

Mathématiques – CCINP/E3A – DS₃

Les résultats doivent être justifiés et encadrés (ou soulignés).

Numérotez chaque page de votre devoir.

La calculatrice est interdite.

Exercice 1 : Les polynômes de Hermite (CCINP 2025 PC)

Présentation générale

On définit la suite des polynômes de Hermite dans $\mathbb{R}[X]$ par $H_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H_{n+1} = 2XH_n - H'_n.$$

L'objectif de ce problème est d'établir quelques propriétés de cette famille de polynômes.

Partie I - Préliminaires

Les deux sous-parties suivantes peuvent être traitées de manière indépendante.

I. 1 - Un produit scalaire sur l'espace des polynômes

Dans cette sous-partie, on introduit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Q1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, puis en déduire que cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q2. En déduire pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ que la fonction $t \mapsto R(t)e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On déduit de la question précédente que l'on peut définir l'application $\varphi : \mathbb{R}[X]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \varphi(P, Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$$

Q3. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Réponse

Q1. La fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et, par croissances comparées, $t^n e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

De plus, $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison,

$$t \mapsto t^n e^{-t^2} \text{ est intégrable sur } [0, +\infty[.$$

De même, $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $t^n e^{-t^2} \underset{t \rightarrow -\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ où, $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $-\infty$. Donc,

$$t \mapsto t^n e^{-t^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.$$

Q2. Soit $R \in \mathbb{R}[X]$. La fonction $t \mapsto R(t)e^{-t^2}$ est une combinaison linéaire de fonctions de la forme $t \mapsto t^n e^{-t^2}$, où $n \in \mathbb{N}$. Ces fonctions sont intégrables sur $\mathbb{R}$ par **Q1**.

Donc, par somme de fonctions intégrables,

$$t \mapsto R(t)e^{-t^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.$$

Q3. Soient $(P, Q, R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

► Comme PQ est polynomiale, par **Q2**, l'intégrale $\varphi(P, Q)$ converge. Donc, φ est bien définie.

► On a : $\varphi(Q, P) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt = \varphi(P, Q)$.

Donc, φ est symétrique.

► Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + Q, R) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda P(t) + Q(t))R(t)e^{-t^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda P(t)R(t)e^{-t^2} + Q(t)R(t)e^{-t^2}) dt \\ &= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)R(t)e^{-t^2} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)R(t)e^{-t^2} dt \\ &= \lambda \varphi(P, R) + \varphi(Q, R). \end{aligned}$$

Donc, φ est linéaire à gauche. Donc, φ est bilinéaire.

► On a $\varphi(P, P) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)^2 e^{-t^2} dt$, et comme, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t)^2 e^{-t^2} \geq 0$, par positivité de l'intégrale, $\varphi(P, P) \geq 0$.

► On suppose que $\varphi(P, P) = 0$.

La fonction $t \mapsto P(t)^2 e^{-t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

Par théorème, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t)^2 e^{-t^2} = 0$.

Comme $e^{-t^2} \neq 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = 0$.

Donc, P possède donc une infinité de racines. Donc, $P = 0$.

Ainsi,

φ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul de l'intégrale de Gauss

Dans cette sous-partie, on détermine la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ dont on a prouvé la convergence dans la sous-partie précédente.

On considère les fonctions $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$u(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad v(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt$$

Q4. Justifier que u est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.

Q5. Justifier que v est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.

Q6. Montrer que la fonction $x \mapsto u(x)^2 + v(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$, puis que sa valeur est $\frac{\pi}{4}$.

Q7. En déduire que la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est $\sqrt{\pi}$.

Réponse

Q4. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc, par le théorème fondamental de l'analyse, u est une primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$.

Donc,

u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = e^{-x^2}$.

Q5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$, on note $f(x, t) = \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc intégrable sur $[0, 1]$.
- Pour tout $t \in [0, 1]$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-(1+t^2)x^2}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$ est continue sur $[0, 1]$.
- Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [-a, a]$ et $t \in [0, 1]$, on a :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = 2|x|e^{-(1+t^2)x^2} \leq 2a.$$

Or, $t \mapsto 2a$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc intégrable sur $[0, 1]$.

Par théorème de dérivation sous le signe $\int$, v est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$.

Ceci est vrai pour tout $a > 0$, donc,

v est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $v'(x) = \int_0^1 (-2xe^{-(1+t^2)x^2}) dt$.

