

Signaux 5.1 - Filtrage linéaire

Table des matières

1	Filtre analogique	1
1.1	Utilité d'un filtre	1
1.2	Représentation d'un filtre	2
1.3	Fonction de transfert	3
1.4	Diagramme de Bode	4
2	Filtre du premier ordre	4
2.1	Filtre passe-bas du premier ordre	4
2.2	Filtre passe-haut du premier ordre	7
3	Filtre du deuxième ordre	11
3.1	Filtre passe-bas du deuxième ordre	11
3.2	Filtre passe-bande du deuxième ordre	14
4	Décomposition en série de Fourier d'un signal périodique	17
5	Intérêt de la décomposition en série de Fourier	20
6	Utilisation d'un filtre passe-bas d'ordre 1 en moyennneur	22
7	Utilisation d'un filtre passe-bas d'ordre 1 en intégrateur	24
8	Utilisation d'un filtre passe-haut d'ordre 1 en dérivateur	26

1 Filtre analogique

1.1 Utilité d'un filtre

L'électronique est la science du traitement des signaux électriques, dont un des problèmes fondamentaux est d'extraire l'information utile d'un signal issu d'un capteur ou reçu d'un interlocuteur. Sur l'antenne de réception d'un téléphone portable par exemple, de multiples signaux se superposent : certains sont des bruits générés par l'environnement, d'autres concernent des communications dont une seule est destinée à être reçue par l'utilisateur du téléphone. Une des tâches importantes en électronique des télécommunications consiste donc à séparer la partie utile, celle qui transporte l'information, de la partie parasite.

Définition

Un filtre est un opérateur qui permet de sélectionner des signaux utiles, sur un critère fréquentiel.

Sont décrites dans ce chapitre les méthodes d'étude et de caractérisation des filtres analogiques, c'est-à-dire ceux qui permettent le traitement de signaux variant continûment dans le temps, par opposition aux signaux numériques qui sont échantillonnés.

1.2 Représentation d'un filtre

Un filtre est composé d'un circuit électrique linéaire recevant un signal d'entrée $e(t)$ et délivrant un signal de sortie $s(t)$ tous deux analogiques (figure 1). La relation définissant le filtre est par conséquent l'équation différentielle liant ces deux signaux, qui est nécessairement une équation différentielle linéaire à coefficients constants du fait de la linéarité du circuit :



Figure 1 – Filtre linéaire

Définition

L'ordre de l'équation différentielle, qui est l'ordre de dérivation de plus haut degré de $s(t)$, est appelé ordre du filtre.

Par exemple, un filtre passé-bas d'ordre 1 possède une équation entrée-sortie de la forme :

$$\tau \frac{ds}{dt}(t) + s(t) = e(t)$$

et par exemple, un filtre passé-bas d'ordre 2 possède une équation entrée-sortie de la forme :

$$\frac{d^2s}{dt^2}(t) + 2\xi\omega_0 \frac{ds}{dt}(t) + \omega_0^2 s(t) = e(t)$$

La linéarité d'un filtre autorise un raisonnement par superposition. Connaissant la réponse du filtre à des signaux d'entrée de formes simples, on peut déterminer la réponse à des signaux plus complexes en effectuant des sommes. En outre, puisqu'un filtre effectue un traitement différencié des divers signaux selon leur fréquence, il est opportun d'envisager l'application de signaux d'entrée sinusoïdaux :

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$$

où la pulsation ω est liée à la fréquence f par $\omega = 2\pi f$.

On notera $\underline{e}(t)$ sa représentation complexe et $\underline{E} = E_m \exp(j\varphi_e)$ son amplitude complexe.

En régime permanent, ou régime sinusoïdal forcé, c'est-à-dire après amortissement du régime transitoire, le signal de sortie évolue également de manière sinusoïdale du temps, avec la même pulsation ω que l'excitation :

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$$

On notera $\underline{s}(t)$ sa représentation complexe et $\underline{S} = S_m \exp(j\varphi_s)$ son amplitude complexe.

Propriété

En régime établi, un filtre recevant un signal sinusoïdal de pulsation ω délivre un signal sinusoïdal de même pulsation.

À amplitude d'entrée donnée, l'amplitude S_m de la sortie dépend de la pulsation ; plus précisément, c'est le rapport $\frac{S_m}{E_m}$ qui dépend de ω , car la propriété de linéarité permet d'assurer que l'amplitude de sortie est proportionnelle à l'amplitude d'entrée. Le déphasage $\varphi_s - \varphi_e$ de $s(t)$ par rapport à $e(t)$ est également fonction de la pulsation, ce sont ces deux lois de variations qui décrivent le comportement du filtre.

1.3 Fonction de transfert

L'étude conduite en régime sinusoïdal forcé permet l'utilisation de la notation complexe. À partir de l'équation différentielle entrée-sortie, on peut établir une équation algébrique faisant intervenir les amplitudes complexes $\underline{E}$ et $\underline{S}$, les dérivations par rapport au temps étant remplacées par une multiplication par le facteur $j\omega$. Par exemple, pour le circuit RC série de constante de temps $\tau = RC = 10^{-3}$ s :

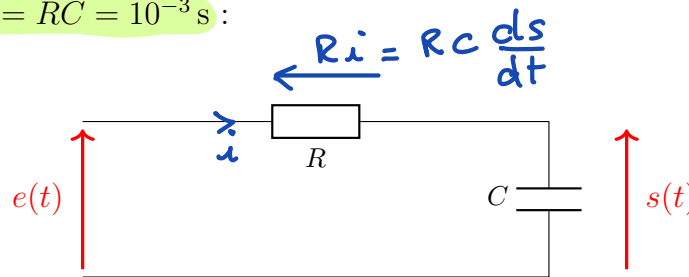


Figure 2 – Filtre (R, C) passe-bas

L'équation différentielle entrée-sortie est :

$$\tau \frac{ds}{dt}(t) + s(t) = e(t)$$

qui devient en notation complexe : avec $s(t) = \underline{S} e^{j\omega t}$ et $e(t) = \underline{E} e^{j\omega t}$

$$j\tau\omega \underline{S} + \underline{S} = \underline{E}$$

on peut ainsi aboutir à un rapport, appelé fonction de transfert :

$$\Rightarrow \underline{S}(1 + j\tau\omega) = \underline{E} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + j\tau\omega}$$

On aurait pu obtenir ce résultat plus rapidement à l'aide de la formule du diviseur de tension.

Propriété

La connaissance de la fonction de transfert fournit tous les renseignements utiles sur le filtre, grâce aux deux propriétés très importantes suivantes :

- le module de la fonction de transfert est le rapport des amplitudes : $|\underline{H}| = \frac{S_m}{E_m}$
- son argument est égal au déphasage, noté φ , du signal de sortie par rapport au signal d'entrée : $\varphi = \arg(\underline{H}) = \varphi_s - \varphi_e$

1.4 Diagramme de Bode

Définition

Lorsque la gamme de pulsation des signaux s'étend sur plusieurs ordres de grandeur, on utilise une **échelle logarithmique**.

Cela consiste à représenter $\log \omega$ en abscisse tout en écrivant la valeur effective de ω en graduation de l'axe.

On appelle **décade** un intervalle de pulsation tel que sa borne supérieure soit égale à 10 fois sa borne inférieure (exemple $[100 \text{ rad.s}^{-1}; 1000 \text{ rad.s}^{-1}]$).

Le **gain d'un filtre, exprimé de décibels (dB)** est par définition :

$$G = 20 \log (|\underline{H}|)$$

On appelle **diagramme de Bode** la représentation en concordance des abscisses :

- d'une part de l'évolution du gain en dB du filtre en fonction du logarithme de la pulsation
- d'autre part du déphasage φ du filtre en fonction du logarithme de la pulsation

2 Filtre du premier ordre

2.1 Filtre passe-bas du premier ordre

Nous avons étudié ce filtre dans la section 1.3, en notant $\tau = \frac{1}{\omega_c} = RC$, sa fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + j\tau\omega}$$

(1)

↓
pulsation de
coupure à -3dB.

