

Correction Devoir surveillé n°5 type EDHEC

Exercice 1.

On considère une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme associé à M dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. Supposons que M soit diagonalisable, alors d'après le cours, il existe une base de vecteurs propres de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, où M est diagonale D .

C'est à dire qu'il existe P inversible et D diagonale telles que : $M = PDP^{-1}$.

Alors, on a $M^2 = PD^2P^{-1}$. De plus, D^2 est diagonale donc il existe une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, où M^2 est diagonalisable.

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 donnée par :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$ et soit g l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est A .

2. (a) Par calcul direct, on a : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ puis on a $A^4 = A^2 \cdot A^2 = I$.

- (b) On déduit de la question précédente que $X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de A . Ce polynôme a pour racines 1 et -1 et on sait que $Sp(A) \subset \{-1; 1\}$. Donc

les valeurs propres possibles de la matrice A sont -1 et 1. Comme 0 n'est pas valeur propre de A ,

la matrice A est inversible.

- (c) Donnons une base (u) de $\ker(g - Id)$.

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(g - Id) &\iff (A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2x - 6y + 4z = 0 \\ 3x - 8y + 5z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 + 2L_1 \\ L_3 + 3L_1 \end{matrix} \iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\ker(A - I) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

et avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$ la famille (u) est génératrice de $\ker(A - I)$ et libre, donc c'est une base de $\ker(A - I)$ et

on a aussi u base de $\ker(g - Id)$ car g est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Donc 1 est une valeur propre de A .

- (d) L'autre valeur propre possible de A est -1. Or, $A + I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 4 \\ 3 & -8 & 7 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A + I) &\iff (A + I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - 4y + 4z = 0 \\ 3x - 8y + 7z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{matrix} \iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -8y + 6z = 0 \\ -14y + 10z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ y=3/4z \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0.$$

Donc $\text{Ker}(A + I) = \{0\}$. Par conséquent, -1 n'est pas valeur propre de A . Donc A n'admet pas d'autres valeurs propres que 1 .

- (e) A n'est pas diagonalisable car sinon il existerait P inversible et D diagonale avec $D = I$ telles que : $A = PDP^{-1} = I$ ce qui est absurde.

3. (a) Comme g est l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est A ,

alors la matrice de g^2 dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

- (b) Résolvons l'équation, $A^2X = -X$, d'inconnue le vecteur X élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a $A^2X = -X \Leftrightarrow (A^2 + I)X = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y+2z=0 \\ 2x-2y+2z=0 \\ 2x-2y+2z=0 \end{cases} = 0 \Leftrightarrow x = y - z. \text{ Donc } X = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ avec } (y, z) \in \mathbb{R}^2.$$

Donc $\ker(A^2 + I) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice et libre (2 vecteurs non proportionnels) donc c'est une base de $\ker(A^2 + I)$.

D'où : $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\ker(A^2 + I)$ et donc aussi de $\ker(g^2 + \text{Id})$.

- (c) La famille $(u; v; w)$ est de cardinal 3 qui est aussi la dimension de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Donc il suffit de prouver que la famille (u, v, w) est libre :

Soient x, y, z réels.

$$\text{Si } xu + yv + zw = 0 \text{ alors } \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-x \\ z=-x \end{cases} \text{ donc } x=y=z=0$$

Conclusion : Donc (u, v, w) est une famille libre de trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- (d) On a d'après les questions précédentes, par définition des vecteurs u, v, w :

$g(u) = u$ donc $g^2(u) = g(u) = u$ (d'après la question 2c).

Puis d'après la question 3b), $g^2(v) = -v, g^2(w) = -w$. D'où la matrice de g^2 dans la base (u, v, w) est

$$\text{donc : } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice D de g^2 dans la base $(u; v; w)$ est donc diagonale.

- (e) A^2 est par conséquent diagonalisable d'après la question précédente car A^2 et D représentent le même endomorphisme (g^2) dans deux bases différentes et sont donc semblables. On avait A non diagonalisable mais A^2 diagonalisable.

Ainsi on a montré que la réciproque de l'assertion du début est fausse.

Si A est diagonalisable alors A^2 est diagonalisable mais pas de réciproque!

4. On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par leur premiers termes $u_0 = a, v_0 = b, w_0 = c$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante qui renvoie les valeurs de u_n, v_n et w_n pour un entier n en argument.

