

Produit scalaire

Terminale Bac Pro · Classes ERA, TMA, ICCER (Groupement B)

Programme complémentaire — poursuite d'études Ce module fait partie du **programme complémentaire** de Terminale Bac Pro : il prépare la poursuite d'études (BTS et au-delà) et se traite dans le cadre de l'accompagnement au choix d'orientation. Il ne fait pas partie du programme évalué en CCF.

Objectifs du chapitre :

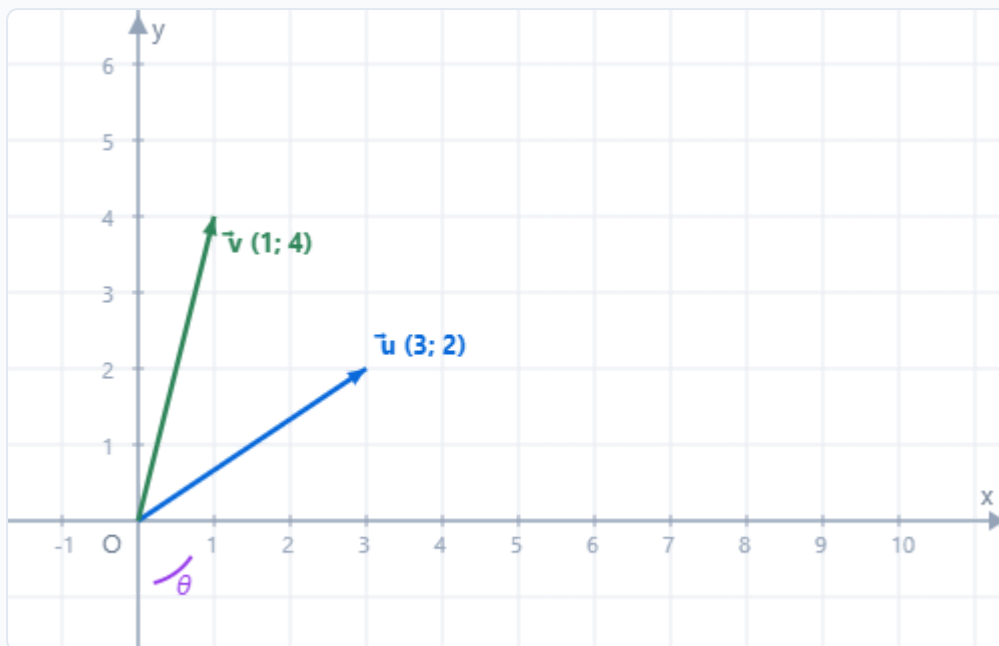
- Calculer un produit scalaire par les trois formules (norme/angle, coordonnées, développement)
- Démontrer l'orthogonalité de deux vecteurs ou de deux droites
- Calculer l'angle entre deux vecteurs (ou deux droites, deux plans)
- Écrire l'équation d'une droite à partir de son vecteur normal
- Calculer la distance d'un point à une droite
- Appliquer ces outils à des problèmes professionnels (plans de construction, réseaux, forces)

Situation professionnelle — Vérification d'équerrage et angles de construction

Une technicienne d'agencement vérifie si les rebords d'un plan de travail en L sont bien perpendiculaires, et calcule les angles de coupe des lames d'un plancher en biais. Le produit scalaire est l'outil mathématique qui permet de répondre à ces questions.

Visualisation interactive

Modifiez les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-dessous ou chargez un exemple pour voir le produit scalaire et l'angle calculés en temps réel.



$\vec{u}$: x = y =
 $\vec{v}$: x = y =

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 11.000$$

$$|\vec{u}| = 3.606 \quad | \vec{v}| = 4.123$$

$$\text{Angle } \theta = 42.3^\circ$$

1. Trois définitions du produit scalaire

1.1 Définition par les normes et l'angle

DÉFINITION

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non nuls** et θ l'angle entre eux ($0 \leq \theta \leq \pi$).

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \times |\vec{v}| \times \cos(\theta)$$

Si l'un des vecteurs est le vecteur nul, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

CAS PARTICULIERS

- Si $\theta = 0^\circ$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \times |\vec{v}|$ (vecteurs de même sens)
- Si $\theta = 90^\circ$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (vecteurs orthogonaux)
- Si $\theta = 180^\circ$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \times |\vec{v}|$ (vecteurs de sens opposé)

QUAND L'UTILISER ?

Quand on connaît les

longueurs

des deux vecteurs et

l'angle

entre eux — par exemple la composante d'une force, le travail d'une force, un angle mesuré sur un plan.

1.2 Définition par les coordonnées

DÉFINITION

Dans un repère **orthonormé**, si $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$$

QUAND L'UTILISER ?

Quand on dispose des

coordonnées

des vecteurs (plans cotés, système de coordonnées). C'est la formule la plus pratique sur plan ou en bureau d'études.

EXEMPLE

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} : \vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 1 + 2 \times 4 = 3 + 8 = \mathbf{11}$$

APPLICATION

Calcule le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pour $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1.3 Définition par développement (identité de polarisation)

DÉFINITION

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2)$$

Forme équivalente souvent utile :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2)$$

QUAND L'UTILISER ?

Quand on connaît les

normes

des vecteurs et la

norme de leur somme ou différence

, mais pas directement l'angle (géométrie plane avec longueurs de côtés connues, triangle).

2. Propriétés du produit scalaire

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

Propriété	Formule
Commutativité	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
Bilinéarité (distributivité)	$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
Homogénéité	$(k \vec{u}) \cdot \vec{v} = k (\vec{u} \cdot \vec{v})$
Carré scalaire	$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u} ^2$

IDENTITÉS REMARQUABLES

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$$

ATTENTION

Le produit scalaire **n'est pas associatif** : $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ n'a pas de sens car $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un *nombre*, pas un vecteur.

3. Orthogonalité

DÉFINITION & CARACTÉRISATION

Deux vecteurs **non nuls** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Deux droites sont **perpendiculaires** si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

MÉTHODE — VÉRIFIER L'ORTHOGONALITÉ

1. Lire ou calculer les coordonnées des vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.
2. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$.
3. Si le résultat est **zéro** : les vecteurs sont orthogonaux (droites perpendiculaires).

EXEMPLE

$\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 + (-2) \times 6 = 12 - 12 = 0$$

Conclusion : $\vec{u} \perp \vec{v}$, les droites de direction $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires.

ERA / TMA

Sur un plan de coupe, la cloison A a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la cloison B $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0 \rightarrow$ les cloisons sont bien perpendiculaires.

