

TD M6 : Forces centrales conservatives

Table des matières

1	Troisième loi de Kepler	1
2	Quelques aspects de la satellisation	2
3	Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène	4
4	Deep Impact : distance minimale d'approche	7

1 Troisième loi de Kepler

1.1. Montrer que, pour un mouvement plan soumis à une force centrale, le moment cinétique du point matériel est conservé.

Réponse : Une force centrale est dirigée selon la droite joignant le point matériel au centre de force. Son moment par rapport à ce centre est donc nul. D'après le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$$

Le moment cinétique est donc constant au cours du mouvement.

1.2. En déduire que la vitesse aréolaire est constante.

Réponse : Dans un mouvement plan, le moment cinétique par unité de masse s'écrit

$$\vec{L} = mr^2\dot{\theta} \vec{u}_z$$

La vitesse aréolaire vaut

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$$

et elle est donc constante puisque $\vec{L}$ est conservé. C'est l'énoncé de la deuxième loi de Kepler.

1.3. En déduire la troisième loi de Kepler pour une orbite circulaire et en déduire la période du satellite en fonction de son altitude h .

Réponse : Pour une orbite circulaire de rayon r , la vitesse est constante et la période vaut

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

La force gravitationnelle fournit la force centripète :

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

On en déduit

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad \text{et} \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

Ainsi, $T^2 \propto r^3$, ce qui constitue la troisième loi de Kepler.

Pour un satellite en orbite circulaire autour de la Terre :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

où r est le rayon de l'orbite circulaire. Dans le cas présent, le rayon de l'orbite vaut

$$r = R_T + h$$

On en déduit l'expression de la période :

$$T = \left(\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T} (R_T + h)^3 \right)^{1/2}$$

1.4. On utilisera les données numériques suivantes :

$$\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}, \quad M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}, \quad R_T = 6,38 \times 10^6 \text{ m}.$$

Calculer, en heure, la période de satellites en orbite basse aux altitudes $h_1 = 300 \text{ km}$ et $h_2 = 2,0 \times 10^3 \text{ km}$, puis en orbite intermédiaire à l'altitude $h_3 = 20 \times 10^3 \text{ km}$.

Réponse :

— Pour $h_1 = 300 \text{ km}$:

$$T_1 = 1,5 \text{ h}$$

— Pour $h_2 = 2,0 \times 10^3 \text{ km}$:

$$T_2 = 2,1 \text{ h}$$

— Pour $h_3 = 20 \times 10^3 \text{ km}$:

$$T_3 = 12 \text{ h}$$

2 Quelques aspects de la satellisation

2.1. Calculer la vitesse orbitale v_0 d'un satellite en orbite circulaire à l'altitude $h = 832 \text{ km}$ au-dessus de la Terre.

Réponse : Le rayon de l'orbite est

$$r = R_T + h$$

Pour une orbite circulaire, la vitesse vaut

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r}}$$

En utilisant les données numériques usuelles, on obtient une vitesse orbitale de l'ordre de

$$v_0 \simeq 7,5 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$$

2.2. Définir et calculer la vitesse de libération v_ℓ depuis la surface de la Terre.

Réponse : La vitesse de libération est la vitesse minimale permettant au satellite d'atteindre l'infini avec une vitesse finale nulle. On écrit la conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2}mv_\ell^2 - \frac{\mathcal{G}M_T m}{R_T} = 0$$

On en déduit

$$v_\ell = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}}$$

soit numériquement

$$v_\ell \simeq 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

2.3. Dans le cas d'une orbite circulaire, montrer que l'énergie mécanique est négative.

Réponse : Pour une orbite circulaire :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{\mathcal{G}M_T m}{2r}, \quad E_p = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{r}.$$

Ainsi,

$$E_m = E_c + E_p = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{2r} < 0.$$

Une orbite circulaire correspond donc à un état lié.

2.4. Montrer qu'en présence de frottements le satellite chute mais que sa vitesse augmente, en supposant que le satellite reste sur une trajectoire quasi-circulaire (frottements faibles).

Réponse : Pour une orbite circulaire :

$$E_m = -E_c = \frac{1}{2}E_p = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{2r} < 0$$

(i) Avec frottements, le satellite chute : $\dot{r} < 0$.

On applique le théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}}$$

La force gravitationnelle est conservative (sa puissance est déjà prise en compte via E_p) et la puissance des frottements est strictement négative (frottements $\vec{f}$ opposés à la vitesse) :

$$\mathcal{P}_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0.$$

Ainsi

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_f < 0$$

Or, tant qu'on peut approximer le mouvement comme quasi-circulaire, on a

$$E_m(r) = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{2r}$$

On dérive :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{\mathcal{G}M_T m}{2r} \right) = \frac{\mathcal{G}M_T m}{2r^2} \dot{r}$$

Comme $\frac{\mathcal{G}M_T m}{2r^2} > 0$, le signe de $\frac{dE_m}{dt}$ est celui de $\dot{r}$. Mais $\frac{dE_m}{dt} < 0$, donc nécessairement

$$\dot{r} < 0$$

Le rayon orbital diminue : **le satellite chute** (spirale vers le bas).