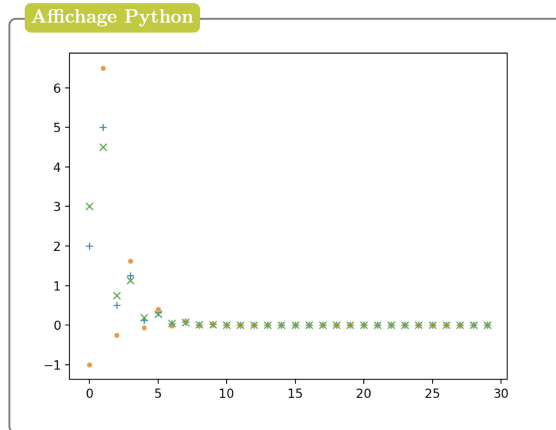
```
def suites(n) :
    u=a
    v=b
    w=c
```

```

for k in range(n) :
    x=u-2*v+2*w
    y=2*u-3*v+2*w
    z=2*u-2*v+w
    u, v, w = 1/3*x, 1/3*y, 1/3*z
return u, v, w

```

(b) On complète par les instructions suivantes dont l'exécution produit la figure ci-contre.



```

U=np.zeros(30)
V=np.zeros(30)
W=np.zeros(30)
for k in range(30):
    U[k],V[k],W[k]=suites(k)
    N=[k for k in range(30)]
plt.plot(N, U, '+')
plt.plot(N, V, '.')
plt.plot(N, W, 'x')
plt.show()

```

Ceci est la représentation graphique des 30 premiers termes des trois suites.
Elles semblent toutes les trois converger vers 0.

5. Notant, pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ alors avec la matrice $B = \frac{1}{3}A^2$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = BU_n$.

6. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = B^n U_0$.

Initialisation : $n = 0$, on a bien $U_0 = B^0 U_0$.

Hérédité : supposons que pour un certain entier n , on ait : $U_n = B^n U_0$.

Alors $U_{n+1} = BU_n \underset{\text{par HR}}{=} B \cdot B^n U_0 = B^{n+1} U_0$. Donc hérédité vérifiée.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = B^n U_0$.

7. D'après la question 5, la question 3e), on a donc que B est diagonalisable. Donc, il existe une matrice Q inversible (matrice de passage de la base canonique vers la base (u, v, w)) telle que :

$$B^n = \left(\frac{1}{3}A^2\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} Q^{-1}. \text{ Comme } \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ et } \left(-\frac{1}{3}\right)^n \text{ sont des}$$

quantités qui tendent vers 0, toute combinaison linéaire de ces deux quantités va aussi tendre vers 0.

Et comme on a vu que $U_n = B^n U_0$, les composantes de U_n sont bien des combinaisons linéaires de $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ et tendent toutes trois vers 0, ce qui est aussi la conjecture émise après interprétation de l'exécution du programme Python. Les trois suites convergent bien vers 0.

Exercice 2. Une urne contient trois boules indiscernables au toucher : une noire, une blanche et une verte. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise jusqu'à l'obtention de la première boule verte. On définit trois variables aléatoires X, Y et Z de la manière suivante :

- X prend la valeur k si la première boule verte est obtenue au k -ième tirage.

- Y prend la valeur n si on a obtenu n boules blanches avant l'apparition de la première boule verte.
 - Z prend la valeur ℓ si on a obtenu ℓ boules noires avant l'apparition de la première boule verte.
- Ainsi $X = Y + Z + 1$.

Fonction **Python** (ou écrire une fonction) permettant de simuler une loi uniforme sur $[[1, 3]]$:

```
import numpy.random as rd
def U():
    return(1+int(3*rd.rand()))
```

ou

```
def U():
    return(rd.randint(1,4))
```

On utilise cette instruction pour simuler le tirage d'une boule, avec la convention : si le résultat est 1, on a tiré une boule noire, si le résultat est 2, on a tiré une boule blanche et si c'est 3, on a tiré une boule verte. Fonction **Python** complétée suivante pour qu'elle simule le triplet des trois variables aléatoires : (X, Y, Z) .

```
def V():
    x = 0; y = 0; z = 0; t = 0
    while t != 3 :
        t = U() # la fonction simulant la loi uniforme
        x = x + 1
        if t == 1:
            z = z + 1
        if t == 2:
            y = y + 1
    return ([ x , y , z ])
```

- (a) X est le temps d'attente d'un succès (avoir une boule verte) dans la répétition d'expériences identiques et indépendantes. Le succès est "obtenir une boule verte", événement de probabilité $1/3$. Donc

X suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$. $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$.

- (b) On a d'après le cours, $E(X) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ et $V(X) = \frac{\frac{2}{3}}{(\frac{1}{3})^2} = 6$.

- Pour tout triplet (k, n, ℓ) de $\mathbb{N}^3$, comme on a $X = Y + Z + 1$ alors :

si $[X = k] \cap [Y = n] \cap [Z = \ell]$ est réalisé, nécessairement $k = n + \ell + 1$, donc

- si $k \neq n + \ell + 1$ alors $P(X = k \cap Y = n \cap Z = \ell) = 0$.

- si $k = n + \ell + 1$ alors si $A = [X = k] \cap [Y = n] \cap [Z = \ell]$, A représente l'évènement " obtenir n blanches et les autres noires lors des $k - 1$ premiers tirages et obtenir une verte au k -ième tirage".

$P(A) = \binom{k-1}{n} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1-n} \times \left(\frac{1}{3}\right)$ (car choix des boules blanches n blanches parmi $k - 1$, proba pour les blanches, probas pour les noires, et la verte au k -ième tirage).