ICCER (GROUPEMENT B)

Deux canalisations ont pour vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 - 6 = 0 \rightarrow$ les canalisations se coupent à 90° .

APPLICATION

Les deux rebords d'un plan de travail ont pour vecteurs directeurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sont-ils perpendiculaires ?

4. Calcul d'un angle entre deux vecteurs**FORMULE**

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \times |\vec{v}|} \quad \text{puis} \quad \theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \times |\vec{v}|}\right)$$

L'angle θ obtenu est dans $[0^\circ; 180^\circ]$.

MÉTHODE PAS À PAS

1. Calculer le produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$.
2. Calculer les normes : $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $|\vec{v}| = \sqrt{c^2 + d^2}$.
3. Calculer $\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \times |\vec{v}|}$.
4. Obtenir $\theta = \arccos(\dots)$ à la calculatrice (mode DEG).
5. Vérifier la cohérence : si $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ alors $\theta < 90^\circ$; si $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ alors $\theta > 90^\circ$.

CONTEXTE MENUISERIE

Un meuble a deux arêtes représentées par les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (arête horizontale) et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (arête inclinée). Calculer l'angle entre ces deux arêtes.

Étape 1 — Produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 1 + 1 \times 3 = 4 + 3 = 7$$

Étape 2 — Normes :

$$|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} \approx 4,12$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \approx 3,16$$

Étape 3 — Cosinus :

$$\cos(\theta) = \frac{7}{\sqrt{17} \times \sqrt{10}} = \frac{7}{\sqrt{170}} \approx \frac{7}{13,04} \approx 0,537$$

Étape 4 — Angle :

$$\theta = \arccos(0,537) \approx 57,5^\circ$$

Conclusion : L'angle entre les deux arêtes du meuble est d'environ $57,5^\circ$. Ce n'est pas un angle droit — la découpe des pièces devra être faite à $57,5^\circ$ (et non à 45°).

Exemple professionnel — Angle entre deux canalisations

CONTEXTE PROFESSIONNEL

Deux canalisations d'un réseau de distribution ont pour vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer l'angle de raccordement.

Étape 1 — Produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-1) + 2 \times 4 = -3 + 8 = 5$$

Étape 2 — Normes :

$$|\vec{u}| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \approx 3,606$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17} \approx 4,123$$

Étape 3 — Cosinus :

$$\cos(\theta) = \frac{5}{\sqrt{13} \times \sqrt{17}} = \frac{5}{\sqrt{221}} \approx \frac{5}{14,87} \approx 0,336$$

Étape 4 — Angle :

$$\theta = \arccos(0,336) \approx 70,4^\circ$$

Conclusion : L'angle de raccordement entre les deux canalisations est d'environ **70,4°**.
Il faut prévoir un coude adapté (ou deux coudes de 45°) lors du montage.

APPLICATION

Un menuisier coupe une lame selon deux directions : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calcule l'angle entre les deux directions (arrondi au degré).

5. Équation d'une droite via le vecteur normal

DÉFINITION

Un **vecteur normal** à une droite d est un vecteur **perpendiculaire** à tout vecteur directeur de d .

Si $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite d , alors l'équation de d est de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

où $c \in \mathbb{R}$ est déterminé par les coordonnées d'un point connu de la droite.

LIEN VECTEUR NORMAL / VECTEUR DIRECTEUR

Si le vecteur directeur de d est $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors un vecteur normal est $\vec{n} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ (rotation de 90°).

MÉTHODE — ÉCRIRE L'ÉQUATION D'UNE DROITE

1. Identifier le vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
2. Écrire l'équation $ax + by + c = 0$.
3. Injecter les coordonnées d'un point connu $M(x_0; y_0)$ pour trouver c : $c = -ax_0 - by_0$.

EXEMPLE

Droite passant par $A(2; 3)$ de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Forme générale : $4x - y + c = 0$
- Point $A(2; 3)$: $4(2) - 3 + c = 0 \Rightarrow 8 - 3 + c = 0 \Rightarrow c = -5$
- Équation finale : $\boxed{4x - y - 5 = 0}$

6. Distance d'un point à une droite

FORMULE

La distance du point $M(x_M; y_M)$ à la droite $d : ax + by + c = 0$ est :

$$d(M, d) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ATTENTION

Ne pas oublier la **valeur absolue** au numérateur et la **racine carrée** au dénominateur. La distance est toujours **positive ou nulle**.

MÉTHODE

1. Mettre la droite sous la forme $ax + by + c = 0$.
2. Substituer les coordonnées de M dans $ax + by + c$.
3. Prendre la valeur absolue.
4. Diviser par $\sqrt{a^2 + b^2}$ (= norme du vecteur normal).

EXEMPLE

Distance du point $P(1; 5)$ à la droite $d : 3x - 4y + 2 = 0$.

$$d(P, d) = \frac{|3(1) - 4(5) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3 - 20 + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-15|}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

La distance est de **3 unités**.

7. Exemple complet ERA/TMA — Plan d'une pièce

ERA / TMA — PLAN DE CONSTRUCTION

ÉNONCÉ

On dispose du plan d'une pièce dans un repère orthonormé (en cm, 1 unité = 10 cm).

- Cloison 1 (mur porteur) : passe par $A(0; 0)$ et $B(8; 0)$ — vecteur directeur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Cloison 2 (mur latéral) : passe par $A(0; 0)$ et $C(0; 5)$ — vecteur directeur $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.
- Cloison 3 (cloison oblique) : passe par $D(3; 0)$ et $E(8; 4)$ — vecteur directeur $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Question 1 — Les cloisons 1 et 2 sont-elles perpendiculaires ?

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 \times 0 + 0 \times 5 = 0$$

Conclusion : Le produit scalaire est nul, donc les cloisons 1 et 2 sont **perpendiculaires**.

L'angle entre les deux murs est bien de 90° . ✓

Question 2 — Angle de la cloison oblique avec le mur porteur

Vecteur directeur du mur porteur (normalisé) : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, de la cloison oblique : $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 5 + 0 \times 4 = 5$

Normes : $|\vec{u}| = 1$; $|\vec{v}| = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41} \approx 6,40$

Cosinus : $\cos(\theta) = \frac{5}{1 \times \sqrt{41}} = \frac{5}{\sqrt{41}} \approx 0,781$

Angle : $\theta = \arccos(0,781) \approx 38,7^\circ$

Conclusion : La cloison oblique fait un angle d'environ $38,7^\circ$ avec le mur porteur. Cette information est indispensable pour la découpe des lames de parquet, du placo ou des carreaux en bordure.