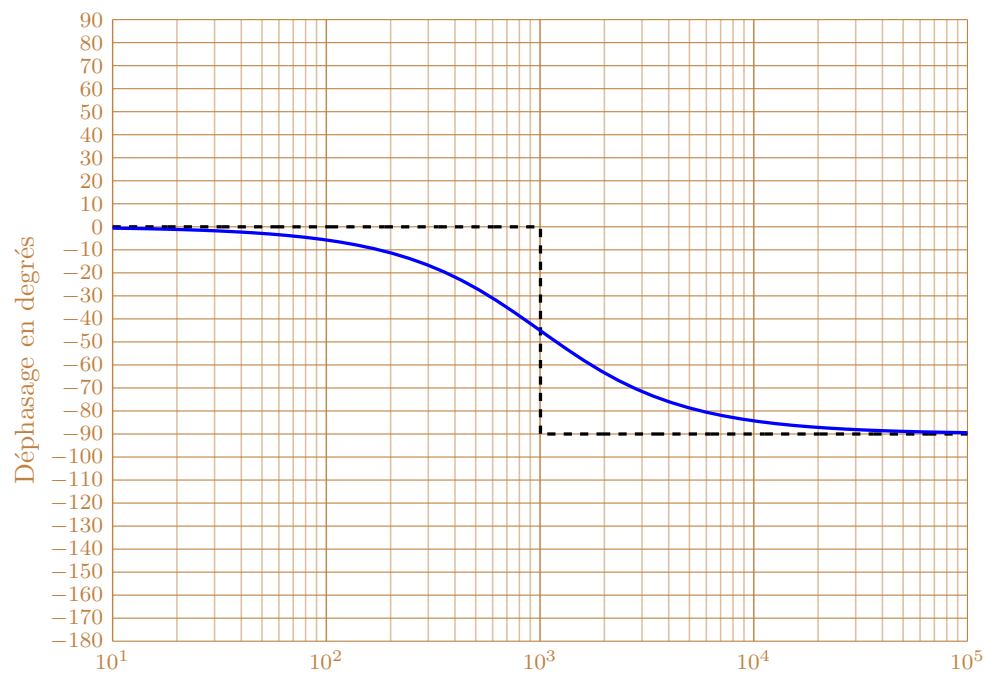
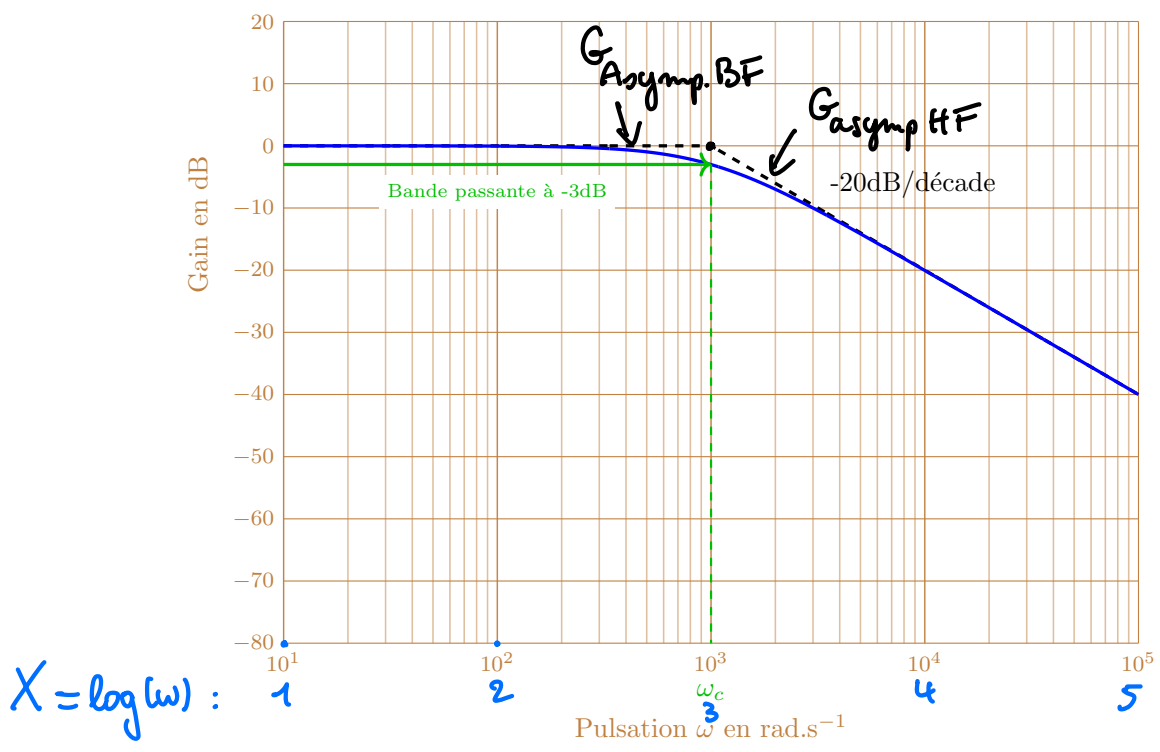


Figure 3 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-bas d'ordre 1

Expression du gain :

$$G = 20 \log(|\underline{H}|) = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}\right) \stackrel{\log(x^\alpha) = \alpha \log(x)}{=} -10 \log(1 + (\tau\omega)^2)$$

$$= 20 \log\left[(1 + (\tau\omega)^2)^{-1/2}\right]$$

Expression du déphasage :

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = -\arg(1 + j\tau\omega) = -\arctan(\tau\omega)$$

Étude en Basse Fréquence (BF), c'est-à-dire pour $\omega \ll \omega_c = \frac{1}{\tau} \Leftrightarrow \omega\tau \ll 1$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau\omega} \approx 1 \Rightarrow \begin{cases} G \approx G_{\text{asypBF}} = 0 \text{ dB} \\ \varphi \approx \varphi_{\text{asypBF}} = 0 \text{ rad} \end{cases}$$

Étude à la pulsation de coupure $\omega_c = \frac{1}{\tau} \Leftrightarrow \omega\tau = 1$:

$$\underline{H}(j\omega_c) = \frac{1}{1 + j} \Rightarrow \begin{cases} G(\omega_c) = -10 \log(2) = -3 \text{ dB} \\ \varphi(\omega_c) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4} \text{ rad} \end{cases}$$

Étude en Haute Fréquence (HF), c'est-à-dire pour $\omega \gg \omega_c = \frac{1}{\tau} \Leftrightarrow \omega\tau \gg 1$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau\omega} \approx \frac{1}{j\tau\omega} \Rightarrow \begin{cases} G \approx G_{\text{asypHF}} = -20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \stackrel{\approx 20 \log(\frac{1}{\omega})}{=} \\ \varphi \approx \varphi_{\text{asypHF}} = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} \end{cases}$$

Convention pour la tracé du diagramme de Bode asymptotique (en pointillés noirs sur la figure 3) :

Par convention, on trace les asymptotes BF sur l'intervalle $[0; \omega_c]$ et les asymptotes HF sur l'intervalle $[\omega_c; +\infty[$.

Or remarque que G_{asypHF} est une droite de pente -20 dB/décade, pour s'en convaincre on peut par exemple placer deux points : $G_{\text{asypHF}}(\omega_c) = 0 \text{ dB}$ et $G_{\text{asypHF}}(10\omega_c) = -20 \text{ dB}$.

On peut aussi constater que :

$$G_{\text{asypHF}} = -20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = 20 \log(\omega_c) - \underbrace{20 \log(\omega)}_X$$

ce qui correspond bien à une droite de pente de -20 dB/décade puisque c'est $X = \log(\omega)$ qui est représenté en abscisse compte-tenu de l'échelle logarithmique.

Définition

On définit **la bande passante à -3 dB** d'un filtre comme étant l'intervalle de pulsation pour lequel le gain est compris entre le gain maximal ($G_{\text{max}} = 0 \text{ dB}$) et $G_{\text{max}} - 3 \text{ dB}$.

Propriété

La bande passante à -3 dB du filtre passif RC passe-bas d'ordre 1 est $[0; \omega_c]$ où

$\omega_c = \frac{1}{RC}$ est la pulsation de coupure.

2.2 Filtre passe-haut du premier ordre

Le filtre passe-haut passif d'ordre 1 est constitué par le circuit CR série suivant de constante de temps $\tau = RC$:

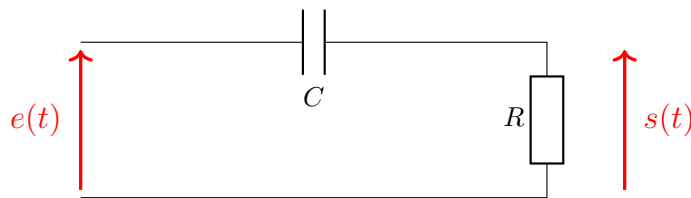


Figure 4 – Filtre (C, R) passe-haut

La formule du diviseur de tension nous donne : $s(t) = \frac{R}{R + Z_C} \times e(t)$.

