

CONCOURS BLANC décembre 2025

ECG1 Mathématiques Approfondies

Durée : 4 Heures

Le sujet comporte 4 pages.

Il est composé de 2 exercices qui peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de **tout matériel électronique est interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Un résultat préliminaire : la racine cubique

1)a) Justifier que la fonction $h : x \mapsto x^3$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Tout réel x possède donc un unique antécédent par h appelé **racine cubique** de x et noté $\sqrt[3]{x}$.

b) La fonction $k : x \mapsto x^4$ réalise-t-elle une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

2) Quelques exemples :

a) Calculer $\sqrt[3]{64}$

b) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R} : x^3 + 27 = 0$

c)i) Démontrer en utilisant la définition rappelée ci-dessus que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$

ii) Ecrire $\sqrt[3]{108}$ sous la forme $a\sqrt[3]{b}$ où a et b sont deux entiers avec $a > 1$

Résolution de quelques équations

3)a) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R} : x^3 + 3x - 4 = 0$

b) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 + 1 = 0$

(On pourra commencer par chercher une solution « évidente »)

4) On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 8$

a) Justifier que $4 < \sqrt{22} < 5$.

b) Etudier les variations de la fonction f sur $[0; 2]$.

c) Conclure que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0; 2]$. On notera β cette solution.

d) Recopier et compléter la fonction Python ci-contre afin qu'elle renvoie la valeur de $f(x)$.

```
def f(x):  
    return .....
```

e) Recopier et compléter la fonction Python ci-contre afin qu'elle renvoie une valeur approchée de β à ε près en utilisant le principe de dichotomie (c'est-à-dire en éliminant successivement la moitié de l'intervalle qui ne contient pas β).

```
def valeur_approchee(epsilon):  
    a=.....  
    b=.....  
    while ..... :  
        if f((a+b)/2) * f(a) < 0 :  
            .....  
        else :  
            .....  
    return .....
```

f) On saisit `valeur_approchee(0.00001)` dans la console. Le résultat affiché est : 1.4142112731933594
Que peut-on conjecturer quant à la valeur de β ?

g) Vérifiez que le réel que vous venez de conjecturer est bien solution de l'équation $x^3 - 4x^2 - 2x + 8 = 0$

h) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R} : x^3 - 4x^2 - 2x + 8 = 0$

Quelques résultats généraux

5) Soient a, b, c, d quatre réels avec $a \neq 0$. On considère la fonction $g : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$

a) Préciser les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) En déduire que l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ possède forcément 1, 2 ou 3 solutions.

6) On peut démontrer, et on admet ici, que : si $27q^2 + 4p^3 > 0$, alors l'équation $x^3 + px + q = 0$ possède une unique

solution égale à : $x_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}}$

En déduire, grâce à la question 3)a) que : $\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = 1$

Etude d'une suite

7) On considère une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt[3]{2u_n^2 - 1}$.

- Expliquer, en utilisant la question 3)b), quelles sont les 3 seules limites réelles possibles pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Justifier, sans calculer sa dérivée, que la fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt[3]{2x^2 - 1}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- Justifier que les intervalles $\left[1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ et $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$ sont stables pour la fonction φ .
- Montrer que : si $1 \leq u_0 \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors $u_1 \geq u_0$ et si $u_0 \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors $u_1 \leq u_0$.
- En déduire que, pour tout $u_0 > 1$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et convergente. Quelle est sa limite ?

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On simule un vote entre 2 candidats A et B de la façon suivante :

On effectue des lancers successifs d'une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur Pile est $p \in]0; 1[$ et celle de tomber sur Face est $q = 1 - p$.

Chaque lancer dont le résultat est Pile compte comme un vote pour le candidat A et chaque lancer dont le résultat est Face compte comme un vote pour le candidat B.

Le premier candidat à obtenir n votes est élu. On arrête alors les lancers.