Donc : $P(X = k \cap Y = n \cap Z = \ell) = \binom{k-1}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$.

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $Y((\Omega)) = \mathbb{N}$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$, si $n \geq k$, $[X = k \cap Y = n] = \emptyset$ donc $P([X = k \cap Y = n]) = 0$.

- Si $n \leq k - 1$, avec la FPT et le SCE $(Z = \ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$:

$$P([X = k \cap Y = n]) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} P(X = k \cap Y = n \cap Z = \ell).$$

Or, dans cette série, tous les termes sont nuls sauf un, celui correspondant à $\ell = k - n - 1$ donc :

$$\text{Si } n \leq k - 1, P([X = k \cap Y = n]) = P(X = k \cap Y = n \cap Z = k - n - 1) = \binom{k-1}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

$$\text{Bilan de la loi du couple } (X, Y) : P([X = k \cap Y = n]) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq k, \\ \binom{k-1}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k, & \text{si } n \leq k - 1 \end{cases}$$

- On admettra que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x tel que $0 < |x| < 1$: $\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}$.

- Déterminons la loi marginale Y :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(Y = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k \cap Y = n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \binom{k-1}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

On pose ensuite $j = k - 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(Y = n) = \sum_{j=n}^{+\infty} \binom{j}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{j+1}.$$

On utilise alors le résultat admis sur la série ($0 < 1/3 < 1$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(Y = n) = \left(\frac{1}{3}\right) \times \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

(b) On a $Y' = Y + 1, Y'(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$P(Y' = n) = P(Y + 1 = n) = P(Y = n - 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right).$$

Donc la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

(c) On a alors par linéarité de l'espérance, $E(Y) = E(Y' - 1) = E(Y') - 1 = 2 - 1 = 1$.

Et $V(Y) = V(Y' - 1) = V(Y') = 2$.

4. Pour raison de symétrie des rôles, Y et Z suivent la même loi.

$$P(Y = 0 \cap Z = 0) = \left(\frac{1}{3}\right) \text{ (car c'est avoir une boule verte au premier tirage).}$$

$$\text{Or, } P(Y = 0) \times P(Z = 0) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}\right).$$

Donc les variables aléatoires Y et Z ne sont pas indépendantes.

5. Déterminons la loi du couple (Y, Z) .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}, P(Y = n \cap Z = \ell) = P(X = n + \ell + 1 \cap Y = n \cap Z = \ell) = \binom{n+\ell}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+\ell+1} \text{ d'après la question 2.}$$

6. On sait que $X = Y + Z + 1$ donc

$$V(X) = V(Y + Z + 1) = V(Y + Z) = V(Y) + V(Z) + 2Cov(Y, Z) = 2 + 2 + 2Cov(Y, Z)$$

$$V(Y + Z) = 4 + 2Cov(Y, Z) = V(X) = 6.$$

Donc $Cov(Y, Z) = 1$ et $\rho(Y, Z) = \frac{Cov(Y, Z)}{\sigma(Y)\sigma(Z)} = \frac{1}{2}$.

Exercice 3.

1. (a) Soit on fait le calcul direct pour I_0 et une IPP pour I_1 , soit on connaît le cours sur les variables à densité : Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1, et soit f une densité associée, par exemple la fonction définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Alors on sait que (puisque X est une variable aléatoire à densité) que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et vaut 1. Autrement dit :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1 = I_0$$

De même, on sait aussi que X admet une espérance, qui égale à 1. Autrement dit, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ est absolument convergente et vaut 1, i.e :

$$\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = 1 = I_1$$

Pour I_2 soit on utilise un critère de négligeabilité : $t^2 e^{-t} \underset{+\infty}{=} o(e^{-t/2})$ avec $\int_0^{+\infty} e^{-t/2} dt$ convergente, soit : on sait également que X admet une variance, et donc un moment d'ordre 2. Ceci signifie que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ est convergente.

Pour info : elle vaut $E(X^2)$, soit, d'après la formule de König-Huygens : $V(X) + E(X)^2 = 1 + 1^2 = 2$. Par conséquent :

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = 2 = I_2$$

- (b) Soient $a \in [0; +\infty[$ et $k \in \mathbb{N}$. On a alors $I_{k+1}(a) = \int_0^a u'(t) v(t) dt$ avec u et v les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ définies par $u(t) = -e^{-t}$ et $v(t) = t^{k+1}$. On peut donc faire une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_{k+1}(a) &= \left[u(t)v(t) \right]_0^a - \int_0^a u(t)v'(t) dt \\
&= \left[-e^{-t} t^{k+1} \right]_0^a + \int_0^a e^{-t} (k+1) t^k dt \\
&= -e^{-a} a^{k+1} + (k+1) \int_0^a t^k e^{-t} dt
\end{aligned}$$

On a donc bien : $I_{k+1}(a) = (k+1)I_k(a) - a^{k+1}e^{-a}$.

