$.

Comme $P(R \cap L) = 0,045$, on a $P(R \cap L) \neq P(R) \times P(L)$.

Les événements R et L ne sont pas indépendants.

(Remarque : on pouvait aussi comparer $P_R(L) = 0,05$ et $P(L) = 0,085$. Puisqu'elles sont différentes, il n'y a pas indépendance.)

Ex 5

1. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition, l'ensemble de définition \mathbb{R} est symétrique par rapport à zéro. Calculons $f(-x)$:

$$f(-x) = 3 \sin(2 \times (-x)) = 3 \sin(-2x)$$

Or, la fonction sinus est impaire, c'est-à-dire que pour tout réel X , $\sin(-X) = -\sin(X)$. En posant $X = 2x$, on obtient :

$$f(-x) = 3 \times (-\sin(2x)) = -3 \sin(2x) = -f(x)$$

Puisque $f(-x) = -f(x)$, **la fonction f est impaire**.

- b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons $f(x + \pi)$:

$$f(x + \pi) = 3 \sin(2(x + \pi)) = 3 \sin(2x + 2\pi)$$

Or, la fonction sinus est périodique de période 2π , ce qui signifie que pour tout réel X , $\sin(X + 2\pi) = \sin(X)$.

Ainsi, en posant $X = 2x$, on a $\sin(2x + 2\pi) = \sin(2x)$.

On obtient donc $f(x + \pi) = 3 \sin(2x) = f(x)$.

Ceci prouve que **la fonction f est périodique de période π** .

2. a) Calculons les images exactes grâce aux valeurs remarquables du cercle trigonométrique :

- $f(0) = 3 \sin(0) = 3 \times 0 = \boxed{0}$
- $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3 \sin\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$
- $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3 \sin\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$
- $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$
- $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \times 1 = \boxed{3}$
- $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \sin\left(2 \times \frac{\pi}{3}\right) = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) = 3 \sin(\pi) = 3 \times 0 = \boxed{0}$

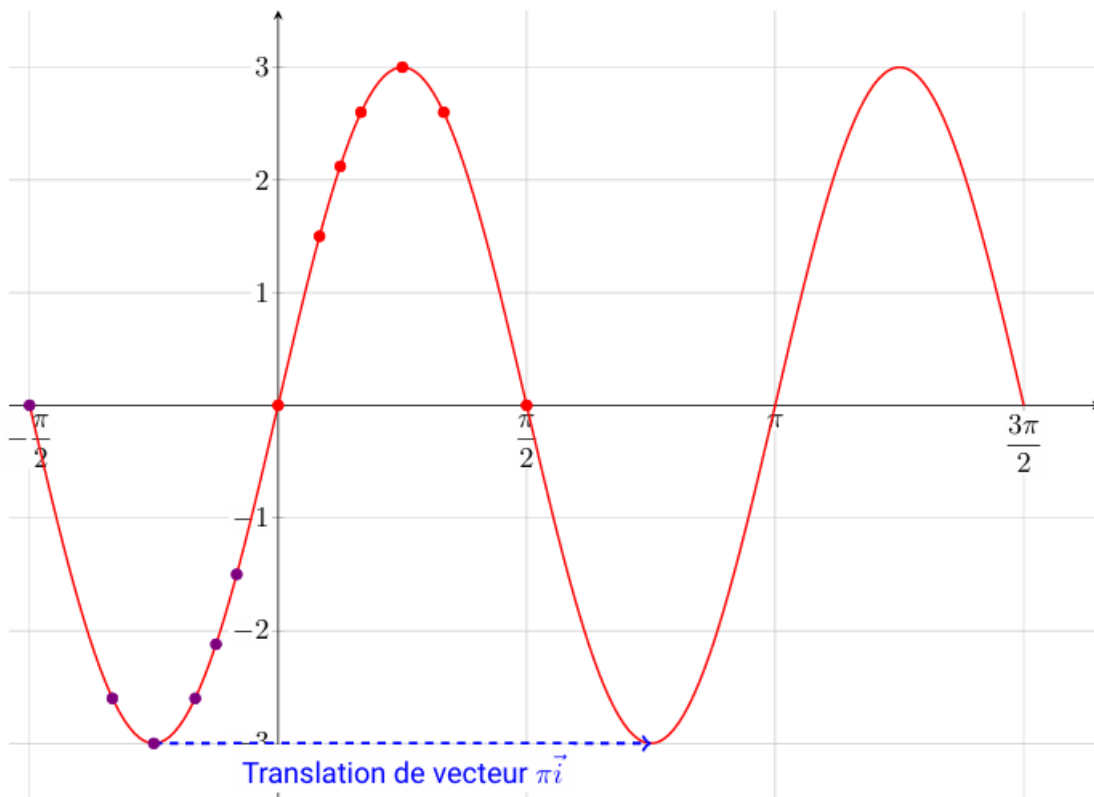
b) En utilisant les valeurs approchées ($\frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2,12$ et $\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,60$), on complète le tableau :

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	1,5	2,1	2,6	3	2,6	0

3. Sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$: La fonction f étant impaire, sa courbe représentative admet **l'origine du repère O comme centre de symétrie**. Pour tracer la courbe sur $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, il suffit donc de construire le symétrique, par rapport à l'origine du repère, du motif que l'on vient d'obtenir sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$: La fonction f étant périodique de période π , le motif dessiné sur un intervalle d'amplitude π (comme l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ qui vient d'être tracé dans sa totalité) se répète à l'identique. On obtient la suite de la courbe sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ en **translatant** le motif de la courbe présente sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ par une translation de vecteur $\pi \vec{i}$ (vers la droite).

4. Représentation graphique de $f(x) = 3 \sin(2x)$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$:



Ex 6

Partie A : Géométrie vectorielle

On a $EFGH$ rectangle, $EH = 2$, $EF = 3$. On peut placer un repère orthonormé $(E; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{3}\vec{EF}$ et $\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{EH}$. Les coordonnées sont : $E(0; 0)$, $F(3; 0)$, $G(3; 2)$, $H(0; 2)$. M milieu de $[FG]$ donc $M(3; 1)$. $\vec{HK} = \frac{1}{3}\vec{HG} \implies \vec{EK} = \vec{EH} + \frac{1}{3}\vec{HG}$. Comme $\vec{HG} = \vec{EF}$, on a $\vec{EK}(1; 2)$ donc $K(1; 2)$.