(ii) Sa vitesse augmente : v croît (donc E_c augmente).

Toujours sur une orbite (quasi-)circulaire,

$$E_c = \frac{\mathcal{G}M_T m}{2r} \Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathcal{G}M_T m}{2r} \right) = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{2r^2} \dot{r}$$

Or on vient de montrer que $\dot{r} < 0$, donc

$$\frac{dE_c}{dt} > 0$$

Ainsi **l'énergie cinétique augmente**, donc la vitesse v augmente (puisque $E_c = \frac{1}{2}mv^2$).

(iii) Ce n'est pas paradoxal.

On peut aussi le voir via $E_p = -2E_c$ (orbite circulaire) donc

$$\frac{dE_p}{dt} = -2\frac{dE_c}{dt}, \quad \frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}(E_c + E_p) = -\frac{dE_c}{dt} < 0$$

Autrement dit, E_c **augmente** mais E_p **diminue deux fois plus vite** : l'énergie mécanique E_m diminue bien, conformément au fait que les frottements dissipent de l'énergie.

3 Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

Pour expliquer le spectre de raies de l'atome d'hydrogène observé expérimentalement, Bohr a proposé un modèle basé sur les hypothèses suivantes : dans un référentiel galiléen lié au noyau O ,

- l'électron décrit une trajectoire circulaire sur laquelle il ne rayonne pas d'énergie ;
- l'électron échange de l'énergie avec l'extérieur sous forme de lumière lorsqu'il change de trajectoire circulaire ;
- le module du moment cinétique de l'électron est quantifié et ne peut prendre que des valeurs discrètes vérifiant la relation :

$$L_{On} = n \frac{h}{2\pi},$$

où n est un entier naturel non nul et h la constante de Planck.

Une orbitale électronique correspond à une valeur de l'entier n . Elle est caractérisée par un rayon r_n , une vitesse v_n et une énergie mécanique $E_m(n)$. Ce modèle semi-classique n'est pas complètement satisfaisant, mais il prédit le spectre de raies de l'atome d'hydrogène. À ce titre, il a eu son heure de gloire et a permis de banaliser l'idée que la quantification des grandeurs physiques est nécessaire à l'échelle atomique.

On rappelle qu'un atome d'hydrogène est constitué d'un noyau (charge e , masse m_p) et d'un électron (charge $-e$, masse m_e).

Valeurs numériques utiles :

masse de l'électron : $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$;

charge élémentaire : $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$;

constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$;

célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$;

permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$.

3.1. Rappeler l'expression de la force d'interaction exercée par le noyau sur l'électron et de l'énergie potentielle dont elle dérive.

Réponse : La seule interaction à considérer est l'interaction coulombienne entre le noyau de charge $+e$ et l'électron de charge $-e$. En notant $\vec{u}_r$ le vecteur unitaire radial (orienté de O vers l'électron) et r la distance noyau-électron :

$$\vec{F}(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Elle dérive de l'énergie potentielle (choisie nulle à l'infini) :

$$E_p(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

3.2. Utiliser le fait que les orbitales sont circulaires pour exprimer le carré v_n^2 de la vitesse de l'électron en fonction de la distance r_n .

Réponse :

Sur une orbite circulaire de rayon r_n , l'accélération est centripète :

$$\vec{a} = -\frac{v_n^2}{r_n} \vec{u}_r$$

Le principe fondamental de la dynamique projeté radialement donne alors :

$$m_e \frac{v_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} \quad \Rightarrow \quad v_n^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r_n}$$

3.3. Utiliser la quantification du moment cinétique pour exprimer le rayon de la trajectoire en fonction de n , h , m_e , e .

Réponse :

Pour une orbite circulaire, le moment cinétique (en norme) vaut :

$$L_{On} = m_e r_n v_n$$

La quantification impose :

$$m_e r_n v_n = n \frac{h}{2\pi}$$

On élève au carré et on utilise l'expression précédente de v_n^2 :

$$m_e^2 r_n^2 v_n^2 = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2} \quad \text{et} \quad v_n^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r_n}$$

D'où

$$m_e^2 r_n^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r_n} \right) = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2} \quad \Rightarrow \quad r_n = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2}$$

3.4. Calculer sa valeur pour $n = 1$.

Réponse :

Pour $n = 1$:

$$r_1 = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2} \simeq 53 \text{ pm}$$

3.5. Exprimer l'énergie mécanique de l'électron et montrer qu'elle se met sous la forme

$$E_m(n) = -\frac{A}{n^2}.$$

Donner l'expression et la valeur numérique de A , en électron-volts ($1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$).