Question 3 — Équation de la cloison oblique et distance du point $F(5; 3)$

Vecteur directeur $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Équation : $-4x + 5y + c = 0$. Point $D(3; 0)$: $-12 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 12$.

Équation de la cloison oblique : $-4x + 5y + 12 = 0$.

Distance de $F(5 ; 3)$ à la cloison :

$$d = \frac{|-4(5) + 5(3) + 12|}{\sqrt{16 + 25}} = \frac{|-20 + 15 + 12|}{\sqrt{41}} = \frac{|7|}{\sqrt{41}} \approx \frac{7}{6,40} \approx 1,09$$

Conclusion : Le point F (prise électrique envisagée) est à environ **1,09 unité $\approx$ 10,9 cm** de la cloison oblique. Vérifier que l'espace est suffisant pour le boîtier d'encastrement.

8. Exemple complet professionnel — Réseau de canalisations

ICCER (GROUPEMENT B) — DIMENSIONNEMENT DE FIXATION

ÉNONCÉ

Dans le plan d'une installation sanitaire (repère en mètres) :

- Canalisation principale (CP) : vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
- Canalisation secondaire (CS) : vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- Point de raccordement : $R(2; 1)$
- Fixation murale en $P(5; 4)$ — calculer sa distance à la canalisation principale.

Question 1 — Angle de raccordement entre CP et CS

Produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times (-1) + 2 \times 3 = -4 + 6 = 2$

Normes : $|\vec{u}| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,472$

$|\vec{v}| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \approx 3,162$

Cosinus : $\cos(\theta) = \frac{2}{2\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{2}{2\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{50}} \approx \frac{1}{7,071} \approx 0,141$

Angle : $\theta = \arccos(0,141) \approx 81,9^\circ$

Conclusion : Les deux canalisations forment un angle d'environ $81,9^\circ$. Le raccord n'est pas à 90° ; prévoir des joints souples ou un raccord coudé spécifique.

Question 2 — Composante d'une force selon CP (dimensionnement de fixation)

Une force de traction $\vec{F}$ de norme 500 N est appliquée à 30° de la direction de la canalisation principale. Calculer la composante de $\vec{F}$ selon CP.

$$F_{CP} = |\vec{F}| \times \cos(30^\circ) = 500 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 500 \times 0,866 \approx 433 \text{ N}$$

Conclusion : La composante axiale de la force vaut environ **433 N**. Avec un coefficient de sécurité de 1,5, la fixation doit être homologuée pour au moins $433 \times 1,5 \approx 650 \text{ N}$.

Question 3 — Équation de CP et distance de la fixation $P(5; 4)$

Vecteur directeur de CP : $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ vecteur normal : $\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, simplifié en $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Équation de CP : $-x + 2y + c = 0$. Point $R(2; 1)$: $-2 + 2 + c = 0 \Rightarrow c = 0$.

Équation de CP : $-x + 2y = 0$.

Distance de $P(5; 4)$ à CP :

$$d = \frac{|-5 + 2(4)|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|-5 + 8|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \approx 1,34 \text{ m}$$

Conclusion : La fixation murale est à environ **1,34 m** de la canalisation principale.
Vérifier que les colliers de fixation disponibles ont une longueur suffisante.

9. Introduction au produit scalaire dans l'espace

EXTENSION EN 3D

Dans l'espace, si $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ad + be + cf$$

La formule de l'angle reste identique :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \times |\vec{v}|} \quad \text{avec} \quad |\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Toutes les propriétés (commutativité, bilinéarité, orthogonalité) restent valables.

EXEMPLE PROFESSIONNEL — ANGLE ENTRE DEUX CONDUITES 3D

Deux conduites en espace 3D ont pour vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 2 + 2 \times (-1) + 2 \times 2 = 2 - 2 + 4 = 4$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3 \quad ; \quad |\vec{v}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\cos(\theta) = \frac{4}{3 \times 3} = \frac{4}{9} \approx 0,444 \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{4}{9}\right) \approx 63,6^\circ$$

L'angle de raccordement des deux conduites en 3D est d'environ **63,6°**.

10. Tableau récapitulatif des formules

Situation	Formule	Remarque
Norme et angle connus	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \vec{v} \cos \theta$	Angle en degrés, mode DEG
Coordonnées connues (2D)	$\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$	Le plus rapide en pratique
Normes de somme/différence	$\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} ^2 - \vec{u} ^2 - \vec{v} ^2)$	Utile en géométrie plane
Orthogonalité	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$	Vecteurs non nuls
Calcul d'angle	$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{ \vec{u} \vec{v} }\right)$	$\theta \in [0^\circ ; 180^\circ]$
Équation de droite (vect. normal $\vec{n}(a; b)$)	$ax + by + c = 0$	c trouvé par un point de la droite
Distance point-droite	$d = \frac{ ax_M + by_M + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$	Valeur absolue obligatoire
Produit scalaire 3D	$\vec{u} \cdot \vec{v} = ad + be + cf$	Extension directe du cas 2D

À retenir :

- Le produit scalaire est un **nombre** (scalaire), pas un vecteur.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$) $\leftrightarrow$ vecteurs perpendiculaires.
- Pour l'angle : toujours diviser par le **produit des normes**.
- Pour la distance point-droite : valeur absolue au numérateur, racine carrée au dénominateur.
- Le vecteur normal de la droite $ax + by + c = 0$ est $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

11. Exercices corrigés

EXERCICE 1 — ERA/TMA

Sur un plan de menuiserie, deux rebords d'un plan de travail sont modélisés par les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
2. Les rebords sont-ils perpendiculaires ?
3. Si non, calculer l'angle entre eux.

► [Voir la correction](#)

EXERCICE 2 — INSTALLATION THERMIQUE

Un collecteur de distribution a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Une dérivation part du point $A(2; 1)$ avec le vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer l'angle entre le collecteur et la dérivation.
2. Écrire l'équation de la droite portant la dérivation.
3. Calculer la distance du point $B(6; 3)$ à cette droite.

► [Voir la correction](#)

EXERCICE 3 — TMA (VECTEUR NORMAL ET DROITE)

Un plan de coupe représente une tranche de façade. La façade est portée par la droite $d : 3x - 5y + 15 = 0$.

1. Donner un vecteur normal et un vecteur directeur de d .
2. Une fenêtre est centrée en $F(5 ; 2)$. Calculer la distance de F à la façade.
3. Un tuyau d'évacuation passe par $P(0 ; 3)$ et est perpendiculaire à la façade. Écrire son équation.