1. Calculons $\vec{EK} \cdot \vec{EM}$ avec les coordonnées :

$$\vec{EK} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{EM} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{EK} \cdot \vec{EM} = 1 \times 3 + 2 \times 1 = 3 + 2 = 5$$

Méthode sans coordonnées (Chasles) :

$$\vec{EK} \cdot \vec{EM} = (\vec{EH} + \vec{HK}) \cdot (\vec{EF} + \vec{FM})$$

Comme $EFGH$ est un rectangle :

Corrigé des exos type bac première générale spé maths

- $\overrightarrow{EH} \perp \overrightarrow{EF} \implies$ produit scalaire nul.
- \overrightarrow{HK} colinéaire à \overrightarrow{EF} et \overrightarrow{FM} colinéaire à \overrightarrow{EH} .

On développe :

$$\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{EM} = \underbrace{\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EF}}_0 + \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FM} + \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{EF} + \underbrace{\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{FM}}_0$$

Or $\overrightarrow{FM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$.

$$\begin{aligned} &= \overrightarrow{EH} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right) + \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}\right) \cdot \overrightarrow{EF} \\ &= \frac{1}{2}EH^2 + \frac{1}{3}EF^2 = \frac{1}{2}(2^2) + \frac{1}{3}(3^2) = \frac{1}{2}(4) + \frac{1}{3}(9) = 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{EM} = 5}$

2. (a) L est le projeté orthogonal de K sur (EM) , donc $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EL} \times EM$. Comme l'angle est aigu (produit scalaire positif), $EL \times EM = 5$. Calculons la longueur EM :

$$EM = \sqrt{(x_M - x_E)^2 + (y_M - y_E)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$EL \times \sqrt{10} = 5 \implies EL = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{2}}$$

- (b) On utilise l'autre expression du produit scalaire :

$$\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{EM} = EK \times EM \times \cos(\widehat{KEM})$$

Calculons la longueur EK :

$$EK = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

D'où :

$$5 = \sqrt{5} \times \sqrt{10} \times \cos(\widehat{KEM})$$

$$5 = \sqrt{50} \cos(\widehat{KEM}) = 5\sqrt{2} \cos(\widehat{KEM})$$

$$\cos(\widehat{KEM}) = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'angle dont le cosinus vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est $\boxed{\frac{\pi}{4} \text{ rad (ou } 45^\circ)}$.

Partie B : Optimisation

$A(x; -2)$ et $B(x+4; x+3)$. $O(0;0)$.

1. Vecteurs : $\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} x \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} x+4 \\ x+3 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x(x+4) + (-2)(x+3) = x^2 + 4x - 2x - 6 = \boxed{x^2 + 2x - 6}$$

Corrigé des exos type bac première générale spé maths

2. Le triangle OAB est rectangle en O si et seulement si $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$.

$$x^2 + 2x - 6 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4(1)(-6) = 4 + 24 = 28 = (2\sqrt{7})^2.$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = -1 \pm \sqrt{7}$$

Les valeurs sont $\boxed{-1 - \sqrt{7} \text{ et } -1 + \sqrt{7}}$.

3. Soit $f(x) = x^2 + 2x - 6$.

(a) C'est un polynôme du second degré avec $a = 1 > 0$. La parabole est tournée vers le haut. L'abscisse du sommet est $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$. f est **décroissante sur** $] -\infty ; -1]$ **et croissante sur** $[-1 ; +\infty[$.

(b) Le produit scalaire est minimal au sommet de la parabole, donc pour $\boxed{x = -1}$. Ce minimum vaut $f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 6 = 1 - 2 - 6 = -7$.

(c) Pour $x = -1$, calculons l'angle \widehat{BOA} . $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -7$. Coordonnées des points pour $x = -1$: $A(-1; -2)$ et $B(3; 2)$. Longueurs :

$$OA = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$OB = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

Formule du produit scalaire : $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB \times \cos(\widehat{BOA})$.

$$-7 = \sqrt{5} \times \sqrt{13} \times \cos(\widehat{BOA}) = \sqrt{65} \cos(\widehat{BOA})$$

$$\cos(\widehat{BOA}) = \frac{-7}{\sqrt{65}}$$

D'après l'aide au calcul : $\cos^{-1}\left(\frac{-7}{\sqrt{65}}\right) \approx 150^\circ$. L'angle mesure environ $\boxed{150^\circ}$.

Ex 7

Partie A : Modèle continu

1. On cherche les abscisses $x \in \mathbb{R}^*$ tels que $g(x) = f(x)$:

$$\frac{3+x}{2x} = x-2 \iff \frac{3+x}{2x} - (x-2) = 0$$

Mise au même dénominateur :

$$\frac{3+x-2x(x-2)}{2x} = 0 \iff \frac{3+x-2x^2+4x}{2x} = 0 \iff \frac{-2x^2+5x+3}{2x} = 0$$

Cela revient bien à résoudre cette équation sur \mathbb{R}^* .

Corrigé des exos type bac première générale spé maths

2. Une fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul (et le dénominateur non nul).

On résout $-2x^2 + 5x + 3 = 0$.

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 25 + 24 = 49 > 0$$

Les racines sont :

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2(-2)} = \frac{-12}{-4} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2(-2)} = \frac{2}{-4} = -0,5$$

Ces deux valeurs sont non nulles, donc valides. On calcule les ordonnées avec $f(x) = x - 2$:

- Pour $x_1 = 3, y_1 = 3 - 2 = 1$. Point $I_1(3; 1)$.
- Pour $x_2 = -0,5, y_2 = -0,5 - 2 = -2,5$. Point $I_2(-0,5; -2,5)$.

Conclusion : Les points d'intersection sont $\boxed{(3; 1)}$ et $\boxed{(-0,5; -2,5)}$.

3. Étudions le signe de $E(x) = \frac{-2x^2 + 5x + 3}{2x}$.