$$\Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega} \quad (2)$$

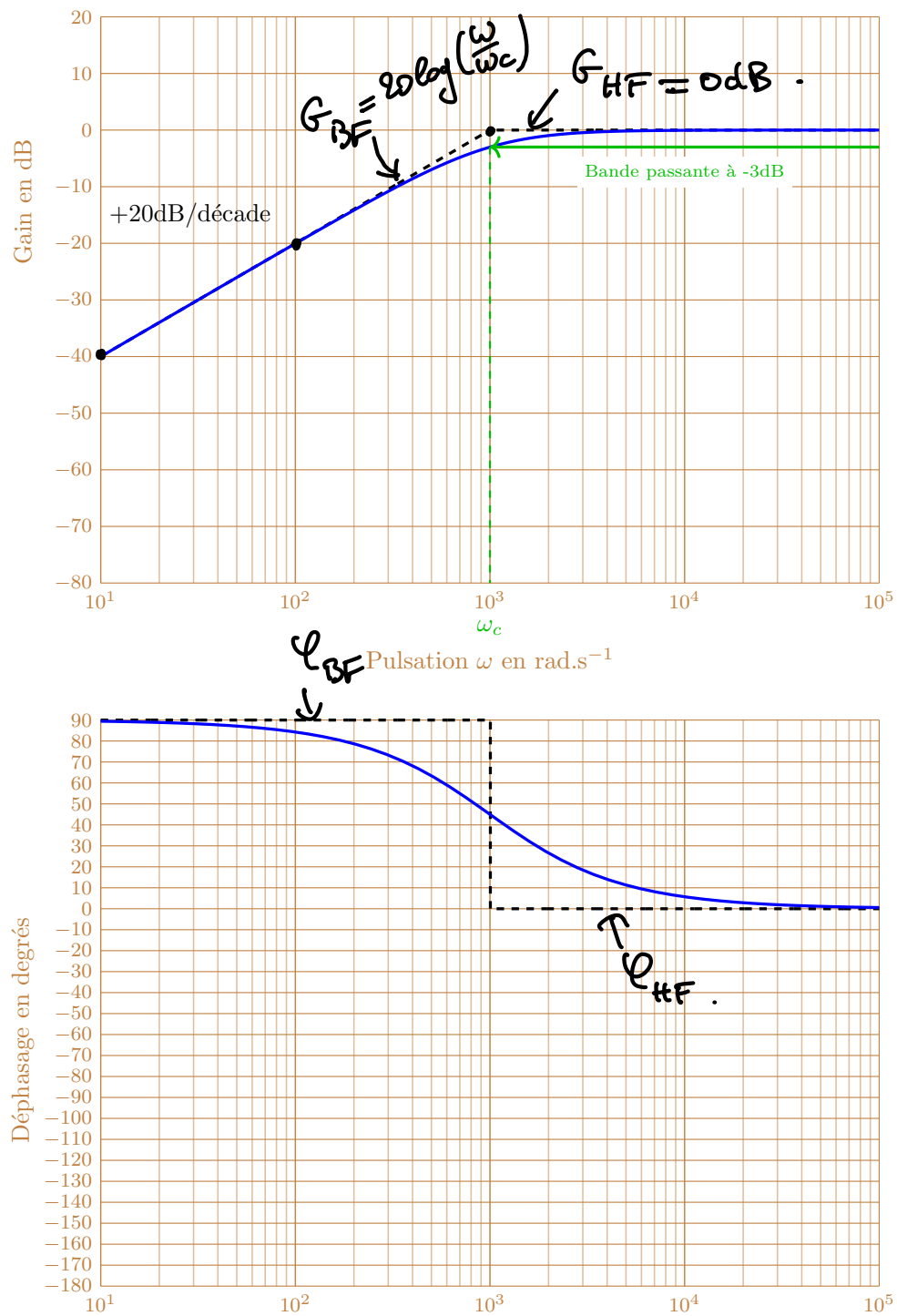


Figure 5 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut d'ordre 1

Expression du gain :

$$G = 20 \log (|\underline{H}|) = 20 \log \left(\frac{\tau \omega}{\sqrt{1 + (\tau \omega)^2}} \right)$$

Expression du déphasage :

$$\varphi = \arg (\underline{H}) = \arg (j\tau\omega) - \arg (1 + j\tau\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan (\tau\omega)$$

Étude en Basse Fréquence (BF), c'est-à-dire pour $\omega \ll \omega_c = \frac{1}{\tau} \Leftrightarrow \omega\tau \ll 1$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega} \approx j\tau\omega \Rightarrow \begin{cases} G \approx G_{\text{asymptBF}} = 20 \log (\tau\omega) = 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \\ \varphi \approx \varphi_{\text{asymptBF}} = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \end{cases}$$

Étude à la pulsation de coupure $\omega_c = \frac{1}{\tau} \Leftrightarrow \omega\tau = 1$:

$$\underline{H}(j\omega_c) = \frac{j}{1 + j} \Rightarrow \begin{cases} G(\omega_c) = -10 \log (2) = -3 \text{ dB} \\ \varphi(\omega_c) = \frac{\pi}{2} - \arctan (1) = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \end{cases}$$

Étude en Haute Fréquence (HF), c'est-à-dire pour $\omega \gg \omega_c = \frac{1}{\tau} \Leftrightarrow \omega\tau \gg 1$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega} \approx 1 \Rightarrow \begin{cases} G \approx G_{\text{asymptHF}} = 0 \text{ dB} \\ \varphi \approx \varphi_{\text{asymptHF}} = 0 \text{ rad} \end{cases}$$

Convention pour la tracé du diagramme de Bode asymptotique (en pointillés noirs sur la figure 5) :

Par convention, on trace les asymptotes BF sur l'intervalle $[0; \omega_c]$ et les asymptotes HF sur l'intervalle $[\omega_c; +\infty[$.

Or remarque que G_{asymptBF} est une droite de pente +20 dB/décade, pour s'en convaincre on peut par exemple placer deux points : $G_{\text{asymptBF}}(\frac{\omega_c}{10}) = -20 \text{ dB}$ et $G_{\text{asymptBF}}(\omega_c) = 0 \text{ dB}$.

On peut aussi constater que :

$$G_{\text{asymptBF}} = 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) = -20 \log (\omega_c) + 20 \underbrace{\log (\omega)}_X$$

ce qui correspond bien à une droite de pente de +20 dB/décade puisque c'est $X = \log (\omega)$ qui est représenté en abscisse compte-tenu de l'échelle logarithmique.

Propriété

La bande passante à -3 dB du filtre passif CR passe-haut d'ordre 1 est $[\omega_c; +\infty[$

où $\omega_c = \frac{1}{RC}$ est la pulsation de coupure.

3 Filtre du deuxième ordre

3.1 Filtre passe-bas du deuxième ordre

Le filtre passe-bas passif d'ordre 2, représenté sur la figure 6, peut être réalisé grâce au circuit RLC série en prenant la tension de sortie du filtre aux bornes du condensateur.

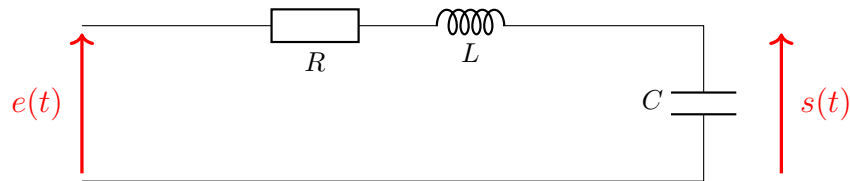


Figure 6 – Schéma du filtre (R, L, C) passe-bas d'ordre 2

On rappelle l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q de ce circuit :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3)$$

et

$$\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4)$$

La formule du diviseur de tension nous donne :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\left(\frac{1}{jC\omega}\right) \times j\omega}{\left(R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega\right) \times j\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \quad (5)$$

En utilisant (3) et (4), on peut remarquer que :

$$RC\omega_0^2 = \frac{RC}{LC} = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow RC = \frac{1}{Q\omega_0}$$

La fonction de transfert (5) peut donc aussi s'écrire :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j \cdot \frac{1}{Q} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (6)$$

On écrit parfois cette fonction de transfert (6) en utilisant le facteur d'amortissement $\xi = \frac{1}{2Q}$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j \cdot 2\xi \cdot \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (7)$$

Propriété admise

On montre que $|\underline{H}(j\omega)|$ admet un extremum $|\underline{H}(0)| = 1$ pour $\omega = 0$ et un autre extremum

à la pulsation $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$, appelée pulsation de résonance, si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Cela revient à dire qu' **il y a résonance seulement si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$**

Si la résonance est aiguë (par exemple pour la courbe $Q = 10$), soit un amortissement faible tel que $Q \gg 1$, alors $\omega_r \approx \omega_0$ et on obtient

$$|\underline{H}(j\omega_r)| \approx |\underline{H}(j\omega_0)| = Q$$

On peut remarquer que plus Q diminue, plus ω_r diminue (par exemple pour les courbes $Q = 4$ et $Q = 2$) et qu'il n'y a plus de résonance pour $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ (par exemple pour les courbes $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $Q = 0.1$).

Concernant la phase, on a, quel que soit Q :

$$\varphi(\omega_0) = \arg(\underline{H}(j\omega_0)) = \arg(-jQ) = -\frac{\pi}{2}$$

Remarque

En pratique, on va chercher à éviter absolument le phénomène de résonance et à avoir la courbe de gain la plus plate possible dans la bande passante. Cela est obtenu pour $Q = \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

On a alors $G(\omega_0) = 20 \log Q = -3 \text{ dB}$ et la bande passante à -3 dB est $[0; \omega_0]$