- (c) D'après ce qui précède (en prenant $k=2$) on a, pour tout $a \geq 0$: $I_3(a) = 3I_2(a) - a^3 e^{-a}$. Or, $a^3 e^{-a} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0$ (par croissances comparées), et $I_2(a) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} I_2$, avec I_2 qui est égal à 2 (question 1).

On en déduit que $I_3(a) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 6$.

Par conséquent, l'intégrale I_3 est convergente et $I_3 = 6$.

De même, pour tout $a \geq 0$, on a : $I_4(a) = 4I_3(a) - a^4 e^{-a}$. Or, on sait que $a^4 e^{-a} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0$ (par croissances comparées). Donc $I_4(a) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 4I_3$.

On en déduit que l'intégrale I_4 est convergente et $I_4 = 24$.

Remarque : on pourrait continuer ainsi et montrer par récurrence que $I_k = k!$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ quelconque. La fonction $t \mapsto (y + xt + t^2)^2 e^{-t}$ est une fonction continue sur $[0; +\infty[$ (comme produit de fonctions continues) et positive (un carré et une exponentielle sont toujours positifs). De plus, au voisinage de $+\infty$: $(y + xt + t^2)^2 e^{-t} \sim t^4 e^{-t}$. Et on sait (question précédente) que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^4 e^{-t} dt$ converge.

Par critère de comparaison pour les fonctions continues positives, on en déduit que

l'intégrale $\int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt$ est convergente.

3. (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ quelconque. Pour tout $t \geq 0$, on a (en développant) :

$$\begin{aligned}
(y + xt + t^2)^2 e^{-t} &= (y + xt + t^2)(y + xt + t^2)e^{-t} \\
&= (y^2 + 2xyt + 2yt^2 + x^2 t^2 + 2xt^3 + t^4) e^{-t} \\
&= y^2 e^{-t} + 2xyt e^{-t} + 2yt^2 e^{-t} + x^2 t^2 e^{-t} + 2xt^3 e^{-t} + t^4 e^{-t}
\end{aligned}$$

D'où, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt &= y^2 \int_0^{+\infty} e^{-t} dt + 2xy \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt + 2y \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt \\
&\quad + x^2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt + 2x \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt + \int_0^{+\infty} t^4 e^{-t} dt
\end{aligned}$$

(Toutes ces intégrales sont bien convergentes d'après les questions précédentes)

Autrement dit :

$$f(x, y) = y^2 I_0 + 2xy I_1 + 2y I_2 + x^2 I_2 + 2x I_3 + I_4$$

C'est-à-dire, d'après les valeurs calculées à la question 1 :

$$f(x, y) = y^2 + 2xy + 4y + 2x^2 + 12x + 24$$

- (b) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale.

4. (a) Il suffit de dériver. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\partial_1(f)(x, y) = 4x + 12 + 2y \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x, y) = 2y + 4 + 2x$$

On cherche le (ou les) point(s) critique(s) de f en cherchant là où ces dérivées partielles s'annulent simultanément car $\mathbb{R}^2$ est un ouvert :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \partial_1 f(x, y) &= 0 \\ \partial_2 f(x, y) &= 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 4x + 2y &= -12 \\ 2x + 2y &= -4 \end{cases} \\ &\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} 4x + 2y &= -12 \\ -2x &= 8 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y &= 2 \\ x &= -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion : la fonction f admet un unique point critique qui est $(-4, 2)$.

- (b) En redérivant les dérivées partielles d'ordre 1, et en utilisant le thme de Schwartz, on obtient, pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$:

$$\partial_{1,1}^2(f)(x, y) = 4 \quad ; \quad \partial_{1,2}^2(f)(x, y) = \partial_{2,1}^2(f)(x, y) = 2 \quad ; \quad \partial_{2,2}^2(f)(x, y) = 2$$

La matrice hessienne de f est donc en tout point (et en particulier au point critique) la matrice suivante :

$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- (c) Appelons H la matrice ci-dessus. On cherche ses valeurs propres.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } H &\iff H - \lambda I \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff (4-\lambda)(2-\lambda) - 2 \times 2 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0 \end{aligned}$$

Or, on voit que la somme des racines est 6 et le produit des racines est 4.

Conclusion : les deux valeurs propres sont strictement positives.

On en déduit que f atteint un minimum local en $(-4, 2)$, qui vaut $f(-4, 2) = 4$.