- Le numérateur $-2x^2 + 5x + 3$ est du signe de $a = -2$ (négatif) à l'extérieur des racines $-0,5$ et 3 .
- Le dénominateur $2x$ s'annule en 0 et est positif pour $x > 0$.

x	$-\infty$	$-0,5$	0	3	$+\infty$
$-2x^2 + 5x + 3$	-	0	+	+	0
$2x$	-	-	0	+	+
Quotient	+	0	-	+	0

4. La position relative dépend du signe de $g(x) - f(x)$. D'après le tableau précédent :

- Sur $] -\infty; -0,5[\cup] 0; 3[$, $g(x) - f(x) > 0$, donc C_g est **au-dessus** de C_f .
- Sur $] -0,5; 0[\cup] 3; +\infty[$, $g(x) - f(x) < 0$, donc C_g est **en dessous** de C_f .
- Les courbes se coupent aux points d'abscisses $-0,5$ et 3 .

Partie B : Modèle discret

On a les suites définies par :

- $u_n = n - 2$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- $v_n = \frac{3+n}{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour la suite (u_n) :

(a) Calcul des termes :

- Le terme d'indice 2 est $u_2 = 2 - 2 = \boxed{0}$.
- La suite étant définie sur \mathbb{N} (commence à u_0), le 4^{ème} terme correspond à l'indice $n = 3$.

$$u_3 = 3 - 2 = \boxed{1}$$

Corrigé des exos type bac première générale spé maths

(b) **Expression de u_{n+1} :**

$$u_{n+1} = (n+1) - 2 = n + 1 - 2 = \boxed{n-1}$$

(c) **Sens de variation (Méthode de la différence) :** Calculons la différence entre deux termes consécutifs pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = (n-1) - (n-2) = n-1 - n+2 = 1$$

On constate que $u_{n+1} - u_n = 1 > 0$. **Conclusion :** La suite (u_n) est **strictement croissante** sur \mathbb{N} .

Pour la suite (v_n) :

(a) **Calcul des termes :**

- Le terme d'indice 2 est $v_2 = \frac{3+2}{2 \times 2} = \frac{5}{4} = \boxed{1,25}$.
- La suite étant définie sur \mathbb{N}^* (commence à v_1), le 4^{ème} terme correspond à l'indice $n = 4$.

$$v_4 = \frac{3+4}{2 \times 4} = \frac{7}{8} = \boxed{0,875}$$

(b) **Expression de v_{n+1} :**

$$v_{n+1} = \frac{3+(n+1)}{2(n+1)} = \boxed{\frac{n+4}{2n+2}}$$

(c) **Sens de variation (Méthode de la différence) :** Calculons la différence $v_{n+1} - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n+4}{2(n+1)} - \frac{n+3}{2n}$$

Mise au même dénominateur qui est $2n(n+1)$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n(n+4) - (n+1)(n+3)}{2n(n+1)}$$

Développons le numérateur :

$$n(n+4) = n^2 + 4n$$

$$(n+1)(n+3) = n^2 + 3n + n + 3 = n^2 + 4n + 3$$

D'où :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n^2 + 4n) - (n^2 + 4n + 3)}{2n(n+1)} = \frac{-3}{2n(n+1)}$$

Étude du signe :

- Le numérateur est -3 (négatif).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 1$, donc $2n(n+1)$ est strictement positif.

Par quotient, $v_{n+1} - v_n < 0$. **Conclusion :** La suite (v_n) est **strictement décroissante** sur \mathbb{N}^* .

Corrigé des exos type bac première générale spé maths

2. **Étude de la suite** (w_n) : On définit $w_n = v_n - u_n$ sur \mathbb{N}^* .

Utilisons la méthode de la différence pour étudier les variations :

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n)$$

On regroupe les termes des suites v et u :

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$$

D'après les questions précédentes, nous connaissons déjà les valeurs de ces différences :

- $v_{n+1} - v_n = \frac{-3}{2n(n+1)}$ (strictement négatif).
- $u_{n+1} - u_n = 1$.

Ainsi :

$$w_{n+1} - w_n = \underbrace{\frac{-3}{2n(n+1)}}_{<0} - 1$$

Puisque l'on soustrait 1 à un nombre déjà strictement négatif, le résultat est nécessairement strictement négatif.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_{n+1} - w_n < 0$$

Conclusion : La suite (w_n) est **strictement décroissante** sur \mathbb{N}^* .

Ex 8

1. **a)** Puisque le point M appartient au segment $[AB]$, la distance AM est au minimum égale à 0 (si M est confondu avec A) et au maximum égale à la longueur AB , soit 10 (si M est confondu avec B).

Par conséquent : $x \in [0; 10]$.

- b)** L'aire du rectangle $AMNP$ est donnée par la formule : $\mathcal{A}(x) = AM \times MN$.

On sait que $AM = x$. Il nous faut exprimer MN en fonction de x . Puisque ABC est un triangle rectangle isocèle en A , on a $AC = AB = 10$. Le quadrilatère $AMNP$ étant un rectangle, les droites (MN) et (AC) sont parallèles (car toutes deux perpendiculaires à (AB)).

On peut donc appliquer le **théorème de Thalès** dans le triangle ABC :

$$M \in [AB], N \in [BC] \text{ et } (MN) \parallel (AC), \text{ donc : } \frac{BM}{BA} = \frac{MN}{AC}$$

Or, $BM = BA - AM = 10 - x$. En remplaçant par les valeurs connues :

$$\frac{10 - x}{10} = \frac{MN}{10}$$

En multipliant par 10 des deux côtés, on obtient : $MN = 10 - x$.

L'aire est donc : $\mathcal{A}(x) = x \times (10 - x) = 10x - x^2$

Ce qui donne bien : $\mathcal{A}(x) = -x^2 + 10x$.

2. a) On étudie le trinôme du second degré $-x^2 + 10x - 9$.