Q6. Par opération, $\varphi : x \mapsto u^2(x) + v(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = 2u'(x)u(x) + v'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt - 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2} dt.$$

On applique le changement de variable $u = tx$. On $du = x dt$. Donc,

$$x \int_0^1 e^{-(tx)^2} dt = \int_0^x e^{-u^2} du.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 0$.

Ainsi,

g est donc constante sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = g(0) = u(0)^2 + v(0) = 0 + \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\text{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Q7. Par définition, $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

De plus, pour tout $x \geq 0$:

$$0 \leq v(x) \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+t^2} dt = e^{-x^2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = e^{-x^2} \times \frac{\pi}{4}.$$

Par théorème d'encadrement, $v(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x)^2 + v(x) = \frac{\pi}{4}$, donc, en passant à la limite, $\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2 = \frac{\pi}{4}$.

Par positivité de l'intégrale, comme l'intégrande est positive, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \geq 0$, donc,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Par parité de l'intégrande,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Partie II - Quelques propriétés des polynômes de Hermite

Dans cette partie, on établit quelques propriétés sur la famille des polynômes de Hermite. On rappelle que la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie dans la présentation générale de l'exercice.

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$.

Q8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que H_n est de degré n et que son coefficient dominant est 2^n .

Q9. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ qu'on a $f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) f(x)$. On rappelle que le produit scalaire φ sur $\mathbb{R}[X]$ est défini dans la sous-partie I.1.

Q10. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq q$. Montrer pour tout entier $k \in \llbracket 0, q \rrbracket$ que :

$$\varphi(H_p, H_q) = (-1)^{q-k} \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(k)}(t) f^{(q-k)}(t) dt$$

Q11. Soit $d \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(H_0, \dots, H_d)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_d[X]$.

Q12. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, calculer la norme du polynôme H_p .

Réponse

Q8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$: « H_n est de degré n et son coefficient dominant est 2^n ».

Initialisation. Comme $H_0 = 1$, on a $\mathcal{P}_0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}_n$ et on montre $\mathcal{P}_{n+1}$.

Par opération sur les degrés, $\deg(2XH_n) = \deg(X) + \deg(H_n) = 1 + n$ et $\deg(H'_n) \leq \deg(H_n) - 1 < \deg(H_n)$.

Donc, comme $2XH_n$ et H'_n n'ont pas le même degré,

$$\deg(H_{n+1}) = \deg(2XH_n - H'_n) = \max\{\deg(2XH_n), \deg(H'_n)\} = \deg(2XH_n) = n + 1.$$

De plus, le coefficient dominant de H_{n+1} est le coefficient de X^{n+1} dans $2XH_n$.

Par hypothèse de récurrence, le coefficient dominant de H_n est 2^n , donc, le coefficient dominant de H_{n+1} vaut 2^{n+1} .

Donc, $\mathcal{P}_{n+1}$.

Q9. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$: « pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) f(x)$ ».

Initialisation. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $H_0(x) = 1$, donc, $f^{(0)}(x) = e^{-x^2} = (-1)^0 \times H_0(x) \times f(x)$.

Donc, $\mathcal{P}_0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}_n$ et on montre $\mathcal{P}_{n+1}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) f(x)$. En dérivant :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \\ &= (-1)^n \left(H'_n(x) f(x) + H_n(x) f'(x)\right) \\ &= (-1)^n \left(H'_n(x) f(x) + H_n(x) \times (-2x) e^{-x^2}\right) \\ &= (-1)^n \left(-2x H_n(x) + H'_n(x)\right) f(x) \\ &= (-1)^n \times (-H_{n+1}(x)) \times f(x) = (-1)^{n+1} H_{n+1}(x) f(x) \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{P}_{n+1}$.

Q10. Par **Q9**,

$$\varphi(H_p, H_q) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t) H_q(t) e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t) \left((-1)^q f^{(q)}(t)\right) dt.$$

On intègre par parties :

$$\begin{aligned} u(t) &= H_p(t) & u'(t) &= H'_p(t) \\ v'(t) &= (-1)^q f^{(q)}(t) & v(t) &= (-1)^q f^{(q-1)}(t) \end{aligned}$$

Par croissances comparées, $u(t)v(t) = H_p(t)(-1)^q(-1)^{q-1}H_{q-1}(t)e^{-t^2} \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0$ et les intégrales sont convergentes