► Voir la correction

EXERCICE 4 — PRODUIT SCALAIRE ET FORCES

Une fixation subit une force $\vec{F}$ de norme $|\vec{F}| = 800 \text{ N}$. Cette force forme un angle de 40° avec l'axe de la canalisation défini par le vecteur unitaire $\vec{u}$ ($|\vec{u}| = 1$).

1. Calculer le produit scalaire $\vec{F} \cdot \vec{u}$.
2. En déduire la composante de la force dans l'axe de la canalisation.
3. La fixation est homologuée pour 700 N dans l'axe. Est-elle suffisante ? (sans coefficient de sécurité)

► Voir la correction

Erreurs fréquentes



Confondre produit scalaire et produit vectoriel

Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ donne un *nombre*, pas un vecteur.

Conseil : $\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$ — résultat numérique, utilisé pour tester l'orthogonalité.



Oublier la valeur absolue dans la formule de distance

La distance d'un point à une droite est toujours positive.

Conseil : utiliser $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ — les barres sont indispensables.



Mal appliquer la formule de l'angle

$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \times |\vec{v}|}$ — on divise par le produit des normes, pas par leur somme.

Conseil : calculer les normes séparément avant d'appliquer la formule.



Conclure à la perpendicularité sans calculer le produit scalaire

Un angle visuellement droit ne suffit pas — il faut vérifier que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Conseil : toujours calculer le produit scalaire pour une démonstration rigoureuse.

Simulation interactive

[Produit scalaire](#)

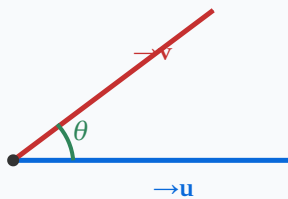
Socle

Standard

Approfondissement

Tout voir

Compétences travaillées :

Angle θ entre deux vecteurs

- Calculer le produit scalaire de deux vecteurs avec leurs coordonnées
- Calculer la norme d'un vecteur et l'angle entre deux vecteurs
- Reconnaître deux vecteurs orthogonaux
- Utiliser l'identité de polarisation
- Déterminer l'équation d'une droite à l'aide d'un vecteur normal
- Calculer la distance d'un point à une droite
- Résoudre des problèmes professionnels à l'aide du produit scalaire

EXERCICE 1 8 questions – une seule bonne réponse par question

SOCLE

Q1. Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ vaut :

- a) 11 b) 5 c) -5 d) 14

Q2. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont :

- a) colinéaires b) orthogonaux c) de même norme d) opposés

Q3. La norme du vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ vaut :

- a) 17 b) $\sqrt{17}$ c) 13 d) 169

Q4. La formule du produit scalaire avec les coordonnées est :

- a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1y_1 + x_2y_2$ b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$ c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1y_2 - x_2y_1$ d)
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 - y_1y_2$

Q5. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$, et que $\theta = 90^\circ$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v}$ vaut :

- a) 1 b) -1 c) 0 d) $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

Q6. Le vecteur normal à la droite d'équation $3x - 2y + 7 = 0$ est :

- a) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Q7. La distance du point $P(1 ; 0)$ à la droite $x + y - 3 = 0$ vaut :

- a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) 1

Q8. L'identité de polarisation s'écrit :

- a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$

Mes calculs :

EXERCICE 2 Calcul direct du produit scalaire

SOCLE

Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chaque cas :

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots$

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots$

c) $\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots$

Mes calculs :

EXERCICE 3 Norme d'un vecteur

SOCLE

Calculer la norme de chaque vecteur. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième.

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\|\vec{u}\| = \dots$

b) $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\|\vec{v}\| = \dots$

c) $\vec{w} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\|\vec{w}\| = \dots$

Mes calculs :

EXERCICE 4 Angle entre deux vecteurs

SOCLE

On donne $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
2. Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
3. En déduire l'angle θ entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 5 Calculer un produit scalaire avec les coordonnées — méthode guidée

SOCLE

Méthode :

Pour calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, on applique :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \times x_2 + y_1 \times y_2$$

On donne $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Compléter le calcul du produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \square \times \square + \square \times \square$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \square + \square = \square$$

2. Calculer $\vec{a} \cdot \vec{b}$ avec $\vec{a} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \square \times \square + (\square) \times \square$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \square + (\square) = \square$$

3. Un menuisier agenceur place deux tasseaux sur un plan. Le premier tasseau suit la direction $\vec{t}_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ et le second $\vec{t}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer $\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2$. Que peut-on en conclure ?

$\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 = \dots\dots$ Conclusion : $\dots\dots$

Mes calculs :

EXERCICE 6 Produit scalaire avec normes et angle — pas à pas

SOCLE

Formule :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs.

Deux poutres de charpente forment un angle de 60° . La première poutre mesure 4 m et la seconde 3 m. On modélise leurs directions par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ avec $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\theta = 60^\circ$.

1. Rappeler la valeur de $\cos(60^\circ)$:

QCM : a) $\cos(60^\circ) = 0$ b) $\cos(60^\circ) = 0,5$ c) $\cos(60^\circ) = 1$ d) $\cos(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Compléter le calcul du produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \square \times \square \times \square$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \square$$

3. Même question avec $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\theta = 90^\circ$.

Rappel : $\cos(90^\circ) = 0$. Si l'angle est droit, le produit scalaire est toujours nul !

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots$$

Mes calculs :

EXERCICE 7 Vérifier si deux vecteurs sont perpendiculaires — méthode guidée

SOCLE

Règle :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires (orthogonaux) si et seulement si

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Étapes :

1) Calculer le produit scalaire $\rightarrow$ 2) Regarder s'il vaut 0 $\rightarrow$ 3) Conclure.

1. $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$. Compléter :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times \square + 3 \times (\square)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \square + (\square) = \square$$

Conclusion : $\vec{u} \cdot \vec{v} \square 0$, donc les vecteurs

2. $\vec{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Les vecteurs sont-ils perpendiculaires ?

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \dots\dots$ Perpendiculaires : oui / non

3. Un charpentier vérifie l'équerrage de deux pièces de bois. La première suit la direction

$\vec{p} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et la seconde $\vec{q} \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix}$. L'assemblage est-il à angle droit ?

$\vec{p} \cdot \vec{q} = \dots\dots$ Angle droit : oui / non

Mes calculs :

EXERCICE 8 Calculer une norme — contexte professionnel guidé

SOCLE

RAPPEL

La norme d'un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

C'est la longueur du vecteur — en pratique, une distance sur plan.