On calcule son discriminant Δ avec $a = -1, b = 10$ et $c = -9$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times (-1) \times (-9) = 100 - 36 = 64.$$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - \sqrt{64}}{2 \times (-1)} = \frac{-10 - 8}{-2} = \frac{-18}{-2} = 9$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 + \sqrt{64}}{2 \times (-1)} = \frac{-10 + 8}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Le coefficient $a = -1$ est négatif, le trinôme est donc du signe contraire de a (positif) à l'intérieur de l'intervalle des racines. On obtient le tableau de signe suivant sur \mathbb{R} :

x	$-\infty$	1	9	$+\infty$	
Signe de $-x^2 + 10x - 9$	-	0	+	0	-

- b) L'aire du rectangle $AMNP$ est supérieure ou égale à 9 si et seulement si :

$$\mathcal{A}(x) \geq 9 \iff -x^2 + 10x \geq 9 \iff -x^2 + 10x - 9 \geq 0$$

D'après le tableau de signe établi à la question précédente, le trinôme est positif ou nul sur l'intervalle $[1; 9]$. Comme x doit par ailleurs appartenir à l'intervalle $[0; 10]$ défini à la question 1.a), l'ensemble des solutions est :

$$x \in [1; 9]$$

3. L'aire du triangle ABC est : $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{10 \times 10}{2} = 50$.

$$10\% \text{ de cette aire correspond à : } 50 \times \frac{10}{100} = 5.$$

On cherche les positions du point M telles que l'aire de $AMNP$ vaut 5, ce qui revient à résoudre l'équation :

$$\mathcal{A}(x) = 5 \iff -x^2 + 10x = 5 \iff -x^2 + 10x - 5 = 0$$

Calculons le discriminant de ce nouveau trinôme ($a = -1, b = 10, c = -5$) :

$$\Delta = 10^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = 100 - 20 = 80.$$

Puisque $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions. Or $\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$.

$$x_1 = \frac{-10 - 4\sqrt{5}}{-2} = \frac{-2(5 + 2\sqrt{5})}{-2} = 5 + 2\sqrt{5} \quad (\approx 9,47)$$

$$x_2 = \frac{-10 + 4\sqrt{5}}{-2} = \frac{-2(5 - 2\sqrt{5})}{-2} = 5 - 2\sqrt{5} \quad (\approx 0,53)$$

Ces deux valeurs appartiennent bien à l'intervalle $[0; 10]$.

$$\text{Le point } M \text{ doit se situer à } 5 - 2\sqrt{5} \text{ ou } 5 + 2\sqrt{5} \text{ unités de } A.$$

Corrigé des exos type bac première générale spé maths

4. On met le trinôme $\mathcal{A}(x) = -x^2 + 10x$ sous sa forme canonique $\alpha(x - \beta)^2 + \gamma$:

$$\mathcal{A}(x) = -(x^2 - 10x)$$

On reconnaît le début du développement de $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$. Ainsi, $x^2 - 10x = (x-5)^2 - 25$.

$$\mathcal{A}(x) = -[(x-5)^2 - 25] = \boxed{-(x-5)^2 + 25}$$

Le coefficient devant la parenthèse carrée ($a = -1$) est négatif. La parabole associée est donc "tournée vers le bas" (fonction d'abord croissante, puis décroissante). Son sommet a pour coordonnées $(5 ; 25)$.

On en déduit le tableau de variations de la fonction \mathcal{A} sur $[0 ; 10]$:

x	0	5	10
Variations de \mathcal{A}	0	25	0

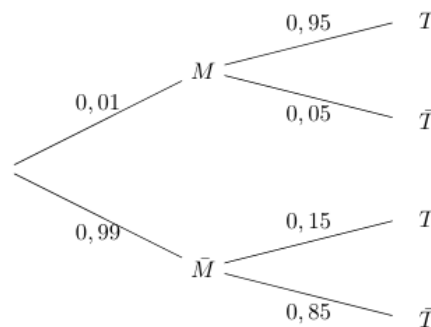
5. D'après le tableau de variations, la fonction \mathcal{A} atteint son maximum pour la valeur $\boxed{x = 5}$, et ce maximum vaut $\boxed{25}$.

(Sachant que $AB = 10$, le point M doit être confondu avec le milieu du segment $[AB]$.)

Ex 9

On traduit les données : $P(M) = 0,01$, $P_M(T) = 0,95$ et $P_{\bar{M}}(\bar{T}) = 0,85$. On en déduit : $P(\bar{M}) = 0,99$, $P_M(\bar{T}) = 0,05$ et $P_{\bar{M}}(T) = 0,15$.

1. Arbre pondéré



2. (a) $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,01 \times 0,95 = \boxed{0,0095}$.

(b) D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(T) &= P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) \\
 &= 0,0095 + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T) \\
 &= 0,0095 + 0,99 \times 0,15 = 0,0095 + 0,1485 = \boxed{0,158}
 \end{aligned}$$

Corrigé des exos type bac première générale spé maths

3. On cherche $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0095}{0,158} \approx \boxed{0,0601}$.

4. Étude du coût.

(a) Les valeurs possibles pour X sont $\{0, 100, 1000\}$.

(b) $P(X = 100) = P(T) = \boxed{0,158}$.

(c) Loi de probabilité de X :

- $P(X = 100) = P(T) = 0,158$.
- $P(X = 1000) = P(M \cap \bar{T}) = 0,01 \times 0,05 = 0,0005$.
- $P(X = 0) = P(\bar{M} \cap \bar{T}) = 0,99 \times 0,85 = 0,8415$.

Coût k en euros	0	100	1000
$P(X = k)$	0,8415	0,1580	0,0005

(d) $E(X) = 0 \times 0,8415 + 100 \times 0,1580 + 1000 \times 0,0005 = 15,8 + 0,5 = \boxed{16,30 \text{ euros}}$. En moyenne, le coût par animal est de 16,30 euros.

(e) Coût total estimé = $200 \times E(X) = 200 \times 16,3 = \boxed{3260 \text{ euros}}$.

Ex 10

a) La fonction f est définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{e^{12x+5}}{x^3}$.

Elle est de la forme $\frac{u}{v}$, avec : $u(x) = e^{12x+5} \implies u'(x) = 12e^{12x+5}$ et $v(x) = x^3 \implies v'(x) = 3x^2$

La formule de dérivation d'un quotient est $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{12e^{12x+5} \times x^3 - e^{12x+5} \times 3x^2}{(x^3)^2} \\ &= \frac{x^2 e^{12x+5} (12x - 3)}{x^6} \end{aligned}$$

En simplifiant par x^2 (on peut le faire car $x \neq 0$), on obtient :

$$f'(x) = \frac{(12x - 3)e^{12x+5}}{x^4}, \text{ ce qui est bien l'expression demandée.}$$

b) Pour étudier le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R}^* , on étudie le signe de chaque facteur.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $e^{12x+5} > 0$ (propriété de l'exponentielle).
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $x^4 > 0$ car $x \neq 0$ et la puissance est paire.
- Le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que du signe de $12x - 3$.

$$\text{On résout } 12x - 3 = 0 \iff 12x = 3 \iff x = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

L'expression $12x - 3$ est négative pour $x < 1/4$ et positive pour $x > 1/4$.