(**Q2**). Donc,

$$\varphi(H_p, H_q) = 0 - \int_{-\infty}^{+\infty} H'_p(t) \times (-1)^q f^{(q-1)}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H'_p(t) \times (-1)^{q-1} f^{(q-1)}(t) dt$$

En intégrant de nouveaux pas parties, on a : pour tout $k \in \llbracket 0, q \rrbracket$:

$$\varphi(H_p, H_q) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(k)}(t) \times (-1)^{q-k} f^{(q-k)}(t) dt = (-1)^{q-k} \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(k)}(t) f^{(q-k)}(t) dt$$

Q11. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p < q$. Par **Q15**,

$$\varphi(H_p, H_q) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(q)}(t) f(t) dt.$$

Or, $p < q$ et $\deg(H_p) = p$. Donc, $H_p^{(q)}$ est le polynôme nul, donc $\varphi(H_p, H_q) = 0$.

Ainsi,

la famille $(H_0, \dots, H_d)$ est une famille orthogonale.

D'autre part, pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $\deg(H_k) = k \leq d$.

Donc, $(H_0, \dots, H_d)$ est une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{R}_d[X]$ échelonnée en degré, donc, par théorème est une famille libre de $\mathbb{R}_d[X]$.

Comme $\dim(\mathbb{R}_d[X]) = d + 1 = \text{Card}((H_0, \dots, H_d))$.

Donc, par théorème

la famille $(H_0, \dots, H_d)$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$.

Q12. Par **Q10.** :

$$\varphi(H_p, H_p) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(p)}(t) f(t) dt.$$

Or, H_p est un polynôme de degré p et de coefficient dominant égal à 2^p , donc, $H_p^{(p)} = 2^p p!$. D'où, par **Q3**,

$$\varphi(H_p, H_p) = 2^p p! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2^p p! \sqrt{\pi}.$$

Ainsi,

$$\|H_p\| = \sqrt{2^p p! \sqrt{\pi}}.$$



Exercice 2 : Calcul de distance dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (CCINP 2003 MP)

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul et on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n .

Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A^\top$ est sa matrice transposée et $\text{tr}(A)$ sa trace.

On note :

- ▶ I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- ▶ $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- ▶ $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On $(A|B) = \text{tr}(A^\top \times B)$.

Q13. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer que $(A|B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}$.

Q14. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q15. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Q16. Montrer les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.

La norme associée à ce produit scalaire (norme de Schur) est notée : $\|A\| = \sqrt{(A|A)}$.

Si Π est une partie non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la distance d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la partie Π est le réel

$$d(A, \Pi) = \inf_{M \in \Pi} \|A - M\|.$$

Q17. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \left\| \frac{1}{2}(A - A^\top) \right\|$ et déterminer de même $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

Soit la matrice $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q18. Calculer $d(\Gamma, \mathcal{A}_3(\mathbb{R}))$.

Réponse

Q13. Voir le cours.

Q14. Voir le cours.

Q15. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Analyse. On suppose qu'il existe $(S, T) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = S + T$.

En transposant on $M^\top = S^\top + T^\top = S - T$. En sommant les deux égalités, il vient $2S = M + M^\top$.

Donc, $S = \frac{1}{2} \cdot (M + M^\top)$. Puis, $T = M - S = \frac{1}{2} \cdot (M - M^\top)$.

Synthèse.

On note $S = \frac{1}{2} \cdot (M + M^\top)$ et $T = \frac{1}{2} \cdot (M - M^\top)$.

On a bien $S + T = M$.

De plus,

$$S^\top = \left(\frac{1}{2} \cdot (M + M^\top) \right)^\top = \frac{1}{2} \cdot (M^\top + (M^\top)^\top) = \frac{1}{2} \cdot (M^\top + M) = S,$$

et

$$T^\top = \left(\frac{1}{2} \cdot (M - M^\top) \right)^\top = \frac{1}{2} \cdot (M^\top - (M^\top)^\top) = \frac{1}{2} \cdot (M^\top - M) = -T.$$

Donc, $(S, T) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, par analyse-synthèse,

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

Q16. Soit $(S, T) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

On a

$$\langle S, T \rangle = \text{tr}(S^\top T) = \text{tr}(ST) \quad \text{et} \quad \langle T, S \rangle = \text{tr}(T^\top S) = -\text{tr}(TS).$$

Or, on sait que : $\text{tr}(ST) = \text{tr}(TS)$.