5. (a) Partons du carré au membre de droite et développons :

$$\begin{aligned} 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 &= 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)\left(x + \frac{y}{2} + 3\right) \\ &= 2\left(x^2 + xy + 6x + \frac{y^2}{4} + 3y + 9\right) \\ &= 2x^2 + 2xy + 12x + \frac{y^2}{2} + 6y + 18 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$2x^2 + 2xy + 12x = 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 - \left(\frac{y^2}{2} + 6y + 18\right)$$

- (b) De même :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(y-2)^2 &= \frac{1}{2}(y^2 - 4y + 4) \\ &= \frac{1}{2}y^2 - 2y + 2 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{y^2}{2} - 2y + 6 = \frac{1}{2}(y-2)^2 + 4$$

(c) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2x^2 + 2xy + 12x + y^2 + 4y + 24 \\ &= 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 - \left(\frac{y^2}{2} + 6y + 18\right) + y^2 + 4y + 24 \quad (\text{question 5.a}) \\ &= 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 + \frac{y^2}{2} - 2y + 6 \end{aligned}$$

C'est-à-dire, d'après la question 5.(b) :

$$f(x, y) = 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 + \frac{1}{2}(y-2)^2 + 4$$

Comme un carré est toujours positif, on en déduit que $f(x, y) \geq 4$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
i.e $f(x, y) \geq f(-4, 2)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Autrement dit : f atteint un minimum global en $(-4, 2)$.

PROBLEME.

Partie I : Un problème de Cauchy et deux fonctions périodiques

Les résultats de cette partie sur les fonctions s et c pourront être admis et utilisés dans la suite car ils ne sont pas toujours faciles à obtenir.

On considère le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

1. Pour résoudre un problème de Cauchy, on commence par résoudre l'équation différentielle (homogène), ici d'ordre 2. Pour ce faire, on considère l'équation caractéristique $x^2 + 1 = 0$. Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ (discriminant strictement négatif). On ne peut alors rien dire.

Pour la suite du problème, on admet l'existence et l'unicité d'une fonction $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ solution de $(\mathcal{P})$.

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $c(t) = s'(t)$.

2. Premières propriétés des fonctions s et c .

- (a) Comme on a admis que s était de classe C^∞ et que $c = s'$, il suit naturellement que c est aussi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus, $c' = (s')' = s''$. Comme s est solution de $(\mathcal{P})$, on a que $s'' + s = 0$ ou encore $s'' = -s$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a bien $c'(t) = -s(t)$.

- (b) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h(t) = c^2(t) + s^2(t)$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ (elle est même C^∞) et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h'(t) = 2c'(t)c(t) + 2s'(t)s(t) = 2c'(t)c(t) + 2c(t)s(t) = 2c(t)(c'(t) + s(t)) = 0$ d'après la question précédente. La fonction h a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$.

Donc h est une fonction constante.

- (c) On connaît (par définition des solutions du problème de Cauchy) les valeurs de $s(0) = 0$ et $c(0) = s'(0) = 1$. Il suit que $h(0) = 1^2 + 0^2 = 1$. Mais, comme la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$, on a

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, c^2(t) + s^2(t) = 1.$$

- (d) On utilise la question précédente. On sait déjà que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $(c^2(t) \geq 0$ et $c^2(t) = 1 - s^2(t) \leq 1$, ce qui donne $0 \leq c^2(t) \leq 1$ puis, $-1 \leq c(t) \leq 1$. Ainsi,

c est bien bornée sur $\mathbb{R}$. C'est exactement la même chose pour s .

3. Le but de cette question est de montrer qu'il existe $\theta > 0$ tel que $s(\theta) = 0$.

On raisonne par l'absurde en supposant donc que, pour tout $\theta > 0$, on a $s(\theta) \neq 0$.

- (a) Par hypothèse, s ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est donc de signe constant. Si s était négative, alors $c' = -s$ serait strictement positive et c serait strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et même sur $\mathbb{R}_+$ car elle y est continue, ce qui implique notamment que, pour tout $t > 0$, $c(t) > c(0) = 1$. Mais on a vu à la question précédente que c était bornée par 1, ce qui est donc une contradiction. Il suit que s est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $s'' = -s$ sur $\mathbb{R}$, s'' est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$.

- (b) i. Comme $c' = -s$ est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$, c y est strictement décroissante. Étant bornée (ici c est le caractère minorée qui compte), le théorème de convergence monotone permet d'affirmer que c admet une limite finie ℓ lorsque t tend vers $+\infty$.
- ii. La fonction c est continue sur $\mathbb{R}$. Par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $t \mapsto \int_0^t c(x)dx$ est l'unique primitive de c qui s'annule en 0. Mais cette fonction est s . (car $s' = c$ et $s(0) = 0$). On peut donc écrire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $s(t) = \int_0^t c(x)dx$.
- iii. Montrons par l'absurde (et par disjonction de cas) que $\ell = 0$. Supposons que $\ell \neq 0$, distinguons alors deux cas :
- $\ell > 0$: par définition de la limite, $\forall \epsilon > 0$, il existe alors $A > 0$ tel que $\forall x \geq A$, $|c(x) - \ell| \leq \epsilon$ ce qui signifie par exemple que $c(x) \geq \ell/2$, mais alors, pour $t \geq A$, on aurait :