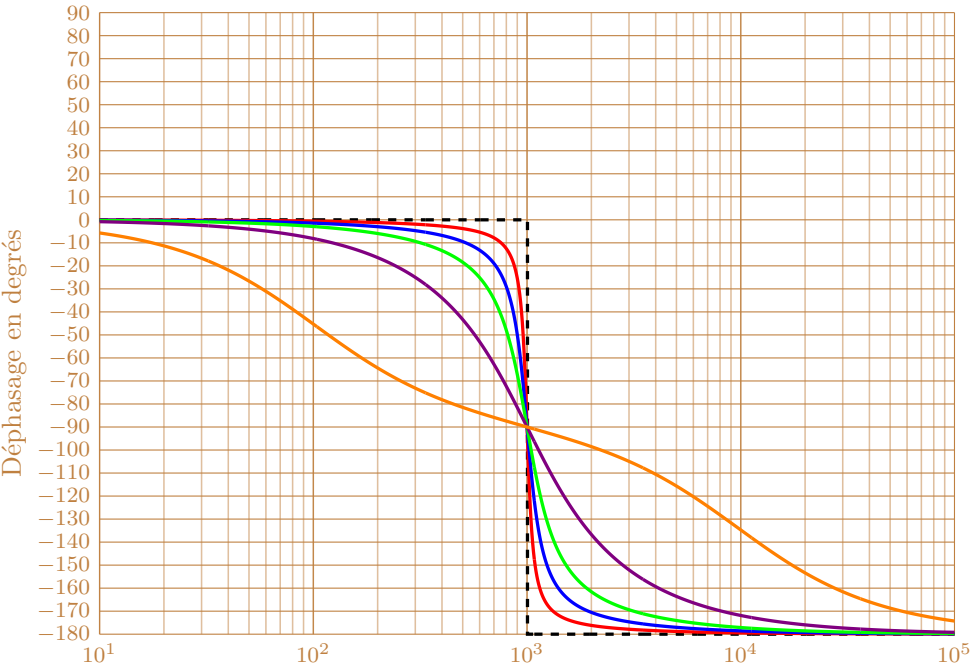
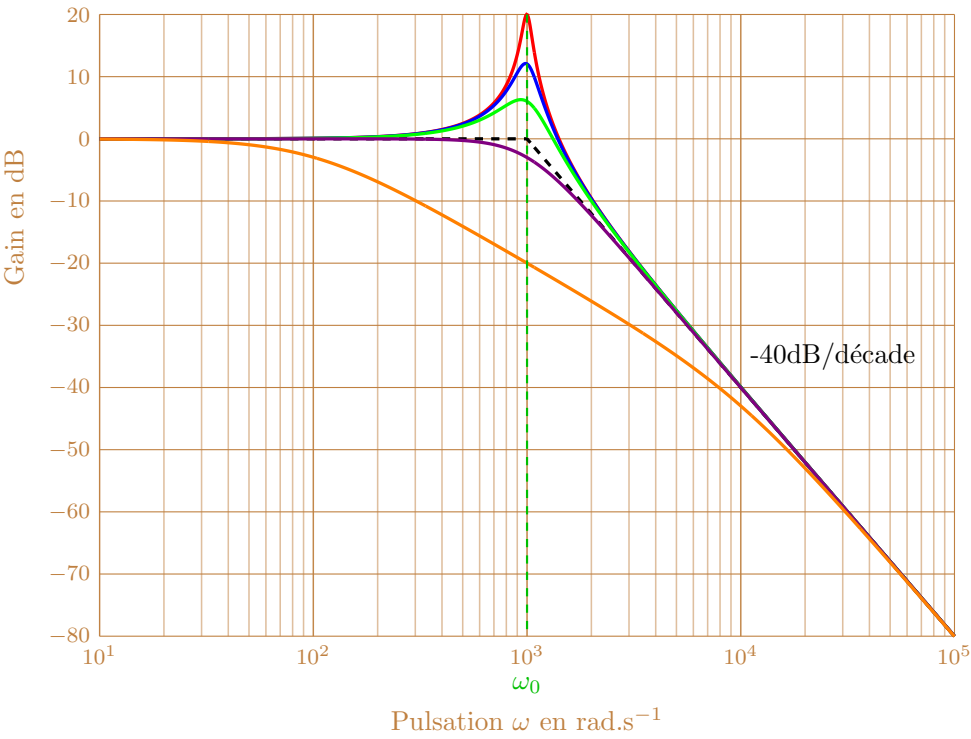


Figure 7 – Diagramme de Bode d’un filtre passe-bas d’ordre 2

Étude en Basse Fréquence (BF), c'est-à-dire pour $\omega \ll \omega_0$:

$$\underline{H}(j\omega) \approx 1 \Rightarrow \begin{cases} G \approx G_{\text{asypBF}} = 0 \text{ dB} \\ \varphi \approx \varphi_{\text{asypBF}} = 0 \text{ rad} \end{cases}$$

Étude en Haute Fréquence (HF), c'est-à-dire pour $\omega \gg \omega_0$:

$$\underline{H}(j\omega) \approx \frac{1}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} G \approx G_{\text{asypHF}} = -40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 20 \log\left(\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right) \\ \varphi \approx \varphi_{\text{asypHF}} = -\pi \text{ rad} \end{cases}$$

Convention pour la tracé du diagramme de Bode asymptotique (en pointillés noirs sur la figure 7) :

Par convention, on trace les asymptotes BF sur l'intervalle $[0; \omega_0]$ et les asymptotes HF sur l'intervalle $[\omega_0; +\infty[$.

Or remarque que G_{asypHF} est une droite de pente -40 dB/décade, pour s'en convaincre on peut par exemple placer deux points : $G_{\text{asypHF}}(\omega_0) = 0 \text{ dB}$ et $G_{\text{asypHF}}(10\omega_0) = -40 \text{ dB}$.

On peut aussi constater que :

$$G_{\text{asypHF}} = -40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 40 \log(\omega_0) - \underbrace{40 \log(\omega)}_X$$

ce qui correspond bien à une droite de pente de -40 dB/décade puisque c'est $X = \log(\omega)$ qui est représenté en abscisse compte-tenu de l'échelle logarithmique.

avec une échelle linéaire.

3.2 Filtre passe-bande du deuxième ordre

Le filtre passe-bande passif d'ordre 2, représenté sur la figure 8, peut être réalisé grâce au circuit LCR série en prenant la tension de sortie du filtre aux bornes de la résistance.

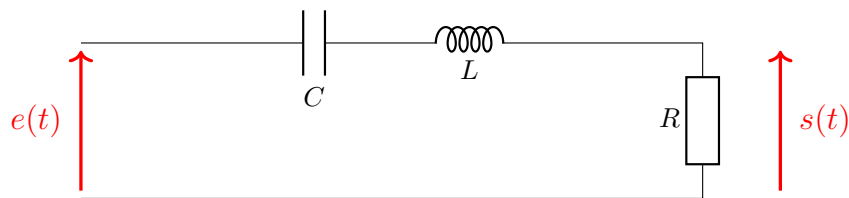


Figure 8 – Schéma du filtre (L , C , R) passe-bande d'ordre 2

La formule du diviseur de tension nous donne :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{R \times jC\omega}{\left(R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega\right) \times jC\omega} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \quad (8)$$

$$= \frac{\left(j \cdot \frac{1}{Q} \cdot \frac{\omega}{\omega_0}\right) \times \frac{Q\omega_0}{j\omega}}{\left(1 + j \cdot \frac{1}{Q} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} = \frac{j \cdot 2\xi \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \cdot 2\xi \cdot \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (9)$$

$$= \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad (10)$$

Nous avons écrit la formule (10) pour faire le lien avec la chapitre S10 mais nous allons utiliser la formule (9) par la suite car c'est celle qui est la plus couramment utilisée pour caractériser ce filtre.

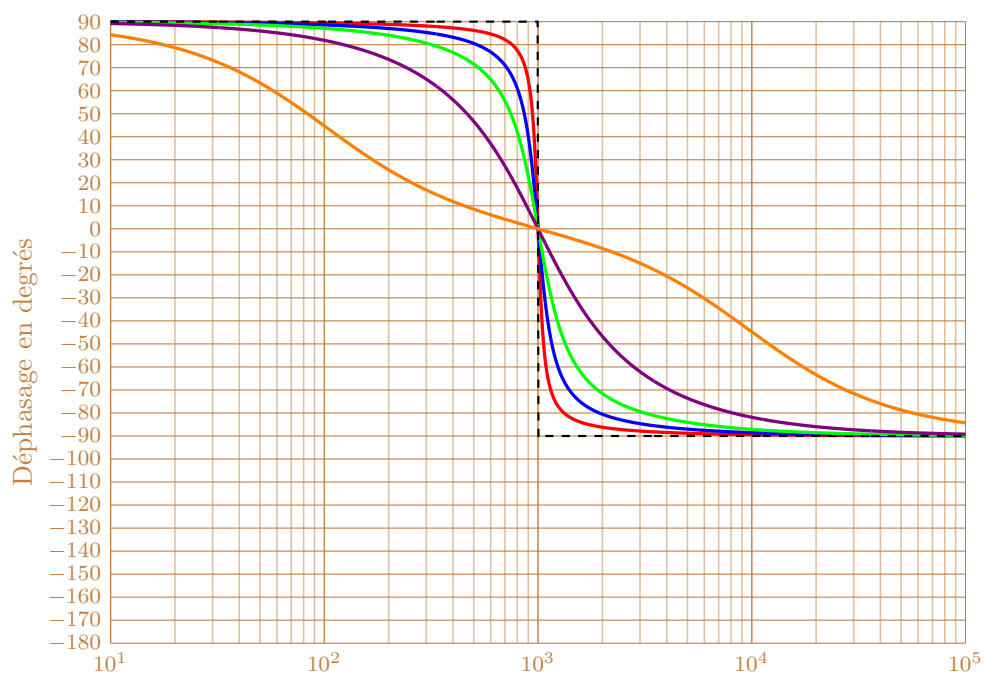
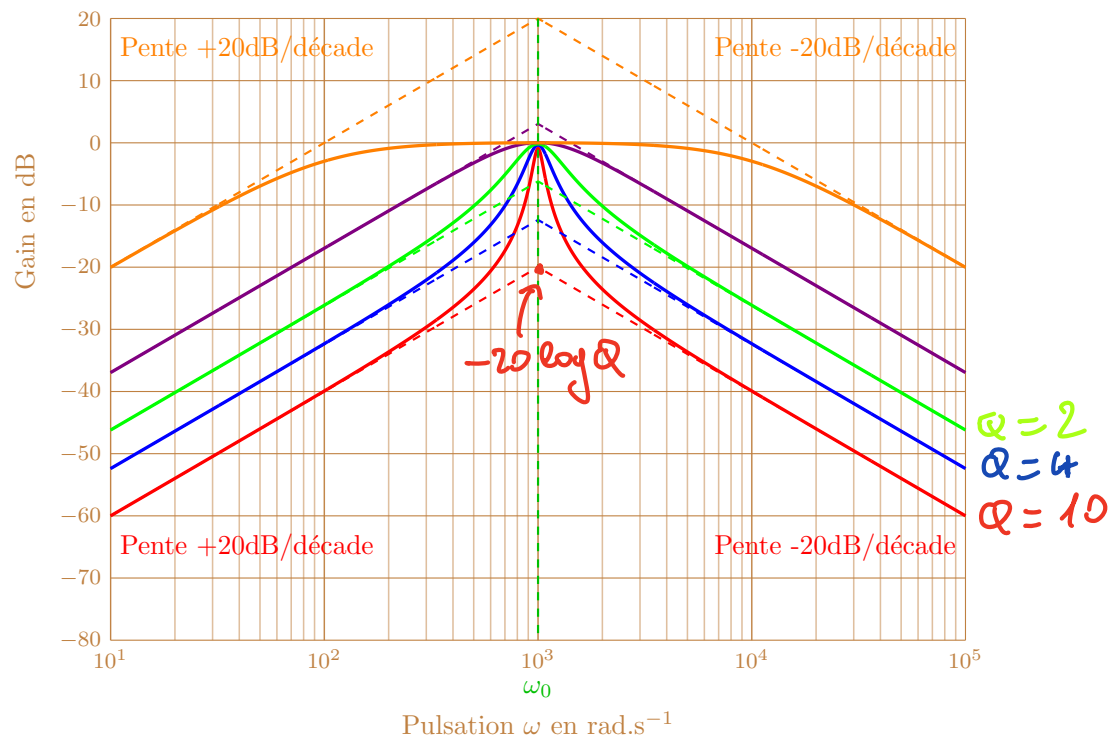