Réponse :

L'énergie mécanique vaut

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m_e v_n^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}$$

Or, avec la relation issue du mouvement circulaire

$$m_e \frac{v_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} \quad \Rightarrow \quad m_e v_n^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}$$

donc

$$E_m = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n}$$

En remplaçant $r_n = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2}$:

$$E_m(n) = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{\pi m_e e^2}{n^2 h^2 \epsilon_0} = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$$

On obtient bien

$$E_m(n) = -\frac{A}{n^2} \quad \text{avec} \quad A = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$$

Numériquement :

$$A \simeq 2,17 \times 10^{-18} \text{ J} \simeq 13,6 \text{ eV}$$

3.6. Sachant que le passage de l'électron d'un niveau d'énergie $E_m(n_1)$ à un autre $E_m(n_2) < E_m(n_1)$ se traduit par l'émission d'un photon de fréquence ν telle que

$$E_{\text{photon}} = h\nu = E_m(n_1) - E_m(n_2)$$

en effet la bilan global d'énergie du photon et de l'électron s'écrit $E_{\text{photon}} + \Delta E_m = 0$ avec $\Delta E_m = E_m(n_2) - E_m(n_1)$.

En déduire que les longueurs d'onde λ émises vérifient :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

On donnera l'expression de la constante de Rydberg R_H ainsi que sa valeur numérique.

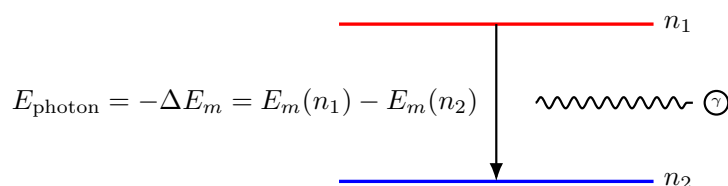


Figure 1 – Émission d'un photon lors de la diminution de l'énergie mécanique de l'électron

Réponse :

On a

$$E_m(n) = -\frac{A}{n^2} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{photon}} = E_m(n_1) - E_m(n_2) = A \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

L'énergie du photon vaut $E_{\text{photon}} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$, donc

$$\frac{hc}{\lambda} = A \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda} = \underbrace{\frac{A}{hc}}_{R_H} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

Ainsi

$$R_H = \frac{A}{hc} = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}$$

Numériquement :

$$R_H \simeq 1,09 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

3.7. Quelles sont les longueurs d'onde dans le visible pour les séries de Lyman ($n_2 = 1$) et de Balmer ($n_2 = 2$) ?

Réponse :

Le domaine visible est approximativement 400 nm à 800 nm.

— **Série de Lyman** ($n_2 = 1$) :

$$\lambda(2 \rightarrow 1) \simeq 122 \text{ nm}, \quad \lambda(3 \rightarrow 1) \simeq 103 \text{ nm},$$

et les transitions $n_1 > 3$ donnent des longueurs d'onde encore plus petites. **Donc aucune raie de Lyman n'est dans le visible** : elles sont dans l'ultraviolet.

— **Série de Balmer** ($n_2 = 2$) :

$$\lambda(3 \rightarrow 2) \simeq 660 \text{ nm}, \quad \lambda(4 \rightarrow 2) \simeq 489 \text{ nm}, \quad \lambda(5 \rightarrow 2) \simeq 436 \text{ nm},$$

$$\lambda(6 \rightarrow 2) \simeq 412 \text{ nm}, \quad \lambda(7 \rightarrow 2) \simeq 399 \text{ nm}.$$

On a donc **quatre raies dans le visible** (pour $n_1 = 3, 4, 5, 6$), la suivante étant déjà (très légèrement) hors du visible.

4 Deep Impact : distance minimale d'approche

On modélise la météorite comme un point matériel de masse m soumis uniquement à l'attraction gravitationnelle d'un astre central de masse M . On travaille dans le référentiel lié à cet astre, supposé galiléen. On note $\mu = \mathcal{G}M$. La météorite arrive depuis l'infini avec une vitesse v_0 et un paramètre d'impact $OH = b$.