Un menuisier agenceur lit sur un plan les coordonnées de plusieurs pièces de bois :

Pièce	Vecteur	Calcul $x^2 + y^2$	Longueur $\ \vec{v}\ $
Tasseau A	$\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\square + \square = \square$	$\sqrt{\square} = \square$
Montant B	$\vec{v}_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\square + \square = \square$	$\sqrt{\square} = \square$
Traverse C	$\vec{v}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\square + \square = \square$	$\sqrt{\square} = \square$
Chant D	$\vec{v}_4 \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\square + \square = \square$	$\sqrt{\square} = \square$

Mes calculs :

EXERCICE 9 Identifier le vecteur normal d'une droite — guidé

SOCLE

RÈGLE

Si la droite a pour équation $ax + by + c = 0$, alors le

vecteur normal

est $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Ce vecteur est perpendiculaire à la droite.

Donner le vecteur normal à chaque droite :

Équation de la droite	Vecteur normal $\vec{n}$
$2x + 5y - 7 = 0$	$\vec{n} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$
$-3x + y + 1 = 0$	$\vec{n} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$
$x - 4y = 0$	$\vec{n} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$
$y = 3x - 2$ (à réécrire sous la forme $ax + by + c = 0$)	$\vec{n} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$

Application : Un technicien de maintenance vérifie l'orientation d'un mur modélisé par l'équation $4x - 3y + 12 = 0$. Donner le vecteur normal à ce mur et sa norme.

$\vec{n} = \dots\dots\dots$ $\|\vec{n}\| = \dots\dots\dots$

Mes calculs :

EXERCICE 10 Distance d'un point à une droite — guidé pas à pas

SOCLE

FORMULE

La distance du point $M(x_0; y_0)$ à la droite $ax + by + c = 0$ est :

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Étapes : 1) Calculer $ax_0 + by_0 + c \rightarrow$ 2) Prendre la valeur absolue $\rightarrow$ 3) Diviser par $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemple guidé : Distance du point $P(1; 2)$ à la droite $3x + 4y - 5 = 0$.

Étape 1 : $ax_0 + by_0 + c = 3 \times 1 + 4 \times 2 + (-5) = 3 + 8 - 5 = \boxed{6}$

Étape 2 : $|6| = 6$

Étape 3 : $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Résultat : $d = \frac{6}{5} = \boxed{1,2}$ unités

À toi : Calculer la distance du point $A(3; 1)$ à la droite $5x - 12y + 3 = 0$.

Étape 1 : $5 \times \square + (-12) \times \square + 3 = \square + \square + 3 = \square$

Étape 2 : valeur absolue = $\square$

Étape 3 : $\sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{\square + \square} = \sqrt{\square} = \square$

Résultat : $d = \frac{\square}{\square}$ unités

Mes calculs :

EXERCICE 11 Orthogonalité

STANDARD

Déterminer si les vecteurs suivants sont orthogonaux :

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots$ Orthogonaux : oui / non

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots$ Orthogonaux : oui / non

c) $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$

 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots$ Orthogonaux : oui / non**Mes calculs :**

EXERCICE 12 Identité de polarisation**STANDARD**

On donne $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\|\vec{u}\|^2$, $\|\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$.

2. Vérifier l'identité de polarisation : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

3. Vérifier en calculant directement $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 13 Angle entre deux vecteurs – cas général

STANDARD

On donne les points $A(1; 2)$, $B(4; 6)$ et $C(5; 1)$.

1. Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
3. Calculer les normes $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$.
4. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ en degrés. Arrondir au degré.

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 14 Équation de droite par vecteur normal

APPROFONDISSEMENT

On donne le point $A(2; -1)$ et le vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (d) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
2. Vérifier que A appartient bien à (d) .
3. Donner un vecteur directeur de (d) .
4. Le point $B(3; -2,4)$ appartient-il à (d) ?

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 15 Distance d'un point à une droite**APPROFONDISSEMENT**

La droite (d) a pour équation $4x - 3y + 6 = 0$.

1. Calculer la distance du point $P(3; 2)$ à la droite (d) .
2. Calculer la distance du point $Q(0; 2)$ à la droite (d) .
3. Le point $R(3; 6)$ appartient-il à la droite (d) ? Justifier par le calcul de la distance.

Formule : la distance du point $M(x_0; y_0)$ à la droite $ax + by + c = 0$ est

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 16 Produit scalaire et angle — contexte installation thermique

STANDARD

Contexte : Un technicien chauffagiste installe deux conduites dans un couloir technique. La conduite A suit la direction $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et la conduite B suit la direction $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (unité : 1 dm).

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
2. Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
3. En déduire l'angle entre les deux conduites. Conclure sur leur orientation.

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 17 Équation d'une droite via le vecteur normal**STANDARD**

Un menuisier agenceur modélise la coupe d'un panneau par une droite. On donne le point $P(3; -2)$ et le vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Écrire l'équation de la droite (d) passant par P et de vecteur normal $\vec{n}$.

Rappel : $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ puis développer.

2. Vérifier que P appartient à (d) .

3. Donner un vecteur directeur de (d) .

4. Le point $Q(0; 2)$ appartient-il à (d) ?

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 18 Distance d'un point à une droite — application professionnelle

STANDARD

Contexte : Sur le plan d'un bâtiment (unité : 1 m), une canalisation suit la droite d'équation $3x - 4y + 12 = 0$. Un technicien installateur doit poser un équipement au point $M(1 ; 4)$. Calculer la distance entre l'équipement et la canalisation.

1. Identifier a, b, c dans l'équation $3x - 4y + 12 = 0$.
2. Calculer $ax_0 + by_0 + c$ pour le point $M(1 ; 4)$.
3. Calculer $\sqrt{a^2 + b^2}$.
4. En déduire la distance de M à la droite. L'équipement peut-il être posé à moins de 20 cm de la canalisation ?

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 19 Angle dans un triangle — contexte charpente**STANDARD**

Contexte : Un charpentier calcule les angles d'une ferme de toit. Le triangle de base a ses sommets en $A(0; 0)$, $B(6; 0)$ et $C(3; 4)$ (unité : 1 m).

1. Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, puis les normes $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$.
3. Calculer l'angle $\widehat{BAC}$ en degrés (arrondir au degré).
4. Vérifier que le triangle est isocèle en calculant $\|\overrightarrow{BC}\|$.

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 20 Produit scalaire par l'identité de polarisation — charpente

STANDARD

Dans un triangle ABC , on connaît les longueurs des côtés : $AB = 5$ m, $BC = 7$ m, $AC = 8$ m. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.

1. Identifier $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|$ à partir des données.

Indication : $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$, donc $\|\vec{u} - \vec{v}\| = CA = 8$.