$$s(t) = \int_0^A c(x)dx + \int_A^t c(x)dx \geq \int_0^A c(x)dx + \ell/2 \int_A^t dx = \int_0^A c(x)dx + (t-A)\ell/2 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$$
ce qui n'est pas possible car s est bornée (majorée par 1).
 - De même si $\ell < 0$, il existe $B > 0$ tel que $\forall x \geq B$, $c(x) \leq \ell/2$, mais alors, pour $t \geq B$, on aurait :

$$s(t) = \int_0^B c(x)dx + \int_B^t c(x)dx \leq \int_0^B c(x)dx + \ell/2 \int_B^t dx = \int_0^B c(x)dx + (t-B)\ell/2 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty$$
ce qui n'est pas possible car s est bornée (minorée par -1).
- Donc $\ell = 0$.
- (c) On sait que, pour $t > 0$, $c'(t) = -s(t) < 0$ donc c est strictement décroissante. Elle est aussi continue sur $\mathbb{R}_+$ donc réalise (par le théorème de bijection) une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]0; 1]$ car $c(0) = 1$ et $c(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.
On a bien que, pour tout $t \geq 0$, $c(t) \geq 0$.
- (d) Comme précédemment, s est croissante (car $s' = c \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$) et majorée. Par convergence monotone, donc s admet une limite finie γ en $+\infty$.
- (e) On sait que $c' = -s$ ou encore $s = -c'$ donc,
pour $t \in \mathbb{R}$, $\int_0^t s(x)dx = -\int_0^t c'(x)dx = -[c(x)]_0^t = -c(t) + c(0) = 1 - c(t)$,
ou encore pour tout $t \in \mathbb{R}$, $c(t) = 1 - \int_0^t s(x)dx$.
- (f) En reproduisant le même raisonnement que pour ℓ , l'écriture ci-dessus avec une intégrale permet de montrer que $\gamma = 0$.
Ceci n'est pas possible. En effet, s était croissante, si $\theta > 0$ est fixé, on a $s(\theta) > 0$ par hypothèse) et $\gamma = \lim s(t) \geq s(\theta) > 0$, quand $t \rightarrow +\infty$. Ainsi, c'est notre hypothèse initiale, à savoir que s ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est absurde.

On a donc montré que s s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$. **On admettra que la plus petite valeur de $\theta > 0$ telle que $s(\theta) = 0$ est π , ainsi :** $s(\pi) = 0$, et $\forall t \in]0, \pi[, s(t) \neq 0$.

En travaillant avec les conditions de $(\mathcal{P})$ vérifiées par s , on montre facilement et **on admettra** que s est une fonction impaire et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $s(\pi - t) = s(t)$.

4. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$, on a $-t \in \mathbb{R}$ et $c(-t) = s'(-t) = (-s(-t))' = (s(t))' = c(t)$, car s est impaire.
Donc c est bien paire.
- (b) On a φ dérivable deux fois par composée et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi''(x) = s''(t+2\pi) = -s(t+2\pi) = -\varphi(t)$ donc $\varphi'' + \varphi = 0$. La fonction $\varphi : t \mapsto s(t+2\pi)$ est bien solution de $(\mathcal{P})$.
On va vérifier aussi que φ vérifie les conditions initiales car alors par unicité de la solution, $\varphi = s$.

On a, d'après les propriétés de s admises ci-dessus, $\varphi(0) = s(2\pi) = s(\pi - 2\pi) = s(-\pi) = -s(\pi) = 0$.

Observons aussi que $c(t) = s'(t) = -s'(\pi - t) = -c(\pi - t)$.

Ce qui donne $\varphi'(0) = c(2\pi) = -c(\pi - 2\pi) = -c(-\pi) = -c(\pi)$, car c est paire.

On sait aussi que $c^2(\pi) = 1 - s^2(\pi) = 1$. Donc $c(\pi) \in \{-1, 1\}$. Or, $c' = -s < 0$ sur $]0, \pi[$ donc c est strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Comme $c(0) = 1$, on a $c(\pi) = -1$. Il suit alors que $\varphi'(0) = -c(\pi) = -(-1) = 1$.

Ainsi φ est solution de $(\mathcal{P})$ mais le problème de Cauchy a une solution unique, qu'on a appelée s . Il suit que $\varphi = s$ ou encore $\forall t \in \mathbb{R}, s(t+2\pi) = s(t)$. On dit que s est périodique, de période 2π .

(c) Montrons que c est périodique de période 2π .

Il suffit de dériver,

soit $t \in \mathbb{R}$, $c(t + 2\pi) = s'(t + 2\pi) = (s(t + 2\pi))' = s'(t) = c(t)$. Donc c est périodique de période 2π .

(d) i. On a déjà vu précédemment que c était strictement décroissante sur $]0, \pi[$. Elle y est aussi continue et réalise donc une bijection de $]0, \pi[$ sur $] -1, 1[$. En particulier, 0 admet un unique antécédent $\theta \in]0, \pi[$.

ii. On peut dresser alors le tableau de variations de s sur $[0, \pi]$.

x	0	θ	π
$s'(x) = c(x)$		+	-
$s(x)$	0	$\nearrow$ $s(\theta)$ $\searrow$	0

s' s'annule en θ en changeant de signes donc s admet un maximum en θ sur $[0; \pi]$.