Corrigé des exos type bac première générale spé maths

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$12x - 3$	-	-	0	+
$f'(x)$	-	-	0	+

c) Le signe de la dérivée nous donne les variations de la fonction :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$	
$f'(x)$	-	-	0	+	
$f(x)$	↘		$f(\frac{1}{4})$	↗	

La fonction admet un minimum local en $x = \frac{1}{4}$. Sa valeur exacte est : $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{e^{12(\frac{1}{4})+5}}{(\frac{1}{4})^3} = \frac{e^{3+5}}{\frac{1}{64}} = \frac{e^8}{\frac{1}{64}} = 64e^8$

Le minimum local est $\boxed{64e^8}$.

d) L'équation de la tangente au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Ici, $a = -1$.

$$f(-1) = \frac{e^{12(-1)+5}}{(-1)^3} = \frac{e^{-7}}{-1} = -e^{-7}.$$

$$f'(-1) = \frac{(12(-1) - 3)e^{12(-1)+5}}{(-1)^4} = \frac{-15e^{-7}}{1} = -15e^{-7}.$$

$$\begin{aligned} \text{On remplace dans la formule : } y &= -15e^{-7}(x - (-1)) + (-e^{-7}) \\ &= -15e^{-7}(x + 1) - e^{-7} \\ &= -15e^{-7}x - 15e^{-7} - e^{-7} \\ &= -15e^{-7}x - 16e^{-7} \end{aligned}$$

L'équation de la tangente est $\boxed{y = -15e^{-7}x - 16e^{-7}}$.

Corrigé des exos type bac première générale spé maths

Ex 11

Données : $h(t) = 0,05 \cos(13t)$ et $v(t) = -0,65 \sin(13t)$ sur $I = \left[0; \frac{2\pi}{13}\right]$.

1. **Vitesses extrêmes** : On sait que pour tout réel X , $-1 \leq \sin(X) \leq 1$. Donc $-0,65 \leq -0,65 \sin(13t) \leq 0,65$.

- **Vitesse maximale** : $v_{max} = 0,65$ m/s. Elle est atteinte quand $\sin(13t) = -1$. Or $13t \in [0; 2\pi]$.
 $\sin(X) = -1 \iff X = \frac{3\pi}{2}$.

$$13t = \frac{3\pi}{2} \iff t = \frac{3\pi}{26} \text{ s}$$

- **Vitesse minimale** : $v_{min} = -0,65$ m/s. Atteinte quand $\sin(13t) = 1$.

$$13t = \frac{\pi}{2} \iff t = \frac{\pi}{26} \text{ s}$$

2. **Vitesse nulle** : $v(t) = 0 \iff -0,65 \sin(13t) = 0 \iff \sin(13t) = 0$. Sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ pour $13t$, les solutions sont $0, \pi$ et 2π .

- $13t = 0 \iff t = 0$. Position : $h(0) = 0,05 \cos(0) = \boxed{0,05 \text{ m}}$ (Haut).
- $13t = \pi \iff t = \frac{\pi}{13}$. Position : $h\left(\frac{\pi}{13}\right) = 0,05 \cos(\pi) = \boxed{-0,05 \text{ m}}$ (Bas).
- $13t = 2\pi \iff t = \frac{2\pi}{13}$. Position : $h\left(\frac{2\pi}{13}\right) = 0,05 \cos(2\pi) = \boxed{0,05 \text{ m}}$ (Haut).

Ex 12

1. Al Kashi

a. **Calcul des angles du triangle MNP** ($MN = 5, MP = 3, PN = 7$)

Calcul de l'angle \widehat{M} : $PN^2 = MN^2 + MP^2 - 2MN \times MP \times \cos(\widehat{M})$

$$\iff 7^2 = 5^2 + 3^2 - 2(5)(3) \cos(\widehat{M}) \iff 49 = 25 + 9 - 30 \cos(\widehat{M})$$

$$\iff 49 = 34 - 30 \cos(\widehat{M}) \iff 15 = -30 \cos(\widehat{M}) \iff \cos(\widehat{M}) = -0,5$$

Donc $\widehat{M} = 120^\circ$.

Calcul de l'angle \widehat{N} : $MP^2 = MN^2 + NP^2 - 2MN \times NP \times \cos(\widehat{N})$

$$\iff 3^2 = 5^2 + 7^2 - 2(5)(7) \cos(\widehat{N}) \iff 9 = 25 + 49 - 70 \cos(\widehat{N})$$

$$\iff 9 = 74 - 70 \cos(\widehat{N}) \iff -65 = -70 \cos(\widehat{N}) \iff \cos(\widehat{N}) = \frac{65}{70}$$

Donc $\widehat{N} \approx \boxed{22^\circ}$.

Calcul de l'angle $\widehat{P} : \widehat{P} = 180 - (120 + 22) \approx \boxed{38^\circ}$.

b. **Calcul de longueur EF :**

$$\begin{aligned} EF^2 &= GE^2 + GF^2 - 2GE \times GF \times \cos(\widehat{G}) \\ \Leftrightarrow EF^2 &= 7^2 + 10^2 - 2(7)(10) \cos(35^\circ) = 49 + 100 - 140 \cos(35^\circ) \\ \Leftrightarrow EF^2 &= 149 - 140 \cos(35^\circ) \approx 34,31 \end{aligned}$$

Donc $EF = \sqrt{34,31} \approx \boxed{5,9}$.

2. Equations de droites

Droite $D : 2x - 3y + 1 = 0$.

1. On lit directement sur l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$:

- Un vecteur normal : $\vec{n}(a; b)$ soit $\boxed{\vec{n}(2; -3)}$.
- Un vecteur directeur : $\vec{v}(-b; a)$ soit $\boxed{\vec{v}(3; 2)}$.

2. **Droite d parallèle à D passant par $A(-2; 1)$.**

Si $d // D$, alors elles ont le même vecteur normal $\vec{n}(2; -3)$.

L'équation de d est de la forme : $2x - 3y + c = 0$.

$$A \in d \Leftrightarrow 2(-2) - 3(1) + c = 0 \Leftrightarrow -4 - 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = 7.$$

L'équation de d est : $\boxed{2x - 3y + 7 = 0}$.