- 1) Quel est le nombre maximal de lancers nécessaires pour que l'on ait à coup sûr un vainqueur ?

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit l'événement A_k : « la pièce tombe sur Pile au $k^{\text{ème}}$ lancer ». On suppose que les événements $(A_k)_{k \geq 1}$ sont mutuellement indépendants.

On note X_n la variable aléatoire indiquant le nombre de votes obtenus par le candidat perdant à la fin du vote.

Exemple : $n = 5$ et les lancers ont donné successivement : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Face, Face, Face.

On s'arrête alors car le candidat B a obtenu 5 voix et il est donc élu. L'événement $(X_5 = 3)$ est réalisé car le candidat A a obtenu 3 voix.

- 2) Déterminer l'ensemble $X_n(\Omega)$.
- 3) Dans cette question $n = 1$. Reconnaître la loi de la variable aléatoire X_1 et préciser son espérance et sa variance.
- 4) Dans cette question $n = 2$.
 - Pour tout $i \in X_2(\Omega)$, exprimer l'événement $(X_2 = i)$ à l'aide des événements A_1 et A_2 .
 - En déduire la loi de la variable aléatoire X_2 et donner la valeur de $E(X_2)$ et de $V(X_2)$.
 - Déterminer les probabilités que :
 - le candidat A soit élu.
 - le candidat A soit élu, sachant qu'il a obtenu le premier vote.
 - le candidat A ait obtenu le premier vote, sachant qu'il a été élu.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $n \geq 2$.

- 5) Soit $k \in X_n(\Omega)$. On définit les événements :

$T_{n,k}$ « sur les $n-1+k$ premiers lancers, on a obtenu $n-1$ Piles et k Faces »

$U_{n,k}$ « sur les $n-1+k$ premiers lancers, on a obtenu k Piles et $n-1$ Faces »

- Calculer $P(T_{n,k})$ et $P(U_{n,k})$.
- Exprimer l'événement $(X_n = k)$ à l'aide des événements $T_{n,k}$, $U_{n,k}$ et A_{n+k} .
- En déduire $P(X_n = k)$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $p = \frac{1}{2}$.

6)a) Vérifier que $\forall k \in X_n(\Omega), P(X_n = k) = \frac{1}{2^{n-1+k}} \binom{n-1+k}{k}$

b) Montrer que : $\forall k \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket, (k+1)P(X_n = k+1) = \frac{1}{2}(n+k)P(X_n = k)$

c) En déduire que $E(X_n) = n - (2n-1)P(X_n = n-1)$

7)a) Calculer le produit $\prod_{k=1}^{n-1} (2k)$ puis montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} (2k+1) = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}$

b) Déduire des questions 6) et 7)a) que $n - E(X_n) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2k}\right)$

c) Ecrire une fonction Python, nommée *esperanceX*, qui prend en entrée un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie $E(X_n)$.

8)a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$

b) En déduire que : $\forall k \geq 2, -\frac{1}{k} \geq \ln(k-1) - \ln(k)$.

c) Montrer que : $\forall n \geq 3, \prod_{k=2}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2k}\right) \leq e^{\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}} \leq \sqrt{n}$

d) En déduire un encadrement de $E(X_n)$ puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(X_n)}{n}$.

9)a) Soit $k \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket$. Exprimer $(k+1)^2 P(X_n = k+1)$ en fonction de $P(X_n = k)$, $kP(X_n = k)$ et $k^2 P(X_n = k)$.

b) Montrer que $E(X_n^2) = (2n+1)E(X_n) - n(n-1)$ (Indice : Ne pas oublier la question 6)c)...)

c) Justifier que $V(X_n) = 2n + \frac{1}{4} - \left(E(X_n) - n - \frac{1}{2}\right)^2$.

d) Ecrire une fonction Python, qui prend en entrée un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie $V(X_n)$. (Elle pourra utiliser la fonction *esperanceX* du 7)c) que l'on suppose correctement définie).