Figure 9 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-bande d'ordre 2

Étude en Basse Fréquence (BF), c'est-à-dire pour $\omega \ll \omega_0$:

$$\underline{H} \sim \frac{1}{jQ(-\omega_0/\omega)} \Rightarrow \begin{cases} G \approx G_{\text{asypBF}} = 20 \log \left(\frac{\omega}{Q\omega_0} \right) \\ \varphi \approx \varphi_{\text{asypBF}} = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \end{cases}$$

Étude à la pulsation de résonance qui vaut ici exactement $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\underline{H}(j\omega_0) = 1 \Rightarrow \begin{cases} G(\omega_0) = 0 \text{ dB} \\ \varphi(\omega_0) = 0 \text{ rad} \end{cases}$$

Étude en Haute Fréquence (HF), c'est-à-dire pour $\omega \gg \omega_0$:

$$\underline{H} \sim \frac{1}{jQ(\omega/\omega_0)} \Rightarrow \begin{cases} G \approx G_{\text{asypHF}} = -20 \log \left(\frac{Q\omega}{\omega_0} \right) \\ \varphi \approx \varphi_{\text{asypHF}} = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} \end{cases}$$

Convention pour la tracé du diagramme de Bode asymptotique (en pointillés sur la figure 9) :

Par convention, on trace les asymptotes BF sur l'intervalle $[0; \omega_0]$ et les asymptotes HF sur l'intervalle $[\omega_0; +\infty[$.

Or remarque que G_{asypBF} est une droite de pente +20 dB/décade et que G_{asypHF} est une droite de pente -20 dB/décade. Ces deux droites se coupent en

$$G_{\text{asypBF}}(\omega_0) = G_{\text{asypHF}}(\omega_0) = -20 \log(Q)$$

4 Décomposition en série de Fourier d'un signal périodique

Décomposition d'un signal périodique en série de Fourier

Soit $s(t)$ un signal T -périodique ($T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$) et continue par morceaux, alors $s(t)$ est décomposable en une constante S_0 plus une somme de fonctions sinusoïdales de fréquences respectives nf avec $n \in \mathbb{N}^*$, appelée série de Fourier :

$$s(t) = S_0 + \sum_{n \geq 1} S_n \cos(n\omega t + \varphi_n) = S_0 + \sum_{n \geq 1} S_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n) .$$

- ◇ S_0 est la valeur moyenne de $s(t)$, encore appelée **composante continue** de $s(t)$
- ◇ $S_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ est appelé **le fondamental** de $s(t)$ $f_1 = f$.
- ◇ $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est la pulsation du fondamental de $s(t)$, où T est la période du fondamental de $s(t)$ **qui est la même que celle de $s(t)$**
- ◇ $S_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ est appelé **l'harmonique de rang n** de $s(t)$

Définition du spectre d'un signal

Le **spectre** d'un signal est l'**ensemble des fréquences contenues dans le signal**

Définition du spectre en amplitude d'un signal

La représentation de l'**amplitude des harmoniques** de $s(t)$ **en fonction de la fréquence** (ou encore de la pulsation ou du rang de l'harmonique) est appelée **spectre en amplitude** de $s(t)$

Voici l'exemple d'une tension en créneau $u(t)$ de valeur moyenne non nulle telle que $S_0 \approx 2,5 \text{ V}$ sur la figure 10.

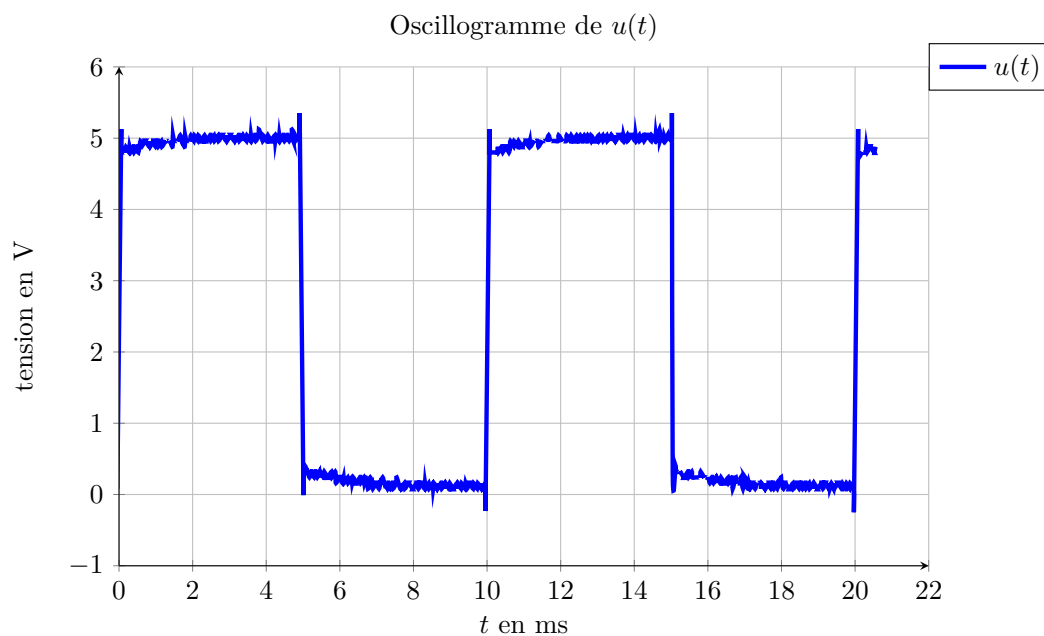


Figure 10 – Oscillogramme d'une tension en créneau enregistrée à l'oscilloscope

Voici sur la figure 11 son spectre discret en amplitude où chaque sinusoïde est représentée par une barre verticale à la fréquence correspondante et ayant pour hauteur son amplitude. On peut remarquer que seules les harmoniques de rang impair sont non nulles.