Donc, $\langle S, T \rangle = 0$. Ceci est vrai pour tout $(S, T) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Donc,

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

Q17. En dimension finie,

$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|A - p_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}(A)\|.$$

par **Q15**, $p_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}(A) = \frac{1}{2} \cdot (A + A^\top)$, donc,

$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \left\| \frac{1}{2} \cdot (A - A^\top) \right\|.$$

De même, comme $p_{\mathcal{A}_n(\mathbb{R})}(A) = \frac{1}{2} \cdot (A - A^\top)$,

$$d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \|A - p_{\mathcal{A}_n(\mathbb{R})}(A)\| = \left\| \frac{1}{2} \cdot (A + A^\top) \right\|.$$

Q18. On a :

$$d(\Gamma, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \left\| \frac{1}{2} \cdot (\Gamma + \Gamma^\top) \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}.$$

Ainsi,

$$d(\Gamma, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = 2\sqrt{2}.$$

★
★ ★

Exercice 3 : Intégrale de Dirichlet (CCINP 2013 PC)

Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Q19. Justifier l'existence de l'intégrale $K = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$.

Q20. Justifier que l'application $L : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-tx} dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Q21. Montrer que, pour tout réel $a > 0$, l'application L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Établir ensuite que l'application L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Q22. Montrer que les fonctions $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t}$ sont bornées sur $]0, +\infty[$.

Q23. Établir alors que les fonctions $x \mapsto |xL'(x)|$ et $x \mapsto |xL(x)|$ sont majorées sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q24. En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} L'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} L(x) = 0$.

Q25. Pour tout réel $x > 0$, exprimer $L''(x)$ sans utiliser d'intégrale.

On pourra remarquer que $\cos(t) = \operatorname{Re}(e^{it})$.

Q26. En déduire $L'(x)$ pour $x > 0$, puis $L(x)$ pour $x \geq 0$. Conclure que $K = \frac{\pi}{2}$.

Q27. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.

Calcul d'une autre intégrale

Q28. Justifier que la fonction $u \mapsto \frac{\ln(u)}{u-1}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

Q29. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, justifier l'existence et calculer $\int_0^1 u^k \ln(u) du$.

Q30. Grâce à un développement en série de $\frac{1}{1-u}$ pour $u \in]0, 1[$ et en précisant le théorème utilisé, justifier que :

$$\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1} du = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Par ailleurs, on donne sans avoir à le justifier : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Réponse

Q19. La fonction $f : t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ (quotient de fonctions continues).

De plus,

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{t^2}{2}}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Donc f est prolongeable par continuité en 0 et est donc intégrable en 0.

Comme $\cos$ est bornée, $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Or, $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, f est intégrable en $+\infty$.

Ainsi,

f est intégrable sur $]0, +\infty[$, donc, l'intégrale K converge.

Q20. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $t > 0$, on note $f(x, t) = \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt}$.

- Pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- Pour $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times]0, +\infty[$, $xt \geq 0$ donc $0 \leq e^{-xt} \leq 1$ et $|f(x, t)| \leq \frac{1 - \cos t}{t^2}$.

Or, $\varphi : t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est continue positive et intégrable sur $]0, +\infty[$.

Par théorème de continuité sous le signe $\int$,

L est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Q21. Soit $a > 0$.

- Pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, +\infty[$. De plus,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = (1 - \cos t) e^{-xt}.$$

- Pour tout $x \geq a$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$ (domination de **Q20**).
- Soit $x \geq a$. La fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$. De plus,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t}{2} \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \in \mathbb{R}.$$

Donc, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est prolongeable par continuité en 0, donc est intégrable en 0.

De plus, comme $\cos$ est bornée, et $x \geq a > 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or, $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est intégrable en $+\infty$.

Donc, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

- Pour tout $x \geq a$,

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq 2e^{-at},$$

où $t \mapsto 2e^{-at}$ est continue positive et intégrable sur $]0, +\infty[$ (intégrale de référence avec $a > 0$).

Donc, par théorème de dérivation sous le signe $\int$,

L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, +\infty[$.

Ceci est vrai pour tout $a > 0$, donc,

L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

Q22. La fonction $\psi : t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est définie sur $]0, +\infty[$.

On remarque que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = 0$, donc, par définition de limite, il existe $A > 0$ tel que, pour tout $t > A$, $|\psi(t)| \leq 1$.