3. **Droite d' perpendiculaire à D passant par $B(2; 0)$.**

Si $d' \perp D$, alors un vecteur directeur $\vec{v}(3; 2)$ de D est un vecteur **normal** à d' .

L'équation de d' est de la forme :

$$3x + 2y + k = 0. B \in d' \Leftrightarrow 3(2) + 2(0) + k = 0 \Leftrightarrow 6 + k = 0 \Leftrightarrow k = -6.$$

L'équation de d' est : $\boxed{3x + 2y - 6 = 0}$.

3. Cercles

1. Cercle C de centre $E(-2; 5)$ et rayon $R = 8$.

a. Équation : $(x - x_E)^2 + (y - y_E)^2 = R^2$

$$(x - (-2))^2 + (y - 5)^2 = 8^2 \Leftrightarrow \boxed{(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 64}$$

b. Test du point $F(5; 1)$. Calculons la distance $EF^2 = (5 - (-2))^2 + (1 - 5)^2 = 7^2 + (-4)^2 = 49 + 16 = 65$. Comme $65 \neq 64$ (le carré du rayon), **le point F n'appartient pas au cercle.**

Corrigé des exos type bac première générale spé maths

2. Équation : $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 2 = 0$. Forme canonique : $(x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) + 2 = 0$

$$(x - 3)^2 - 9 + (y + 1)^2 - 1 + 2 = 0$$

$$\iff (x - 3)^2 + (y + 1)^2 - 8 = 0$$

$$\iff (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 8$$

C'est un cercle de centre $\Omega(3; -1)$ et de rayon $R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Ex 13

Partie A

On considère la fonction P définie sur l'intervalle $[-5; 3]$ par : $P(x) = 2x^2 + x - 10$.

1. a. $P(x) = 2x^2 + x - 10$ est un polynôme du second degré.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times (-10) = 1 + 80 = 81 = 9^2$$

Les racines de P sont :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 9}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2} \text{ et } x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 9}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

b. $\frac{x' + x''}{2} = \frac{-\frac{5}{2} + 2}{2} = \frac{-\frac{5}{2} + \frac{4}{2}}{2} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$

L'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = P(x)$ est donc la droite verticale d'équation $x = -\frac{1}{4}$.

2. Le polynôme P a pour racines $x' = -\frac{5}{2}$ et $x'' = 2$, donc

$$P(x) = a(x - x')(x - x'') = 2\left(x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right)(x - 2) = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x - 2)$$

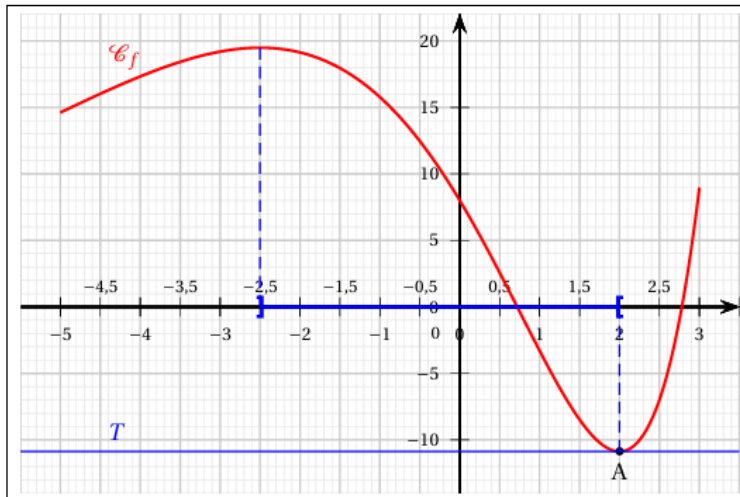
On établit le tableau de signes de la fonction P sur l'intervalle $[-5 : 3]$.

x	-5	$-\frac{5}{2}$	2	3	
$x + \frac{5}{2}$	-	0	+	+	
$x - 2$	-	-	0	+	
2	+	+	+	+	
$P(x)$	+	0	-	0	+

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5 : 3]$ dont on donne ci-dessous la courbe représentative \mathcal{C}_f .

Corrigé des exos type bac première générale spé maths



La tangente T à la courbe \mathcal{C}_f au point A d'abscisse 2 est horizontale.

- $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point de la courbe d'abscisse 2; c'est donc le coefficient directeur de la droite T . Or la droite T est horizontale, donc son coefficient directeur est égal à 0.

On en déduit que $f'(2) = 0$.

- Les solutions de l'inéquation $f'(x) < 0$ sont les valeurs de x pour lesquelles la fonction f est strictement décroissante, soit l'intervalle $] -2,5 ; 2[$ d'après le graphique.
- On sait que sur l'intervalle $[-5 ; 3]$: $f(x) = (4x^2 - 14x + 8) e^{0,5x}$.

D'après la formule de dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4 \times 2x - 14) \times e^{0,5x} + (4x^2 - 14x + 8) \times 0,5 e^{0,5x} \\ &= (8x - 14 + (4x^2 - 14x + 8) \times 0,5) e^{0,5x} \\ &= (8x - 14 + 2x^2 - 7x + 4) e^{0,5x} \\ &= (2x^2 + x - 10) e^{0,5x} \\ &= P(x) e^{0,5x} \end{aligned}$$

- D'après la partie A, on connaît le signe de $P(x)$. De plus, on sait que $e^{0,5x} > 0$ pour tout réel x . On peut donc établir le tableau de signes de $f'(x)$, puis le tableau de variations de la fonction f .

x	-5	$-\frac{5}{2}$	2	3	
$P(x)$	+	0	-	0	+
$e^{0,5x}$	+		+		+
$f'(x) = P(x) e^{0,5x}$	+	0	-	0	+
variations de f					

Ex 14

1- $u_0 = 10, u_1 = 0.5u_0 + 3 = 8, u_2 = 0.5u_1 + 3 = 7$

Ainsi :

- $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.
- $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

Méthode : pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique, il suffit de trouver deux couples de termes consécutifs qui n'ont pas la même différence (faite dans le même ordre). Et pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique, il suffit de trouver deux couples de termes consécutifs qui n'ont pas le même quotient (formé de la même manière).