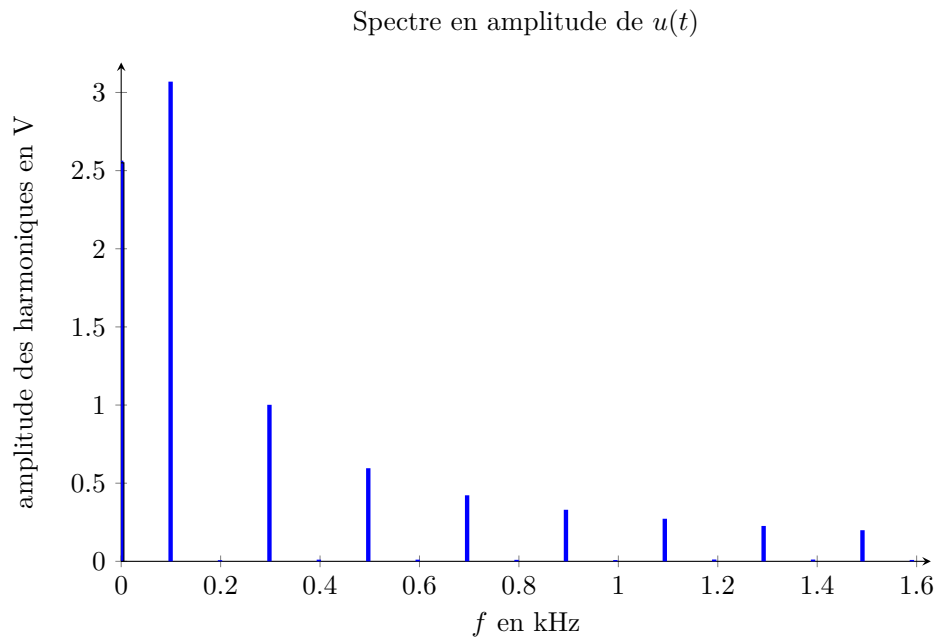
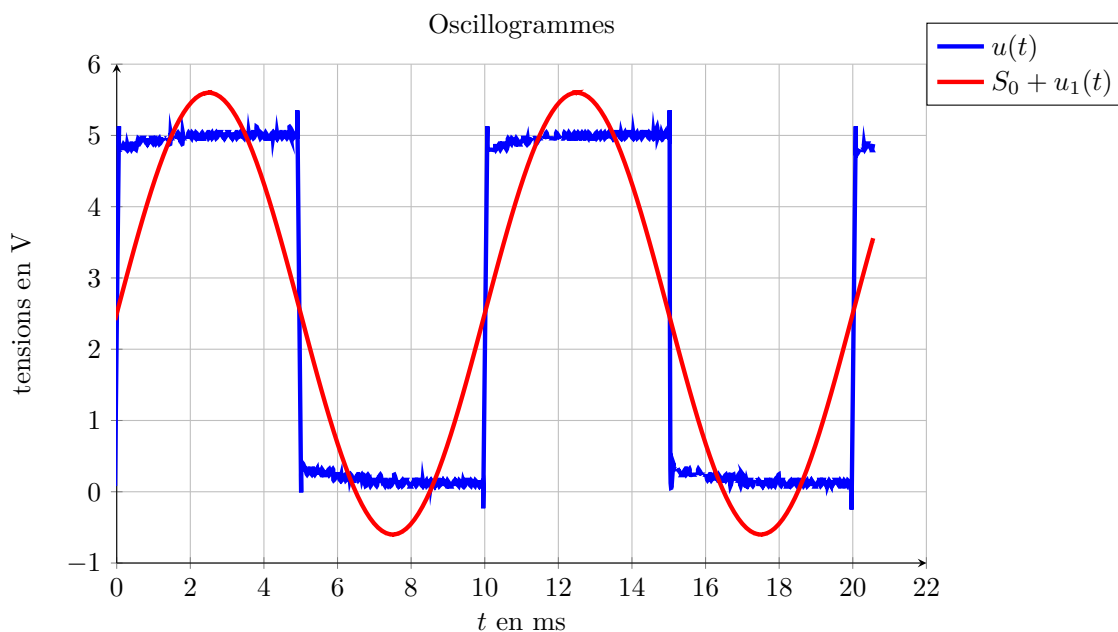


Figure 11 – Spectre de la tension en créneau enregistrée à l'oscilloscope

On peut tracer la tension $u(t)$ ainsi que la somme de son fondamental $u_1(t) = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et de sa composante continue S_0 sur un même graphique. On voit alors que $S_0 + u_1(t)$ est en quelque sorte la fonction sinusoïdale qui se rapproche le plus de $u(t)$ sur la figure 12.

Figure 12 – Tracé de la somme du fondamental et de la composante continue de $u(t)$

Pour pousser cette logique encore plus loin, travaillons avec cette animation Flash ¹ pour remarquer concernant le signal carré, que plus on ajoute des harmoniques à la fonction précédente (valeur moyenne plus fondamental), plus on se rapproche de la fonction carrée. Pour un signal triangulaire, cette analyse est encore plus flagrante, si on ne garde que le fondamental et l'harmonique 3 (premier harmonique non nul après le fondamental), on retrouve déjà quasiment le signal triangulaire.

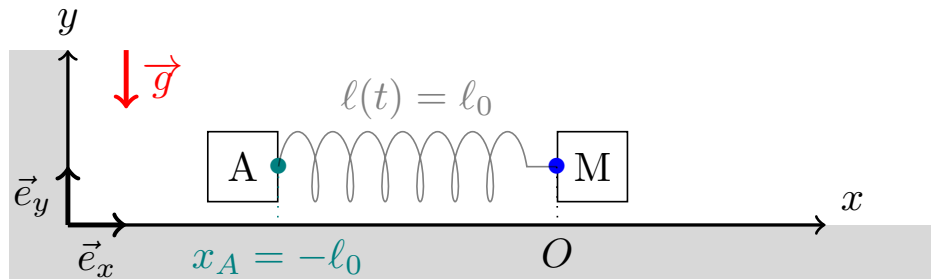
1. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Fourier/fourier1.php

5 Intérêt de la décomposition en série de Fourier

Reprenons l'équation différentielle régissant l'évolution de l'oscillateur horizontal soumis à une excitation $x_A(t)$ vu au chapitre précédent, représenté sur la figure 13.

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 e(t) \quad (11)$$

Ressort à l'équilibre en l'absence d'excitation :



Ressort en mouvement avec excitation :

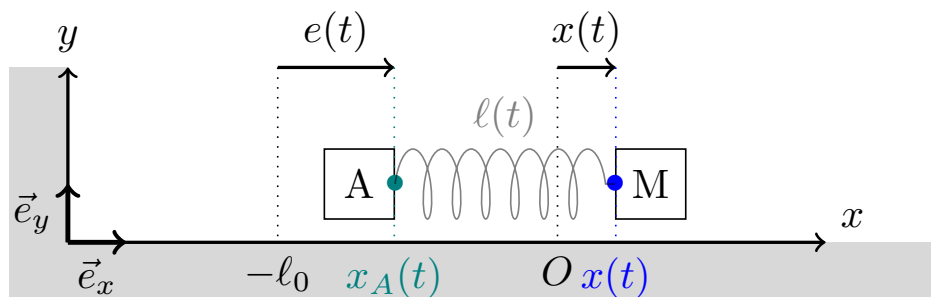


Figure 13 – Oscillateur mécanique horizontal en régime forcé

◊ Nous avons vu au chapitre précédent que si

$$e(t) = e_n(t) = C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

ayant pour représentation complexe

$$\underline{e}_n(t) = C_n e^{j(n\omega t + \varphi_n)} = \underbrace{C_n e^{j\varphi_n}}_{\underline{C}_n} e^{jn\omega t} = \underline{C}_n e^{jn\omega t}$$

alors la solution particulière de (11) est $x_n(t) = X_n \cos(n\omega t + \varphi_{x_n})$ ayant pour amplitude complexe :

$$\underline{X}_n = \underbrace{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - (n\omega)^2 + j2\alpha n\omega}}_{\underline{H}(jn\omega)} \underbrace{C_n \exp(j\varphi_n)}_{\underline{C}_n} = \underline{H}(jn\omega) \cdot \underline{C}_n$$

◇ Ainsi, si le terme de droite de l'équation différentielle est une fonction périodique

$$e(t) = C_0 + \sum_{n \geq 1} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

décomposable en série de Fourier, alors, en notation complexe, l'équation différentielle (11) devient :

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 \left(\overbrace{C_0 + \sum_{n \geq 1} \underline{C}_n e^{jn\omega t}}^{e(t)} \right) \quad (12)$$

alors, comme l'équation différentielle est linéaire, le principe de superposition nous permet d'écrire que la solution particulière de l'équation différentielle est la somme des réponses du système à chacune des composantes harmoniques de $e(t)$:

$$\underline{x}(t) = \underbrace{\underline{H}(0)}_1 C_0 + \sum_{n \geq 1} \underline{H}(jn\omega) \cdot \underline{C}_n e^{jn\omega t}$$

La réponse d'un oscillateur mécanique à une excitation périodique non sinusoïdale sera traitée en exercice.

On voit bien ici que $e(t)$ joue le rôle de signal d'entrée du système mécanique qui se comporte comme un filtre passe-bas et que $x(t)$ joue le rôle de signal de sortie, on peut alors généraliser cette propriété à n'importe quel filtre.

Propriété

Un filtre linéaire de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ soumis à un signal d'entrée périodique décomposable en série de Fourier qui s'écrit en notation complexe :

$$\underline{e}(t) = E_0 + \sum_{n \geq 1} \underline{E}_n e^{jn\omega t}$$

délivre un signal de sortie, **en régime établi**, de la forme :

$$\underline{s}(t) = \underbrace{\underline{H}(0) \cdot E_0}_{S_0} + \sum_{n \geq 1} \underbrace{\underline{H}(jn\omega) \cdot \underline{E}_n}_{\underline{S}_n} e^{jn\omega t} \quad (13)$$

Remarque

Utiliser la relation (13) pour trouver $s(t)$ revient à chercher la solution particulière de l'équation différentielle qui lie $s(t)$ et $e(t)$, **la solution $s(t)$ obtenue n'est donc valable qu'en régime périodique établi, quand la solution de l'équation homogène sans second membre qui lie $s(t)$ et $e(t)$ est nulle.**

6 Utilisation d'un filtre passe-bas d'ordre 1 en moyennneur

Considérons le filtre passe-bas d'ordre 1 vu en section 1.3 attaqué par un signal créneau $e(t)$ de période $T = \frac{1}{f}$ variant de 0 V à 1 V donc de valeur moyenne non nulle $E_0 = 0,5$ V, représenté sur la figure 14.