2. Utiliser la formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$ pour calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

3. En déduire l'angle $\widehat{ABC}$ (arrondir au degré).

Réponses :

Mes calculs :

Contexte : Dans un atelier de menuiserie, deux murs sont modélisés par des droites. Le mur A passe par les points $E(1; 3)$ et $F(4; 5)$. Le mur B est perpendiculaire au mur A et passe par $G(2; 1)$.

1. Calculer le vecteur directeur $\overrightarrow{EF}$ du mur A.
2. Écrire l'équation du mur B (le vecteur directeur de A est le vecteur normal de B).
3. Calculer la distance entre le point $H(6; 0)$ et le mur B.

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 22 Angles et distances dans un réseau de distribution

STANDARD

Contexte : Un installateur de pompes à chaleur trace le réseau de liaisons entre 3 unités. Les unités sont aux positions $A(0; 0)$, $B(5; 2)$ et $C(3; 7)$ sur le plan (unité : 1 m).

1. Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer les longueurs AB , AC et BC . Arrondir au centième.
3. Calculer l'angle $\widehat{BAC}$. Arrondir au degré.
4. La droite reliant A à B a pour équation $2x - 5y = 0$. Vérifier que C n'est pas sur cette droite, puis calculer la distance de C à la droite (AB) .

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 23 Plan d'aménagement d'un magasin**APPROFONDISSEMENT**

Contexte : Un agenceur d'espace réalise le plan d'implantation d'un magasin. Sur le plan (unité : 1 m), les quatre coins de la pièce sont $A(0; 0)$, $B(10; 0)$, $C(10; 6)$ et $D(0; 6)$. Un îlot central est défini par les points $E(3; 2)$ et $F(7; 4)$.

1. Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Vérifier que les murs $[AB]$ et $[AD]$ sont perpendiculaires.
2. Calculer le vecteur $\overrightarrow{EF}$ et sa norme (longueur de la diagonale de l'îlot).
3. L'agenceur trace un couloir de circulation le long de la droite passant par E et F . Déterminer l'équation de cette droite.
4. Un point de vente $P(5; 1)$ est prévu. Calculer la distance de P au couloir de circulation. Est-ce suffisant pour le passage d'un chariot de 80 cm de large ?
5. L'agenceur place un panneau signalétique en $G(8; 5)$. Calculer l'angle $\widehat{EGF}$.

Réponses :

Mes calculs :

Contexte : Un technicien chauffagiste installe un réseau de chauffage dans un bâtiment. Sur le plan (unité : 1 m), la chaudière est en $A(0; 0)$, un radiateur est en $B(8; 0)$ et un second radiateur est en $C(8; 6)$. Une force de poussée de la pompe agit dans la direction du tuyau $[AB]$ avec une intensité de 500 N. On représente cette force par le vecteur $\vec{F} = 500 \vec{e}_{AB}$ où $\vec{e}_{AB}$ est le vecteur unitaire de $\overrightarrow{AB}$.

1. Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Vérifier que l'angle au coin B (angle $\widehat{ABC}$) est un angle droit, en utilisant le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
3. Calculer la longueur totale de tuyauterie si le technicien relie $A \rightarrow B \rightarrow C$.
4. Un tuyau diagonal relie directement A à C . Calculer sa longueur et l'angle α qu'il fait avec l'horizontale.
5. La force de la pompe est $\vec{F} \begin{pmatrix} 500 \\ 0 \end{pmatrix}$ (en newtons). Un tuyau incliné suit la direction $\overrightarrow{AC}$.
Calculer la composante de $\vec{F}$ dans la direction de $\overrightarrow{AC}$ à l'aide de la projection :
$$\text{comp} = \frac{\vec{F} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|}. \text{ Arrondir au newton.}$$

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 25 Optimisation de tracé — réseau de canalisations

APPROFONDISSEMENT

Contexte : Un plombier chauffagiste relie trois radiateurs sur un plan (unité : 1 m). Les radiateurs sont en $R_1(0; 0)$, $R_2(6; 0)$ et $R_3(3; 5)$. Il doit trouver le point $P(x; 0)$ sur le segment $[R_1R_2]$ qui minimise la distance totale $PR_1 + PR_2 + PR_3$.

1. Calculer les vecteurs $\overrightarrow{R_1R_2}$ et $\overrightarrow{R_1R_3}$.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{R_1R_2} \cdot \overrightarrow{R_1R_3}$ et l'angle $\widehat{R_2R_1R_3}$.
3. Déterminer l'équation de la droite (R_1R_3) et la distance de R_2 à cette droite.
Interpréter : quelle est la distance minimale entre R_2 et le tuyau $[R_1R_3]$?
4. Calculer la longueur du tuyau en ligne brisée $R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3$ et la longueur du tuyau direct $R_1 \rightarrow R_3$. Quelle option est la plus économique en matériel ?

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 26 Projection orthogonale et travail d'une force**APPROFONDISSEMENT**

Contexte : En physique du bâtiment, le **travail** d'une force $\vec{F}$ lors d'un déplacement $\vec{d}$ est $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$. Un technicien de maintenance déplace un équipement selon $\vec{d} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (en mètres) avec une force $\vec{F} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ (en newtons).

1. Calculer le travail $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ (en joules).
2. Calculer $\|\vec{d}\|$ et $\|\vec{F}\|$. Arrondir au centième.
3. En déduire l'angle entre la force et le déplacement. Arrondir au degré.
4. La projection de $\vec{F}$ sur $\vec{d}$ est $\text{proj} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|}$. Calculer cette projection et interpréter physiquement.
5. Si le technicien exerce la même force mais dans la direction exacte du déplacement, quel travail obtiendrait-il ? Comparer.

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 27 Géométrie du triangle — théorème de la médiane**APPROFONDISSEMENT**

On considère le triangle ABC avec $A(1; 1)$, $B(7; 1)$ et $C(4; 5)$.

1. Calculer les longueurs AB , BC , CA . Quelle est la nature du triangle ?
2. Soit M le milieu de $[BC]$. Calculer les coordonnées de M et la longueur AM (médiane).
3. La formule de la médiane est $AM^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}$. Vérifier cette formule.
Indication : utiliser le produit scalaire pour développer $AM^2 = |\overrightarrow{AM}|^2$.
4. Calculer les angles du triangle (les 3 angles en A , B , C).

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 28 Perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite

APPROFONDISSEMENT

Contexte : Sur un plan de coupe (unité : 1 cm), un artisan menuisier doit tracer la perpendiculaire depuis le point $P(5; 8)$ sur la droite $(d) : 2x + y - 10 = 0$. Le pied de la perpendiculaire H est le point de (d) le plus proche de P .