On remarquera que ce maximum vaut 1, car $s^2(\theta) + c^2(\theta) = 1$ et $c^2(\theta) = 0$ donc $s^2(\theta) = 1$ et comme $s(\theta) > 0$, on a $s(\theta) = 1$.

iii. Montrons que $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Comme $\theta \in]0, \pi[$, alors $\pi - \theta \in]0, \pi[$ aussi. Mais, $s(\pi - \theta) = s(\theta)$ donc s est maximale en $\pi - \theta$. Or, s n'atteint son maximum sur $[0, \pi]$ qu'en θ . Il suit que $\pi - \theta = \theta \Leftrightarrow 2\theta = \pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.

iv. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = c\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$. Montrons que ψ est solution de $(\mathcal{S})$.

Comme $c' = -s$, on a $c'' = -s' = -c$. Il suit que $\psi''(t) = -c''\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -c\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -\psi(t)$. Ou encore $\psi''(t) + \psi(t) = 0$. Reste à vérifier les conditions initiales.

$$\psi(0) = c\left(\frac{\pi}{2}\right) = c(\theta) = 0$$

$$\text{et } \psi'(0) = -c'\left(\frac{\pi}{2}\right) = s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

(on a bien justifié plus haut que le maximum de s était 1).

Ainsi, ψ est solution de $(\mathcal{S})$. Par unicité de la solution on a $\psi = s$, ou encore $\forall t \in \mathbb{R}, c\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = s(t)$.

5. On a déjà montré que c était strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On sait que c est strictement positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (par définition de $\theta = \frac{\pi}{2}$), il suit que s est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (car elle est continue sur l'intervalle fermé). Le théorème de bijection qu'on applique dans les deux cas (chacune des fonctions est continue sur l'intervalle correspondant et strictement monotone) permet d'obtenir le résultat voulu.

Partie II - Une suite d'intégrales

On considère la suite d'intégrales (W_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} c^n(t) dt$, où c est la fonction étudiée dans la partie I précédente. Celle-ci étant continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la suite (W_n) est bien définie.

6. Ces calculs ne posent pas de problème $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$.

$$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} c(t) dt = [s(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = s\left(\frac{\pi}{2}\right) - s(0) = 1.$$

7. Il est suggéré de poser $x = \frac{\pi}{2} - t$ changement de variable affine donc licite qui donne :

$$dx = -dt, t = \frac{\pi}{2} - x \text{ et pour les bornes } 0 \leftrightarrow \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \leftrightarrow 0,$$

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} c^n(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 c^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) (-dx) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} s^n(x) dx, \text{ car d'après la Question (4(d)iv) de la Partie 1, on a } c\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = s(x).$$

$$\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} s^n(t) dt.$$

8. On sait que, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $c(t) \in [0; 1]$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on aura $c^n(t) \geq c^{n+1}(t)$.

Par positivité de l'intégrale (dont les bornes sont rangées dans l'ordre croissant), on a bien $W_n \geq W_{n+1}$, ou encore que la suite (W_n) est décroissante.

9. L'indication sur l'utilisation de la Question (2c) suggère de remarquer que :

$$c^{n+2}(t) = c^2(t)c^n(t) = (1 - s^2(t))c^n(t) = c^n(t) - s(t)s(t)c^n(t) \text{ et de poser :}$$

$$u'(t) = -s(t)c^n(t), v'(t) = s(t)u(t) = \frac{1}{n+1}c^{n+1}(t)v'(t) = c(t).$$

Les fonctions u et v sont clairement C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par tout ce qui précède. On peut donc faire une IPP :

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} c^n(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} s(t) s(t) c^n(t) dt = W_n - \left[\frac{s(t) c^{n+1}(t)}{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} c^{n+2}(t) dt$$

Comme $c(\frac{\pi}{2}) = 0 = s(0)$, on obtient $W_{n+2} = W_n - \frac{1}{n+1} W_{n+2}$.

Ou encore en regroupant les W_{n+2} : $W_{n+2} = \frac{(n+1)}{n+2} W_n$.

10. On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, $J_n = (n+1)W_n W_{n+1}$. On fait ce qu'on nous demande.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} - J_n = (n+2)W_{n+1}W_{n+2} - (n+1)W_n W_{n+1} = (n+2)W_{n+1} \frac{n+1}{n+2} W_n - (n+1)W_n W_{n+1} = 0$

Ainsi, la suite (J_n) est constante. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = J_0 = W_0 W_1 = \frac{\pi}{2}$.

11. On a $W_n \geq 0$ (par croissance de l'intégrale, bornes croissantes avec $c(t) \geq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$). On sait que (W_n) est décroissante et que $\frac{(n+1)}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n}$.

Donc on a $W_{n+2} \leq W_{n+1}$ ce qui donne $\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n}$.