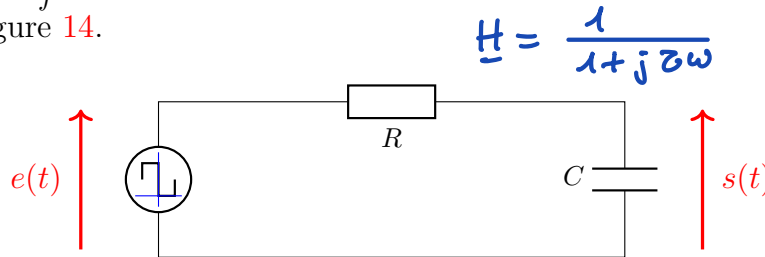


Figure 14 – Filtre (R, C) passe-bas utilisé comme moyennneur.

Le signal de sortie du filtre est :

$$\underline{s}(t) = \underbrace{\underline{H}(0) \cdot E_0}_{S_0} + \sum_{n \geq 1} \underbrace{\underline{H}(jn\omega) \cdot \underline{E}_n}_{\underline{S}_n} e^{jn\omega t}$$

$\omega \gg \frac{1}{RC}$ avec $\tau = RC \Leftrightarrow \omega\tau = \frac{\omega}{\omega_c} \gg 1 \Leftrightarrow \frac{\omega_c}{\omega} \ll 1$.
 Si $\omega \gg \omega_c$ alors $|\underline{H}(jn\omega)| \approx \frac{1}{|jn\omega|} = \frac{\omega_c}{n\omega} \ll 1 = |\underline{H}(0)|$
 $\omega\tau \gg 1$

On en déduit $|\underline{S}_n| \ll S_0$ et on a en régime établi :

$$\underline{s}(t) \approx \underbrace{\underline{H}(0)}_1 \cdot E_0 = E_0$$

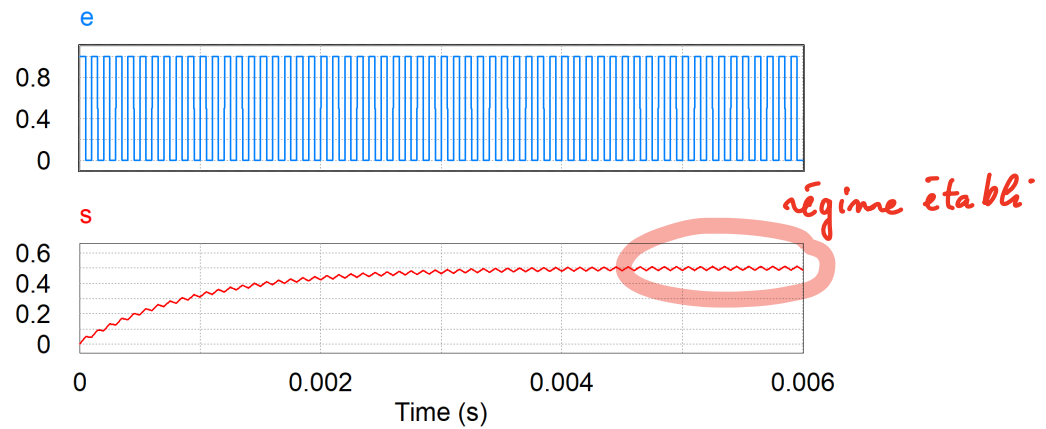
Propriété

En régime établi, un filtre linéaire passe-bas de pulsation de coupure ω_c soumis à un signal d'entrée $e(t)$ périodique de période T et de valeur moyenne non nulle E_0 , délivre en sortie la valeur moyenne du signal d'entrée si $\omega = \frac{2\pi}{T} \gg \omega_c$:

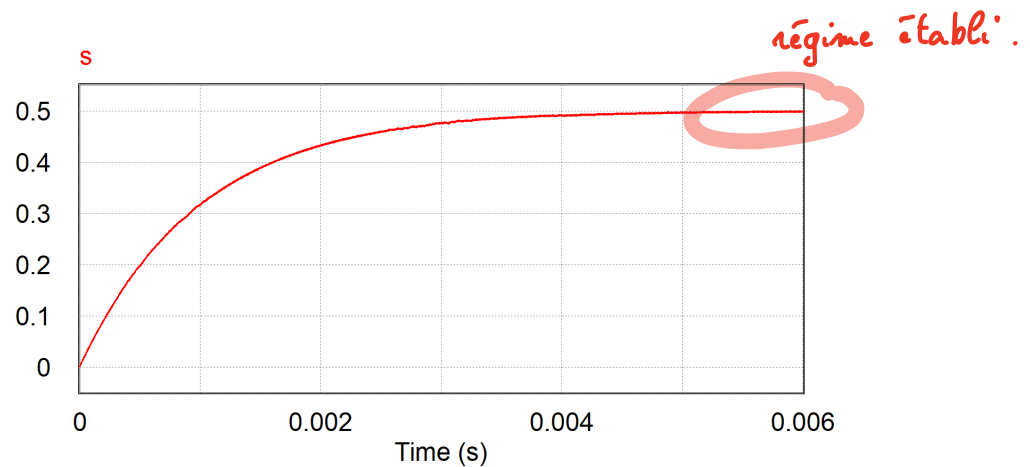
$$s(t) = E_0$$

En effet, un tel filtre élimine le fondamental et toutes les harmoniques de $e(t)$ pour ne conserver que la valeur moyenne de $e(t)$, notée E_0 .

Voici ce que l'on obtient pour $f = 100 \text{ kHz} \gg f_c$, une fois le régime transitoire passé, on observe bien, en régime établi, que la sortie du filtre délivre la valeur moyenne de $e(t)$ avec une légère ondulation due aux harmoniques sur la figure 15.

Figure 15 – Simulation PSIM du moyennneur pour $f = 100 \text{ kHz}$

Voici ce que l'on obtient sur la figure 16 pour $f = 1000 \text{ kHz} \gg f_c$, une fois le régime transitoire passé, on observe bien, en régime établi, que la sortie du filtre délivre la valeur moyenne de $e(t)$ avec une ondulation infime car les harmoniques sont 10 fois plus atténués que dans le précédent (où $f = 100 \text{ kHz}$).

Figure 16 – Simulation PSIM du moyennneur pour $f = 1000 \text{ kHz}$

7 Utilisation d'un filtre passe-bas d'ordre 1 en intégrateur

Considérons le filtre passe-bas d'ordre 1 vu en section 6 attaqué cette fois par un signal carré $e(t)$ de période $T = \frac{1}{f}$ variant de -1 V à 1 V donc de **valeur moyenne nulle** $E_0 = 0$ V, représenté sur la figure 17.

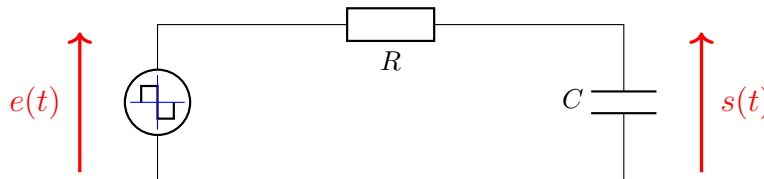


Figure 17 – Filtre (R, C) passe-bas utilisé en pseudo-intégrateur en haute fréquence.

Le signal de sortie du filtre est :

$$\underline{s}(t) = \sum_{n \geq 1} \underbrace{H(jn\omega) \cdot \underline{E}_n}_{\underline{s}_n} e^{jn\omega t}$$

Si $\omega \gg \omega_c$ alors $\underline{H}(jn\omega) \approx \frac{1}{jn\omega} = \frac{\omega_c}{jn\omega}$

On en déduit l'expression de l'harmonique n de $s(t)$, noté $\underline{s}_n(t)$ en notation complexe, en fonction de l'harmonique n de $e(t)$, noté $\underline{e}_n(t)$ en notation complexe :

$$\underline{s}_n(t) = \underline{H}(jn\omega) \underline{e}_n(t) \approx \frac{\omega_c}{jn\omega} \underline{e}_n(t)$$

$$\Rightarrow jn\omega \underline{s}_n(t) = \omega_c \underline{e}_n(t)$$

Pour les grandeurs instantanées cela correspond à :

$$\Rightarrow \frac{d\underline{s}_n}{dt} = \omega_c \underline{e}_n(t) \stackrel{(Re)}{\Rightarrow} \frac{ds_n}{dt} = \omega_c e_n(t)$$

En intégrant entre un instant t_0 donné et un instant t quelconque on obtient :

$$\int_{t_0}^t \frac{ds_n}{dt'} dt' = \omega_c \int_{t_0}^t e_n(t') dt' \Rightarrow s_n(t) = s_n(t_0) + \omega_c \int_{t_0}^t e_n(t') dt'$$