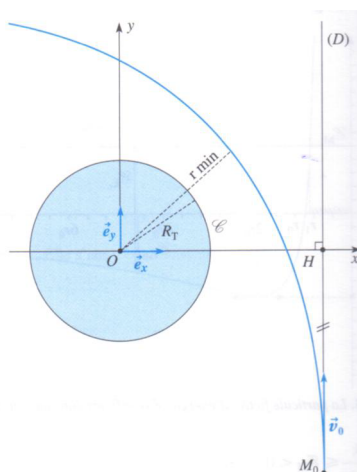


Figure 2 – Trajectoire de la météorite

4.1. Montrer que le mouvement est plan et qu'il existe une constante du mouvement C telle que $C = r^2 \dot{\theta}$.

Réponse : La force gravitationnelle exercée par l'astre central est dirigée suivant la droite joignant la météorite au centre : il s'agit d'une force centrale. Son moment par rapport au centre

est nul, ce qui implique la conservation du moment cinétique. Le mouvement est donc plan et il existe une constante C telle que

$$C = r^2 \dot{\theta} = \text{constante}$$

4.2. Exprimer la constante C à l'infini en fonction de b et de v_0 .

Réponse : À l'infini, la trajectoire est assimilable à un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v_0 . La distance minimale entre la trajectoire rectiligne et le centre est le paramètre d'impact b . Le moment cinétique par unité de masse vaut alors

$$C = bv_0$$

4.3. Justifier qu'au point de distance minimale d'approche $r_{\min}$, la vitesse radiale est nulle.

Réponse : Par définition, $r_{\min}$ correspond à un minimum de la fonction $r(t)$. La distance $r(t)$ est donc extrême en ce point, ce qui impose

$$\dot{r}(r_{\min}) = 0$$

La vitesse radiale est donc nulle au point de plus proche approche.

4.4. Exprimer la norme de la vitesse de la météorite en $r_{\min}$ en fonction de C et de $r_{\min}$.

Réponse : On a

$$C = r^2 \dot{\theta} \implies \dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$$

La vitesse orthoradiale vaut

$$v_{\theta} = r \dot{\theta}.$$

Ainsi, au point $r_{\min}$:

$$v_{\min} = \frac{C}{r_{\min}}$$

4.5. Écrire la conservation de l'énergie mécanique par unité de masse, notée ε , et l'appliquer à l'infini puis au point $r_{\min}$.

Réponse : L'énergie mécanique par unité de masse s'écrit

$$\varepsilon = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = \text{constante}$$

À l'infini, l'énergie potentielle est nulle et la vitesse vaut v_0 , donc

$$\varepsilon = \frac{1}{2}v_0^2.$$

Au point $r_{\min}$:

$$\frac{1}{2}v_0^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{C}{r_{\min}} \right)^2 - \frac{\mu}{r_{\min}}$$

4.6. En déduire une équation vérifiée par $r_{\min}$ puis exprimer $r_{\min}$ en fonction de μ , b et v_0 .

Réponse : En remplaçant $C = bv_0$, on obtient

$$\frac{1}{2}v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{b^2 v_0^2}{r_{\min}^2} - \frac{\mu}{r_{\min}}$$

En multipliant par $2r_{\min}^2$:

$$v_0^2 r_{\min}^2 + 2\mu r_{\min} - b^2 v_0^2 = 0$$

On reconnaît une équation du second degré en $r_{\min}$:

$$ar_{\min}^2 + b_1 r_{\min} + c = 0 \quad \text{avec} \quad a = v_0^2, \quad b_1 = 2\mu, \quad c = -b^2 v_0^2$$

Son discriminant vaut

$$\Delta = b_1^2 - 4ac = (2\mu)^2 - 4(v_0^2)(-b^2 v_0^2) = 4\mu^2 + 4b^2 v_0^4 = 4(\mu^2 + b^2 v_0^4)$$

d'où

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{\mu^2 + b^2 v_0^4}$$

Les deux solutions sont alors

$$r_{\min}^{(\pm)} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\mu \pm 2\sqrt{\mu^2 + b^2 v_0^4}}{2v_0^2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + b^2 v_0^4}}{v_0^2}$$

Comme $r_{\min} > 0$, on conserve uniquement la racine donnant une valeur positive :

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{\mu^2 + b^2 v_0^4} - \mu}{v_0^2}$$

4.7. Paramètre d'impact minimal. On suppose qu'il y a collision avec l'astre si $r_{\min} \leq R$. Déterminer le paramètre d'impact minimal $b_{\min}$ conduisant à une collision.

Réponse : La condition limite correspond à $r_{\min} = R$. On repart de l'équation

$$v_0^2 R^2 + 2\mu R - b_{\min}^2 v_0^2 = 0$$

d'où

$$b_{\min}^2 = R^2 \left(1 + \frac{2\mu}{R v_0^2} \right)$$

Ainsi,

$$b_{\min} = R \sqrt{1 + \frac{2\mu}{R v_0^2}}$$