Mais on a aussi $W_{n+1} \leq W_n$ d'où :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement : $\frac{(n+1)}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$.

12. Comme $n+1 \sim n+2$, lorsque $n \rightarrow +\infty$, grâce à l'encadrement précédent et le théorème d'encadrement, on a : $W_{n+1} \sim W_n$, lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Mais on a $\pi/2 = J_n = (n+1)W_n W_{n+1} \sim nW_n^2$ soit encore $W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$

Finalement : $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, quand $n \rightarrow +\infty$.

Partie III : l'intégrale de Gauss

Le but de cette partie est d'évaluer (sans faire appel au résultat admis du cours) l'intégrale dite de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

13. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et positive, l'intégrale est donc impropre en $+\infty$. Sur $[0, 1]$, il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue donc elle existe.

De plus $e^{-x^2} = o(\frac{1}{x^2})$.

Car $\frac{x^2}{e^{x^2}} = \frac{X}{e^X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$ par C.C (on a posé $X = x^2$). Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ CV par Riemann ($\alpha = 2 > 1$).

Donc par critère de négligeabilités des intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge donc par

Chasles, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge.

14. On utilise l'argument de concavité de $x \mapsto \ln(1-x)$ sur $[0, 1[$. (Cette fonction a sa dérivée seconde négative). La courbe de cette fonction est donc toujours en-dessous de ses tangentes, en particulier par rapport à celle en 0 d'équation $y = -x$ d'où l'inégalité demandée. Pour tout $x \in [0, 1[$, $\ln(1-x) \leq -x$.

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soit $x \in [0, \sqrt{n}]$ alors d'après la question précédente et par croissance de la fonction exponentielle $\ln(1 - \frac{x^2}{n}) \leq -\frac{x^2}{n}$.

Puis $(1 - \frac{x^2}{n})^n = \exp(n \ln(1 - \frac{x^2}{n})) \leq e^{-x^2}$.

La positivité de l'intégrale (bornes croissantes) permet alors de conclure à l'inégalité suivante :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx.$$

16. De même on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, \sqrt{n}]$:

$\ln(1 + \frac{x^2}{n}) \leq \frac{x^2}{n}$ donc $(1 + \frac{x^2}{n})^{-n} = \exp(-n \ln(1 + \frac{x^2}{n})) \geq e^{-x^2}$.

La positivité de l'intégrale (bornes croissantes) permet alors de conclure à l'inégalité suivante :

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx.$$

17. A l'aide du changement de variable $x = \sqrt{n}c(u)$, comme c est bijective de $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$ on a alors $u = c^{-1}(x/\sqrt{n})$ qui est C^1 sur $[0, \sqrt{n}]$ à valeurs dans $[0, \pi/2]$, on a $dx = \sqrt{n}c'(u)du = -\sqrt{n}s(u)du$.

Pour les bornes : $0 \leftrightarrow \pi/2$, $\sqrt{n} \leftrightarrow 0$ car $c(0) = 1$, $c(\pi/2) = 0$,

Donc on a : $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = - \int_{\pi/2}^0 (1 - c(u)^2)^n \sqrt{n}s(u)du = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} s(u)^{2n+1} du = \sqrt{n}W_{2n+1}$.

On admet que le changement de variable $x = \sqrt{n} \frac{s(u)}{c(u)}$ (est licite et) permet d'obtenir :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx = \sqrt{n} W_{2n-2}.$$

On a donc l'encadrement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} W_{2n-2}.$$

18. A l'aide de **la question (12) de la Partie II**, on a au voisinage de $+\infty$,

$W_{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n+2}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ et $W_{2n-2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n-4}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ On divise alors l'encadrement précédent par $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, le théorème

d'encadrement entraîne que tout tend vers 1. Donc $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}.$

19. Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. Par parité et la question précédente, on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. On considère le changement de variable affine $x = \frac{t-m}{\sigma\sqrt{2}}$ licite que l'on fait directement dans l'intégrale impropre car on sait qu'elle converge.

$$dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} dt, \text{ donc } \sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} dt \text{ soit}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) dt = \sigma\sqrt{2\pi}.$$

20. Soit a un réel strictement positif et b et c deux réels quelconques.

En développant et en identifiant, on trouve que $a = \frac{1}{2\sigma^2}$, $b = -\frac{m}{\sigma^2}$, $c = \frac{m^2}{2\sigma^2} + \alpha$ soit donc

$$\boxed{\sigma = \sqrt{1/(2a)}, m = -b\sigma^2 = -b/(2a), \alpha = c - m^2/(2\sigma^2) = c - b^2/(4a)}.$$

21. On a d'après la question précédente que $\exp(-(at^2 + bt + c)) = \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2} - \alpha\right) = \exp(-\alpha) \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)$. La convergence de l'intégrale est garantie et d'après la valeur trouvée pour l'intégrale à la question 18, on a :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(at^2 + bt + c)) dt = \sqrt{2\pi\sigma^2} \exp(-\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$