Reste alors à borner ψ sur $]0, A]$. Or, ψ est prolongeable par continuité en 0 (cela a été montré dans **Q19**). On note encore ψ le prolongement obtenu.

Donc, ψ est continue sur le **segment** $[0, A]$, donc, par le théorème des bornes atteintes, ψ est bornée sur $[0, A]$: il existe $M > 0$ tel que pour tout $t \in [0, A]$, $|\psi(t)| \leq M$.

En notant $M' = \max(1, M)$ on a : pour tout $t \in [0, +\infty[$, $|\psi(t)| \leq M'$.

Donc,

ψ est bornée sur $]0, +\infty[$.

De même, la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t}$ tend vers 0 en $+\infty$ et est prolongeable par continuité en 0 (un équivalent montre que la limite en 0 est nulle). Donc, de même

$t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t}$ est bornée sur $]0, +\infty[$.

Q23. Soit $x > 0$. On a :

$$|xL'(x)| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{1 - \cos t}{t} \right| x e^{-xt} dt.$$

Or, par **Q22**, il existe $C > 0$ telle que, pour tout $t > 0$, $\left| \frac{1 - \cos t}{t} \right| \leq C$.

Donc,

$$|xL'(x)| \leq C \int_0^{+\infty} x e^{-xt} dt.$$

Or,

$$\int_0^{+\infty} x e^{-xt} dt = [-e^{-xt}]_0^{+\infty} = 1.$$

Donc,

$|xL'(x)| \leq C$ et $x \mapsto |xL'(x)|$ est majorée.

De même,

$$|xL(x)| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{1 - \cos t}{t^2} \right| x e^{-xt} dt \leq M' \int_0^{+\infty} x e^{-xt} dt \leq M'.$$

Donc,

$|xL(x)| \leq M'$ et $x \mapsto |xL(x)|$ est majorée.

Q24. Par la question précédente, pour tout $x > 0$,

$$|L(x)| \leq \frac{M'}{x} \quad \text{et} \quad |L(x)| \leq \frac{C}{x}.$$

Or, $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Donc, par théorème d'encadrement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} L'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} L(x) = 0.$$

Q25. Pour $x > 0$, par **Q21**, on a : $L''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos t) e^{-xt} dt$.

Or, $t \mapsto e^{-xt}$ est une fonction intégrable de référence. De plus, $\cos(t)e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(e^{-xt})$, donc, par théorème de comparaison $t \mapsto \cos(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

D'où,

$$L''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt - \int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-xt} dt = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-xt} dt.$$

D'autre part,

$$\int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-xt} dt = \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t} dt \right) = \operatorname{Re} \left(\left[\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} \right]_0^{+\infty} \right).$$

Or,

$$\left| \frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} \right| = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{x^2+1}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc,

$$\int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-xt} dt = \operatorname{Re} \left(\frac{-1}{-x+i} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{x+i}{x^2+1} \right) = \frac{x}{x^2+1}.$$

Donc,

$$\text{pour } x > 0, L''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

Q26. En primitivant l'expression trouvée dans la question précédente, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : pour tout $x > 0$,

$$L'(x) = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + c = c + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right).$$

Or, $\frac{x^2}{x^2+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$, donc,

$$L'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} c.$$

Par unicité de la limite et **Q24**, on a : $c = 0$.

Donc,

$$\text{pour tout } x > 0, L'(x) = \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1).$$

Une primitive de $\ln$ est $x \mapsto x \ln x - x$. De plus, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int^x \ln(t^2+1) dt &= x \ln(x^2+1) - \int^x \frac{2t^2}{t^2+1} dt \\ &= x \ln(x^2+1) - 2 \int^x \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt \\ &= x \ln(x^2+1) - 2 \int^x 1 - \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \operatorname{Arctan}(x). \end{aligned}$$

Donc, il existe une constante c' telle que, pour tout $x > 0$,

$$L(x) = x \ln x - \frac{1}{2} x \ln(x^2+1) - \operatorname{Arctan}(x) + c' = x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \operatorname{Arctan}(x) + c'.$$

Or, $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ et $\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc,

$$x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc,

$$L(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\frac{\pi}{2} + c'.$$

Par unicité de la limite et **Q4**, on a : $-\frac{\pi}{2} + c' = 0$, donc, $c' = \frac{\pi}{2}$.

Donc,

$$\text{pour tout } x > 0, L(x) = x \ln x - \frac{1}{2}x \ln(x^2 + 1) - \text{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}.$$

Par croissances comparées, $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, et donc, $L(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\pi}{2}$.