1. Vérifier que P n'appartient pas à (d) .
2. La perpendiculaire à (d) par P a pour vecteur directeur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (vecteur normal de (d)).
Écrire l'équation paramétrique de cette perpendiculaire : $x = 5 + 2t, y = 8 + t$.
3. Trouver t tel que le point $(5 + 2t; 8 + t)$ appartienne à (d) .
4. En déduire les coordonnées de H et la distance PH (vérifier avec la formule de la distance point-droite).

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 29 Produit scalaire dans l'espace — calcul de puissance électrique

APPROFONDISSEMENT

Contexte : En électricité, la puissance active d'un circuit alternatif est $P = UI \cos \varphi$ où U et I sont les valeurs efficaces et φ l'angle de déphasage. On peut l'écrire $P = \vec{U} \cdot \vec{I}$ dans un espace de phaseurs, avec $\|\vec{U}\| = U$, $\|\vec{I}\| = I$ et l'angle entre les deux phaseurs vaut φ . Un technicien CVC mesure : $U = 230 \text{ V}$, $I = 4,5 \text{ A}$ et $\varphi = 30^\circ$.

1. Calculer la puissance active $P = UI \cos \varphi$. Donner le résultat en watts, arrondir à l'unité.
2. La puissance apparente est $S = UI$. Calculer S en voltampères (VA).
3. Le facteur de puissance est $\cos \varphi = \frac{P}{S}$. Donner sa valeur et interpréter : est-ce un bon facteur de puissance ?
4. On souhaite améliorer le facteur de puissance à $\cos \varphi' = 0,95$. Avec $I' = \frac{P}{U \cos \varphi'}$, calculer la nouvelle intensité nécessaire. Comparer à $I = 4,5 \text{ A}$.

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 30 Problème d'implantation — type BTS agencement

APPROFONDISSEMENT

Contexte : Un conducteur de travaux reçoit le plan d'une boutique rectangulaire avec les coins $O(0; 0)$, $A(12; 0)$, $B(12; 8)$ et $C(0; 8)$ (unité : 1 m). Une allée centrale suit la droite $(d) : x - 2y + 4 = 0$. Un pilier de soutènement se trouve en $P(4; 6)$.

1. Vérifier que la droite (d) passe par les points $A' = (-4; 0)$ et $B' = (0; 2)$.
2. Calculer la distance du pilier P à l'allée (d) . Le pilier gêne-t-il le passage si l'allée doit avoir 2 m de large de chaque côté ?
3. Donner le vecteur normal $\vec{n}$ à (d) et écrire l'équation de la droite perpendiculaire à (d) passant par P .
4. Calculer l'angle que fait l'allée (d) avec le mur OA (de direction horizontale). Le revêtement sera posé en bandes parallèles à l'allée — quel angle de coupe faut-il régler sur la scie ?
5. Un comptoir est centré en $K(8; 4)$. Calculer la distance de K à l'allée (d) et vérifier que le comptoir ne gêne pas la circulation.

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 31 Vérification de perpendiculaire et équation de cloison

APPROFONDISSEMENT

Contexte : Un menuisier agenceur travaille sur le plan d'une pièce (unité : 1 dm). Les murs sont définis par les points $A(0; 0)$, $B(15; 0)$, $C(15; 9)$, $D(0; 9)$. Une cloison de séparation part du point $E(6; 0)$ (sur $[AB]$) vers un point F sur le mur $[CD]$, avec un angle de 90° avec $[AB]$.

1. Donner le vecteur directeur du mur $[AB]$ et le vecteur normal à ce mur.
2. Déterminer l'équation de la droite (EF) perpendiculaire à $[AB]$ passant par $E(6; 0)$.
3. Trouver les coordonnées de F , intersection de (EF) avec le mur $[CD]$ (d'équation $y = 9$).
4. Calculer la longueur de la cloison $[EF]$. L'installateur commande des rails de cloison en barres de 1,20 m ; combien de barres complètes sont nécessaires ?
5. Un poteau porteur est situé en $P(9; 5)$. Calculer sa distance à la cloison (EF) et vérifier qu'il ne se trouve pas dans l'axe de la cloison.

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 32 Angle de coupe et distance — pose de revêtement en diagonale

APPROFONDISSEMENT

Contexte : Un poseur de cuisines installe un carrelage en diagonale dans une cuisine rectangulaire. L'axe de pose des carreaux suit la droite $(d) : 3x - 4y + 12 = 0$ (unité : 1 dm). Le mur du fond est la droite $(m) : y = 0$. Une prise d'eau est en $P(5; 3)$.

1. Donner un vecteur directeur de (d) et un vecteur directeur de (m) .
2. Calculer l'angle entre la droite de pose (d) et le mur (m) . À quel angle doit-on régler la scie pour couper les carreaux le long de l'axe de pose ?
3. Calculer la distance de la prise d'eau $P(5; 3)$ à la droite de pose (d) .
4. Si les carreaux ont une largeur de 4 dm, la prise se trouve-t-elle sous un carreau ou dans un joint ? (Comparer la distance à la demi-largeur.)
5. Écrire l'équation de la droite passant par P et perpendiculaire à (d) . Interprétation : cette droite donne la direction du joint le plus proche de P .

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 33 Réseau de chauffage — angles de raccordement et longueurs

APPROFONDISSEMENT

Contexte : Un technicien chauffagiste conçoit le plan d'un réseau de distribution de chaleur dans un bâtiment industriel. Sur le plan (unité : 1 m), la chaudière est en $O(0 ; 0)$, le nœud de distribution en $N(8 ; 4)$, et deux radiateurs en $R_1(14 ; 2)$ et $R_2(10 ; 9)$.

1. Calculer les vecteurs $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{NR_1}$ et $\overrightarrow{NR_2}$.
2. Calculer les longueurs de tuyau ON , NR_1 et NR_2 . Donner la longueur totale du réseau.
3. Calculer l'angle $\widehat{R_1NR_2}$ (angle entre les deux tuyaux de sortie au nœud N). Est-ce un angle droit ?
4. L'entreprise pose une isolation autour de chaque tuyau. Le coût d'isolation est de 12 €/m. Calculer le coût total d'isolation du réseau.
5. Un robinet de réglage doit être placé sur le tuyau $[NR_2]$ à 3 m du nœud N . Calculer ses coordonnées (arrondir à deux décimales).

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 34 Identité de polarisation — application géométrique dans un triangle

APPROFONDISSEMENT

Contexte : Un architecte d'intérieur vérifie les dimensions d'un espace triangulaire ABC sur plan (unité : 1 dm). On donne $A(0; 0)$, $B(10; 0)$ et $C(4; 7)$.