2-

a) Objectif : montrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$,

$$v_{n+1} = 0,5v_n.$$

Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 \text{ par définition de la suite } (v_n)$$

$$v_{n+1} = 0,5u_n + 3 - 6 \text{ d'après la relation de récurrence de } (u_n)$$

$$v_{n+1} = 0,5u_n - 3$$

$$v_{n+1} = 0,5(v_n + 6) - 3 \text{ car } u_n = v_n + 6$$

$$v_{n+1} = 0,5v_n + 3 - 3$$

$$v_{n+1} = 0,5v_n$$

On en déduit que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,5.

b) On sait que pour tout entier naturel $n, v_n = v_0 \times 0,5^n$.

$$\text{De plus } v_0 = u_0 - 6 = 4.$$

$$\text{Ainsi pour tout } n \geq 0, v_n = 4 \times 0,5^n.$$

c) On sait que pour tout $n \geq 0, u_n = v_n + 6$ donc :

$$u_n = 6 + 4 \times 0,5^n$$

3- Objectif : montrer que pour tout $n \geq 0, u_{n+1} - u_n < 0$.

Pour tout $n \geq 0$:

$$u_{n+1} - u_n = 0,5u_n + 3 - u_n$$

Corrigé des exos type bac première générale spé maths

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= -0,5u_n + 3 \\
 u_{n+1} - u_n &= -0,5(4 \times 0,5^n + 6) + 3 \\
 u_{n+1} - u_n &= -2 \times 0,5^n - 3 + 3 \\
 u_{n+1} - u_n &= -2 \times 0,5^n \\
 \text{Or } 2 > 0 \text{ et } 0,5^n > 0 \text{ donc } -2 \times 0,5^n < 0.
 \end{aligned}$$

Finalement (u_n) est strictement décroissante.

Méthode : étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n est la démarche la plus courante pour déterminer les variations d'une suite (u_n) .

- 4- On peut conjecturer que les termes u_n se rapprochent infiniment de 6 lorsque n tend vers $+\infty$.

Ex 15

1. On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

(a) **Loi de probabilité de X**

Le jeu contient 32 cartes au total.

- L'issue $X = 0$ correspond aux 4 neuf, 4 huit et 4 sept, soit $4 + 4 + 4 = 12$ cartes. La probabilité est donc $P(X = 0) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$.
- L'issue $X = 5$ correspond aux 12 « figures ». La probabilité est donc $P(X = 5) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$.
- L'issue $X = 10$ correspond aux 4 dix et 4 as, soit $4 + 4 = 8$ cartes. La probabilité est donc $P(X = 10) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

On vérifie que la somme des probabilités est 1 : $\frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{6}{8} + \frac{2}{8} = \frac{8}{8} = 1$.

Le tableau complété est :

Valeur k de X	0	5	10
$P(X = k)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$

(b) **Espérance et écart type de X**

Calcul de l'espérance $E(X)$:

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 0 \times \frac{3}{8} + 5 \times \frac{3}{8} + 10 \times \frac{1}{4} \\
 E(X) &= 0 + \frac{15}{8} + \frac{20}{8} \\
 E(X) &= \frac{35}{8} = 4,375
 \end{aligned}$$

L'espérance de X est $E(X) = \frac{35}{8}$.

Calcul de l'écart type $\sigma(X)$: On calcule d'abord la variance $V(X)$ en utilisant la formule

$$V(X) = \sum p_i (x_i - E(X))^2. \text{ On a } E(X) = \frac{35}{8}.$$

Corrigé des exos type bac première générale spé maths

Calculons les carrés des écarts à l'espérance :

- Pour $x_1 = 0$: $\left(0 - \frac{35}{8}\right)^2 = \left(-\frac{35}{8}\right)^2 = \frac{1225}{64}$
- Pour $x_2 = 5$: $\left(5 - \frac{35}{8}\right)^2 = \left(\frac{40}{8} - \frac{35}{8}\right)^2 = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$
- Pour $x_3 = 10$: $\left(10 - \frac{35}{8}\right)^2 = \left(\frac{80}{8} - \frac{35}{8}\right)^2 = \left(\frac{45}{8}\right)^2 = \frac{2025}{64}$

On applique maintenant la formule de la variance :

$$V(X) = P(X = 0) \times (x_1 - E(X))^2 + P(X = 5) \times (x_2 - E(X))^2 + P(X = 10) \times (x_3 - E(X))^2$$

$$V(X) = \frac{3}{8} \times \frac{1225}{64} + \frac{3}{8} \times \frac{25}{64} + \frac{1}{4} \times \frac{2025}{64}$$

$$V(X) = \frac{3675}{512} + \frac{75}{512} + \frac{1}{4} \left(\frac{256}{256}\right) \times \frac{2025}{64} \quad (\text{mise au dénominateur 512})$$

$$V(X) = \frac{3675}{512} + \frac{75}{512} + \frac{2025 \times 2}{256 \times 2} \quad (\text{ou plus simple : } \frac{1}{4} = \frac{128}{512})$$

$$V(X) = \frac{3675 + 75 + (128 \times 2025/64)}{512} = \frac{3750 + 2 \times 2025}{512} = \frac{3750 + 4050}{512}$$

$$V(X) = \frac{7800}{512} \quad (\text{on simplifie par 8})$$

$$V(X) = \frac{975}{64}$$

L'écart type est la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{975}{64}} = \frac{\sqrt{975}}{8}$.