Or, par continuité de L en 0, $L(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} L(0)$.

Donc,

$$L(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Comme $L(0) = K$, on a :

$$K = \frac{\pi}{2}.$$

Q27. On intègre par parties dans K . On note :

$$\begin{aligned} u(t) &= 1 - \cos(t) & u'(t) &= \sin(t) \\ v(t) &= -\frac{1}{t} & v'(t) &= \frac{1}{t^2}. \end{aligned}$$

Par équivalent usuel et caractère bornée de $\cos$, on a :

$$u(t)v(t) = -\frac{1 - \cos(t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t}{2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad u(t)v(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

De plus, l'intégrale K converge, donc, on peut intégrer par parties et :

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt,$$

où l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Q28. La fonction $g : u \mapsto \frac{\ln(u)}{u-1}$ est continue sur $]0, 1[$.

De plus, $g(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} -\ln u$ et $-\ln$ est intégrable en 0 (intégrale de référence). Par théorème de comparaison, g est intégrable en 0.

D'autre part, $\ln(u) \underset{u \rightarrow 1}{\sim} u - 1$, donc, $g(u) \xrightarrow{u \rightarrow 1} 1$ et g est prolongeable par continuité en 1, donc intégrable en 1.

Ainsi,

$$g \text{ est intégrable sur }]0, 1[.$$

Q29. Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $u \mapsto u^k \ln u$ est continue sur $]0, 1[$. De plus, $u^k \underset{u \rightarrow 0}{\sim} O(\ln(u))$ et $\ln$ est intégrable en 0, donc par théorème de comparaison $u \mapsto u^k \ln u$ est intégrable sur $]0, 1[$.

Par intégration par parties,

$$\int_0^1 u^k \ln(u) du = \left[\frac{u^{k+1}}{k+1} \ln(u) \right]_0^1 - \frac{1}{k+1} \int_0^1 u^k du.$$

Or, par croissances comparées, $\frac{u^{k+1}}{k+1} \ln(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$, donc l'intégration par parties est justifiée et :

$$\int_0^1 u^k \ln(u) du = -\frac{1}{k+1} \int_0^1 u^k du = -\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Q30. En utilisant la série géométrique, pour $u \in]0, 1[$, $\frac{\ln(u)}{u-1} = -\sum_{k=1}^{+\infty} u^k \ln(u)$.

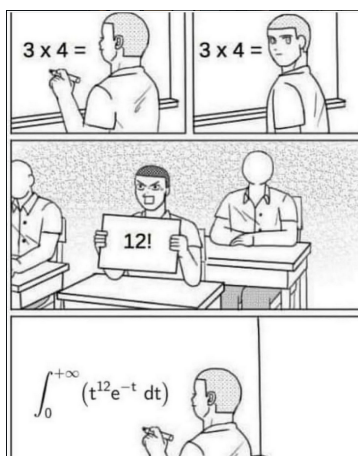
Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $g_k : u \mapsto -u^k \ln(u)$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, g_k est continue par morceaux et intégrable sur $]0, 1[$ (**Q29**).
- La série de fonctions $\sum g_k$ converge simplement sur $]0, 1[$ et sa somme $S : u \mapsto \frac{\ln u}{u-1}$ est continue par morceaux sur $]0, 1[$.
- Pour $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |g_k(u)| du = -\int_0^1 u^k \ln(u) du = \frac{1}{(k+1)^2}$. On reconnaît une série de Riemann convergente, donc, $\sum_{k \geq 0} \int_0^1 |g_k(u)| du$ converge.

Le théorème d'intégration terme à terme : $\int_0^1 S(u) du = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 g_k(u) du$ et donc

$$\int_0^1 \frac{\ln u}{u-1} du = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

★
★ ★



Exercice 4 : Calcul d'une somme de série (E4A 2022 PC)

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt.$$

Étude de la convergence de la série de terme général u_n

Q31. Vérifier que la suite $(|u_n|)$ est décroissante.

Q32. Montrer que la suite $(|u_n|)$ tend vers 0.

Q33. Prouver que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Calcul de la somme de cette série

Q34. Soit t un réel. Linéariser $\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$.

Q35. En déduire $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos(t)} dt$.

Intégration terme à terme ?

Q36. Déterminer une relation de récurrence entre $|u_{n+2}|$ et $|u_n|$.