Cette propriété est vérifiée pour toutes les harmoniques, en les additionnant toutes on obtient finalement :

$$\sum_{n \geq 1} s_n(t) = \sum_{n \geq 1} s_n(t_0) + \omega_c \sum_{n \geq 1} \left(\int_{t_0}^t e_n(t') dt' \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} s_n(t) = \sum_{n \geq 1} s_n(t_0) + \omega_c \int_{t_0}^t \left(\sum_{n \geq 1} e_n(t') \right) dt'$$

$$\Rightarrow s(t) = s(t_0) + \omega_c \int_{t_0}^t e(t') dt'$$

Propriété

En régime établi, un filtre linéaire passe-bas d'ordre 1 et de pulsation de coupure ω_c soumis à un **signal d'entrée $e(t)$ périodique de période T et de valeur moyenne nulle $E_0 = 0$** , délivre en sortie l'intégrale du signal d'entrée si $\omega = \frac{2\pi}{T} \gg \omega_c$. En notant t_0 un instant donné et t un instant quelconque, on a :

$$s(t) = s(t_0) + \omega_c \int_{t_0}^t e(t') dt' \quad (14)$$

Voici ce que l'on obtient sur la figure 18 pour $f = 100 \text{ kHz} \gg f_c$, une fois le régime transitoire passé, on observe bien, en régime établi, que la sortie du filtre correspond à l'intégrale de $e(t)$:

$$\omega_c = \frac{1}{RC} = 10^3 \text{ rad.s}^{-1}. \text{ car } RC = 10^{-3} \text{ s.}$$

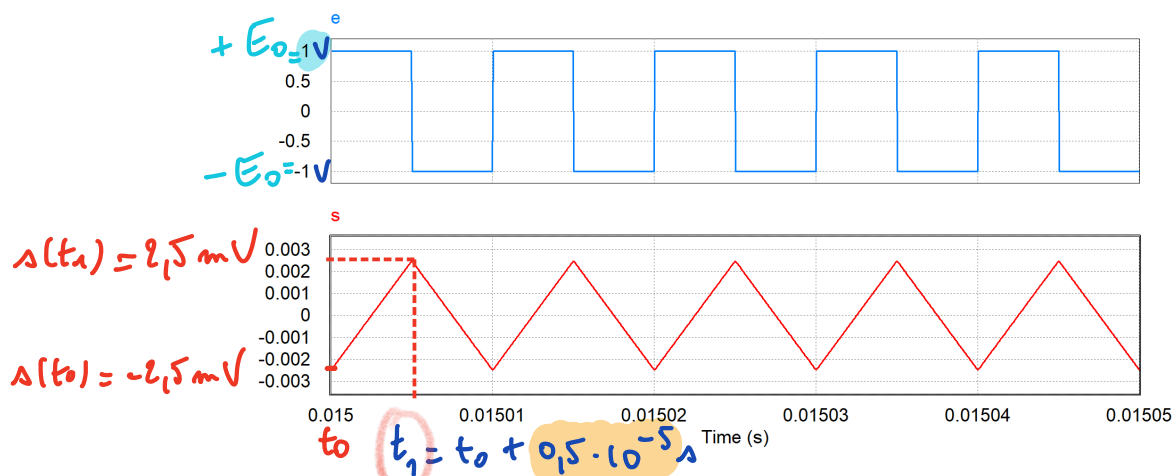


Figure 18 – Simulation PSIM du pseudo-intégrateur pour $f = 100 \text{ kHz}$

Travail à effectuer : Contrôler sur cet oscillogramme que l'équation (14) est bien vérifiée.

On vérifie que $s(t_1) = s(t_0) + \omega_c \int_{t_0}^{t_1} e(t) dt$

$$\begin{aligned}
 &= -2,5 \cdot 10^{-3} + 10^3 \times 1 \times 0,5 \cdot 10^{-5} \\
 &= -2,5 \cdot 10^{-3} + 0,5 \cdot 10^{-2} \\
 &= +2,5 \cdot 10^{-3} \text{ V.}
 \end{aligned}$$

8 Utilisation d'un filtre passe-haut d'ordre 1 en dérivateur

Considérons le filtre passe-haut d'ordre 1 vu en section 2.2 attaqué cette fois par un signal triangulaire $e(t)$ de période $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ variant de 0 V à 2 V donc de valeur moyenne non nulle $E_0 = 1$ V, représenté sur la figure 19.

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{1 + j\omega} \text{ avec } \tau = RC.$$

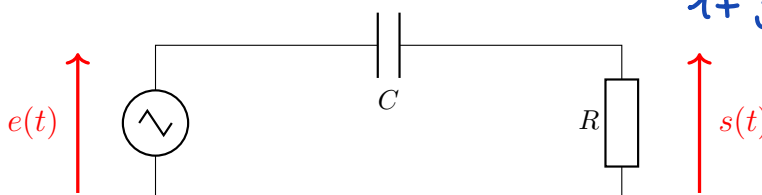


Figure 19 – Montage (C, R) passe-haut pseudo-dérivateur en basse fréquence.

Le signal de sortie du filtre est :

$$\underline{s}(t) = \underbrace{H(0)}_0 \cdot E_0 + \sum_{n \geq 1} \underbrace{H(jn\omega)}_{\underline{s}_n} \cdot \underline{E}_n e^{jn\omega t}$$

Si $n\omega \ll \omega_c$ pour tous les harmoniques de rang n non négligeables (typiquement il suffit d'additionner ses harmoniques jusqu'au rang $n = 11$ pour restituer un signal triangulaire) alors

$$\underline{H}(jn\omega) \approx \frac{jn\omega}{\omega_c} \quad \text{car } \underline{H}(jn\omega) \sim j \frac{\tau n\omega}{1}$$

On en déduit l'expression de l'harmonique n de $s(t)$, noté $\underline{s}_n(t)$ en notation complexe, en fonction de l'harmonique n de $e(t)$, noté $\underline{e}_n(t)$ en notation complexe :

$$\underline{s}_n(t) = \underline{H}(jn\omega) \underline{e}_n(t) \approx \frac{jn\omega}{\omega_c} \underline{e}_n(t)$$

Pour les grandeurs instantanées cela correspond à :

$$\Rightarrow \underline{s}_n(t) = \frac{1}{\omega_c} \frac{d\underline{e}_n(t)}{dt} \Rightarrow s_n(t) = \frac{1}{\omega_c} \frac{de_n}{dt}$$

Cette propriété est vérifiée pour toutes les harmoniques, en les additionnant toutes on obtient finalement :

$$\sum_{n \geq 1} s_n(t) = \frac{1}{\omega_c} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{de_n}{dt} \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} s_n(t) = \frac{1}{\omega_c} \frac{d(\sum_{n \geq 1} e_n)}{dt} = \frac{1}{\omega_c} \frac{d \left(E_0 + \sum_{n \geq 1} e_n \right)}{dt}$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{1}{\omega_c} \frac{d e}{dt}$$

Propriété

En régime établi, un filtre linéaire passe-haut d'ordre 1 et de pulsation de coupure ω_c soumis à un **signal d'entrée $e(t)$ périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et de valeur moyenne non nulle E_0** , délivre en sortie $\frac{1}{\omega_c} \times$ la dérivée du signal d'entrée si $\omega = \frac{2\pi}{T} \ll \omega_c$:

$$s(t) = \frac{1}{\omega_c} \frac{de}{dt} \quad (15)$$

Voici ce que l'on obtient sur la figure 20 pour $f = 1 \text{ Hz} \ll f_c$, on observe bien, en régime établi, que la sortie du filtre correspond à $\frac{1}{\omega_c} \times$ la dérivée de $e(t)$.

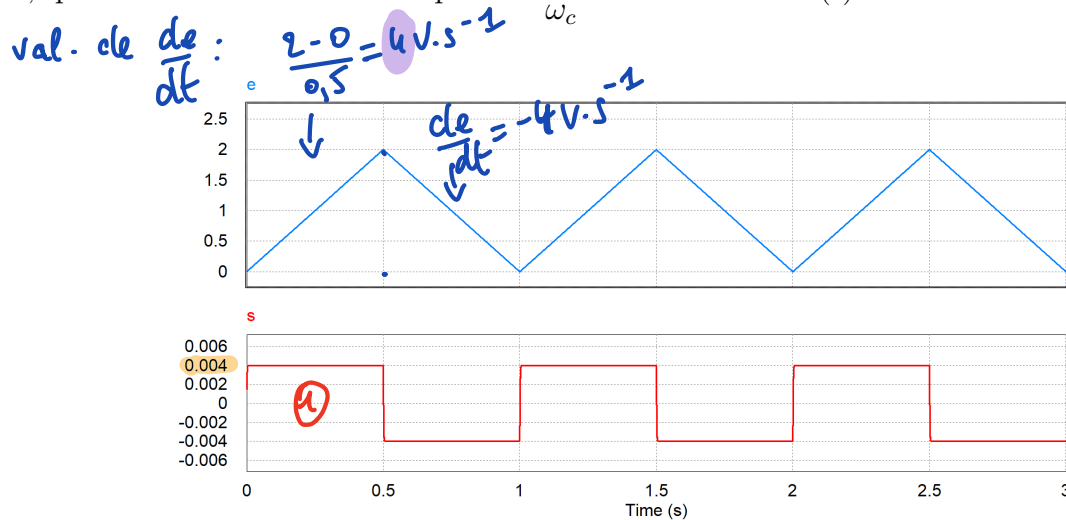


Figure 20 – Simulation PSIM du pseudo-dérivateur pour $f = 1 \text{ Hz}$

Travail à effectuer : Contrôler sur cet oscillogramme que l'équation (15) est bien vérifiée.

phase ① : $s(t) = \frac{1}{\omega_c} \times \frac{de}{dt} = \frac{1}{10^3} \cdot 4 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ V.}$