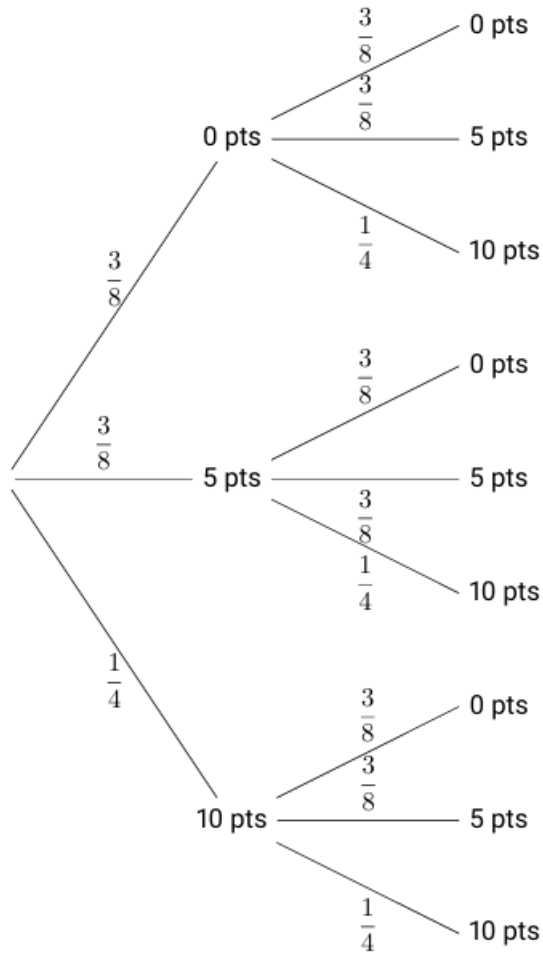
$$\text{Donc } \sigma(X) = \frac{\sqrt{975}}{8} \approx 3,90.$$

2. Gaspard effectue deux tirages successifs avec remise.

(a) **Arbre pondéré de l'expérience**

Chaque tirage est indépendant et suit la loi de probabilité de X .

Corrigé des exos type bac première générale spé maths



(b) Valeurs prises par Y

Y est la somme des points des deux cartes. L'ensemble des valeurs prises par Y est donc $Y(\Omega) = \{0, 5, 10, 15, 20\}$.

(c) Loi de probabilité de Y

On calcule la probabilité de chaque valeur de Y en utilisant l'arbre (les tirages sont indépendants) :

- $P(Y = 0) = P(0; 0) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$
- $P(Y = 5) = P(0; 5) + P(5; 0) = 2 \times \left(\frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \right) = \frac{18}{64}$
- $P(Y = 10) = P(0; 10) + P(10; 0) + P(5; 5) = 2 \times \left(\frac{3}{8} \times \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{3}{8} \right)^2 = \frac{6}{32} + \frac{9}{64} = \frac{12}{64} + \frac{9}{64} = \frac{21}{64}$
- $P(Y = 15) = P(5; 10) + P(10; 5) = 2 \times \left(\frac{3}{8} \times \frac{1}{4} \right) = \frac{6}{32} = \frac{12}{64}$
- $P(Y = 20) = P(10; 10) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = \frac{4}{64}$

Tableau de la loi de probabilité de Y :

Corrigé des exos type bac première générale spé maths

Valeur k de Y	0	5	10	15	20
$P(Y = k)$	$\frac{9}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{4}{64}$

3. Jeu équitable

Soit G la variable aléatoire représentant le gain algébrique de Gaspard.

• Si $Y \geq 15$, Gaspard gagne 3 euros. $P(Y \geq 15) = P(Y = 15) + P(Y = 20) = \frac{12}{64} + \frac{4}{64} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$.

• Sinon ($Y < 15$), Gaspard verse s euros (gain de $-s$). $P(Y < 15) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

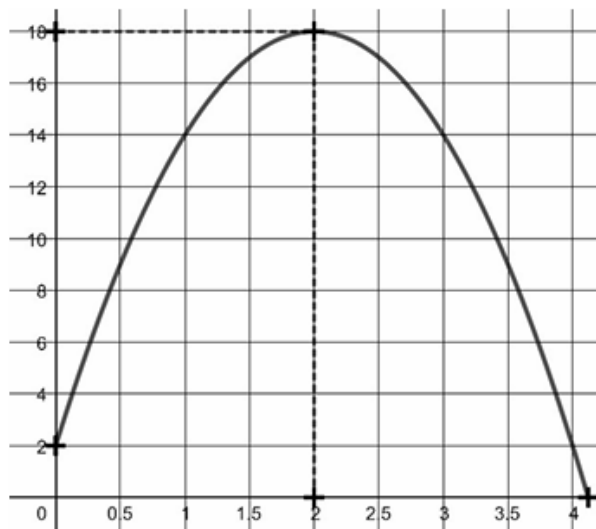
Un jeu est équitable si l'espérance de gain est nulle, $E(G) = 0$.

$$E(G) = 3 \times P(Y \geq 15) + (-s) \times P(Y < 15) = 3 \times \frac{1}{4} - s \times \frac{3}{4}$$

On résout $E(G) = 0 \iff 3 \times \frac{1}{4} - s \times \frac{3}{4} = 0 \iff \frac{3}{4} = s \times \frac{3}{4} \iff s = 1$. Pour que le jeu soit équitable, la somme s doit être de 1 euro.

Ex 16

- 1- On lit graphiquement (voir graphique complété ci-contre) :
- $h_0 = 2$ mètres.
 - $h_m = 18$ mètres.
 - $t_m = 2$ secondes.
 - $t_1 \approx 4,1$ secondes.



2-

a) Il s'agit de calculer $h(0)$.

$$\text{Or : } h(0) = -4 \times 0^2 + 16 \times 0 + 2 = 2.$$

On retrouve bien que $h_0 = 2$ mètres.

b) $h(t)$ est un trinôme du second degré de la forme $at^2 + bt + c$ avec $a = -4$, $b = 16$ et $c = 2$.

$$\text{On sait que } h \text{ atteint son maximum pour } t = -\frac{b}{2a} = 2.$$

On retrouve bien que $t_m = 2$ secondes.

De plus :

$$h(t_m) = h(2) = -4 \times 4 + 32 + 2 = 18 \quad \text{et on retrouve donc aussi que } h_m = 18 \text{ mètres.}$$

c) La balle touche le sol signifie exactement que $h(t) = 0$. Il s'agit donc ici de résoudre l'équation du second degré :

$$-4t^2 + 16t + 2 = 0$$

$$\Delta = 16^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 256 + 32 = 288$$

Il y a donc deux racines réelles :

$$t_1 = \frac{-16 - \sqrt{288}}{-8} = 2 + \frac{12\sqrt{2}}{8} = 2 + 1,5\sqrt{2}$$

$$t_2 = \frac{-16 + \sqrt{288}}{-8} = 2 - \frac{12\sqrt{2}}{8} = 2 - 1,5\sqrt{2}$$

$t_2 < 0$ donc la seule solution acceptable est t_1 .

On retrouve alors avec l'aide au calcul que $t_1 \approx 4,12$.