Q37. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \geq \frac{1}{n+1}$.

Q38. Peut-on utiliser un théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions pour calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$? On justifiera rigoureusement la réponse.

Utilisation du théorème de convergence dominée

On pose, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(t) = (-1)^n \cos^n(t)$ et $V_n(t) = \sum_{k=0}^n v_k(t)$.

Q39. En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, calculer la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

Réponse

Q31. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\cos$ est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, par positivité de l'intégrale, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt \geq 0$, donc

$$|u_n| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt.$$

De plus, pour $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos(t) \in [0, 1]$ donc $\cos^{n+1}(t) \leq \cos^n(t)$.

Donc, par croissance de l'intégrale, $|u_{n+1}| \leq |u_n|$.

Ainsi,

($|u_n|$) est décroissante.

Q32. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on note $f_n(t) = \cos^n(t)$.

- pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|\cos(t)| < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = 0$.
Donc, (f_n) converge simplement sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction $f : t \mapsto 0$.
- Les fonctions f_n ($n \in \mathbb{N}$) et f sont continues par morceaux sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $|f_n(t)| \leq 1$. Or, $t \mapsto 1$ est continue positive intégrable sur l'intervalle borné $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Par théorème de convergence dominée,

$$|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt = 0.$$

Q33. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $v_n = |u_n|$ de sorte à ce que $u_n = (-1)^n v_n$.

La suite (v_n) est positive décroissante et de limite nulle, donc, par le critère des séries alternées,

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ est convergente.}$$

Q34. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on sait que $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$, donc $\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$.

En prenant $\theta = \frac{t}{2}$, on a ;

$$\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1 + \cos(t)}{2}.$$

Q35. On a :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt = \frac{1}{2} \left[2 \tan\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(0) = 1.$$

Donc,

$$I = 1.$$

Q36. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} |u_{n+2}| &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos^{n+1}(t) dt \\ &= \left[\sin(t) \cos^{n+1}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(n+1) \sin(t) \cos^n(t) \sin(t) dt. \end{aligned}$$

Or, $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$, donc, par linéarité de l'intégrale :

$$|u_{n+2}| = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n(t) - \cos^{n+2}(t)) dt = (n+1)(|u_n| - |u_{n+2}|).$$

Donc,

$$|u_{n+2}| = \frac{n+1}{n+2} |u_n|.$$

Q37. On raisonne par récurrence double. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n$: « $|u_n| \geq \frac{1}{n+1}$. »

Initialisation. $n = 0$. On a $|u_0| = \frac{\pi}{2} \geq 1$, donc, $\mathcal{H}_0$.

$n = 1$. On a $|u_1| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = 1 \geq \frac{1}{2}$, donc, $\mathcal{H}_1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$, et on montre $\mathcal{H}_{n+2}$.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$|u_{n+2}| = \frac{n+1}{n+2} \times |u_n| \geq \frac{n+1}{n+2} \times \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{n+3}.$$

Donc, on a $\mathcal{H}_{n+2}$.

Q38. Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n(t) = (-1)^n \cos^n(t)$.

Par **Q37**, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(t)| dt = |u_n| \geq \frac{1}{n+1} \geq 0.$$

Or, $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge (série harmonique), donc, par théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\sum_{n \geq 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(t)| dt \text{ diverge.}$$

Ainsi,

On ne peut pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

Q39. ► pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $V_n(t)$ est la somme partielle d'une série géométrique de raison $-\cos(t)$. Comme $|\cos(t)| < 1$, la série est convergente et :

$$V_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \cos(t)}.$$

Donc, la suite de fonctions (V_n) converge simplement sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction $V : t \mapsto \frac{1}{1 + \cos(t)}$.

► les fonctions V_n et la fonction V sont continues sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

► Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, par inégalité triangulaire, on a :

$$|V_n(t)| = \left| \sum_{k=0}^n (-\cos(t))^k \right| = \left| \frac{1 - (-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} \right| \leq \frac{2}{1 + \cos(t)}.$$

Or $t \mapsto \frac{2}{1 + \cos(t)}$ est continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Par théorème de convergence dominée,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} V_n(t) dt.$$

Or, $V_n(t)$ est une somme finie, donc par linéarité de l'intégrale,

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} v_k(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v_n(t) dt.$$

De plus, $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v_n(t) dt$. Donc,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1.$$

– Fin du sujet –