1. Calculer les longueurs AB , AC et BC .
2. En utilisant l'identité de polarisation $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (\|AB\|^2 + \|AC\|^2 - \|BC\|^2)$, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ sans utiliser les coordonnées.
3. Vérifier le résultat en calculant directement $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ avec les coordonnées.
4. En déduire l'angle $\widehat{BAC}$. L'espace triangulaire présente-t-il un angle obtus en A ?
5. Calculer la hauteur issue de A dans le triangle ABC (distance de A à la droite (BC)). L'architecte souhaite placer une étagère le long de ce côté à 2 dm du mur (BC) : est-ce possible sans dépasser la hauteur ?

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 35

Projection et composante d'une force — travail en physique du bâtiment

APPROFONDISSEMENT

Contexte : Un installateur de panneaux solaires exerce une force $\vec{F}$ sur un panneau pour le faire coulisser le long d'un rail incliné. Le rail a une direction $\vec{d} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ (unité : dm). La force exercée est $\vec{F} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ (unité : N).

1. Calculer le produit scalaire $\vec{F} \cdot \vec{d}$.
2. Calculer $\|\vec{d}\|$ et $\|\vec{F}\|$. En déduire l'angle θ entre la force et le rail.
3. La composante de $\vec{F}$ dans la direction du rail est $F_{\parallel} = \|\vec{F}\| \cos \theta$. Calculer $F_{\parallel}$ (en N). C'est la part de la force qui fait réellement avancer le panneau.
4. Le technicien doit déplacer le panneau sur une longueur de $\|\vec{d}\| \approx 5,83$ dm le long du rail. Calculer le travail $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ et interpréter en joules ($1 \text{ N} \cdot \text{dm} = 0,1 \text{ J}$).
5. Si le technicien changeait la direction de sa force pour qu'elle soit exactement parallèle au rail, avec la même intensité $\|\vec{F}\|$, quel serait le nouveau travail ? Comparer.

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 36 Problème complet — implantation d'un atelier type BTS

APPROFONDISSEMENT

Contexte : Un conducteur de travaux doit implanter les machines dans un atelier rectangulaire dont les coins sont $O(0; 0)$, $A(20; 0)$, $B(20; 12)$, $C(0; 12)$ (unité : 1 dm). Une voie de chariot suit la droite $(v) : 2x - 3y + 6 = 0$. Deux machines sont en $M_1(4; 8)$ et $M_2(16; 5)$.

1. Vérifier que la voie (v) passe par les points $Q_1(0; 2)$ et $Q_2(6; 6)$.
2. Calculer la distance de chaque machine à la voie de chariot. Y a-t-il une zone de dégagement suffisante de 2 dm de part et d'autre de la voie ?
3. Calculer l'angle que fait la voie (v) avec le mur $[OA]$ (axe des abscisses).
4. Un nouveau poste de travail doit être placé sur la droite perpendiculaire à (v) passant par M_1 . Écrire l'équation de cette perpendiculaire.
5. Calculer les coordonnées du pied de la perpendiculaire depuis M_1 sur (v) (point le plus proche de M_1 sur la voie). Ce point est-il dans la zone utile de l'atelier $[0; 20] \times [0; 12]$?

Réponses :

Mes calculs :

Produit scalaire

Produit scalaire | Tle Bac Pro

Socle

Standard

Approfondissement

Tout voir



Objectifs du chapitre

cliquer pour développer



Durée : 1 heure



Calculatrice : autorisée



Barème : 20 points



Documents : non autorisés

Exercice 1 – Produit scalaire avec les coordonnées (guidé)

10 points

On donne les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. (2 pts) Compléter le calcul du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \square \times \square + \square \times (\square)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \square + (\square) = \square$$

2. (2 pts) Calculer la norme de $\vec{u}$. Compléter :

Rappel : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\square^2 + \square^2} = \sqrt{\square + \square} = \sqrt{\square} = \square$$

3. (2 pts) Calculer la norme de $\vec{v}$ (arrondir au dixième) :

4. (2 pts) En déduire l'angle θ entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Compléter :

Formule : $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$

$$\cos \theta = \frac{\boxed{}}{\boxed{} \times \boxed{}} = \frac{2}{\boxed{}} \approx \boxed{}$$

$$\theta = \arccos(\boxed{}) \approx \boxed{}^\circ$$

5. (2 pts) On donne $\vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils perpendiculaires ? Compléter :

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 3 \times \boxed{} + 4 \times (\boxed{}) = \boxed{} + (\boxed{}) = \boxed{}$$

Le produit scalaire 0, donc les vecteurs

Exercice 2 – Perpendicularité en menuiserie (guidé)

10 points

Contexte : Un menuisier agenceur réalise le plan d'un meuble d'angle. Sur le plan (unité : 1 cm), les coins du meuble sont $A(0; 0)$, $B(80; 0)$ et $C(80; 60)$. Une étagère diagonale relie A à C .

1. (2 pts) Calculer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$. Compléter :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$$

2. (2 pts) Calculer les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$, puis vérifier que l'angle en B est droit :

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \boxed{} \times \boxed{} + \boxed{} \times \boxed{} = \boxed{}$$

3. (2 pts) Calculer la longueur de l'étagère diagonale AC (en cm) :

$$AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{\boxed{}^2 + \boxed{}^2} = \sqrt{\boxed{} + \boxed{}} = \sqrt{\boxed{}} = \boxed{} \text{ cm}$$

4. (2 pts) Calculer l'angle α que fait l'étagère diagonale avec le côté $[AB]$:

Méthode : $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$

5. (2 pts) Le menuisier veut fixer une équerre à 45° depuis A . Cette équerre suit la direction $\vec{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Est-elle perpendiculaire au côté $[AB]$?

Exercice 1 – Produit scalaire, norme et angle

7 points

On donne les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. (1,5 pt) Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

2. (1,5 pt) Calculer les normes $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

3. (2 pts) En déduire la mesure de l'angle θ entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Arrondir au degré.

4. (2 pts) On donne $\vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Vérifier que $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$. Justifier par le produit scalaire.

Exercice 2 – Droites : équation cartésienne, vecteur normal et distance

7
points

1. (2 pts) La droite (d_1) passe par $A(1; 3)$ et admet $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal. Déterminer l'équation cartésienne de (d_1) .

2. (2 pts) La droite (d_2) a pour équation $3x + 4y - 12 = 0$. Donner un vecteur normal et un vecteur directeur de (d_2) . Vérifier que le point $B(0; 3)$ appartient à (d_2) .

3. (3 pts) Calculer la distance du point $P(5; 1)$ à la droite (d_2) d'équation $3x + 4y - 12 = 0$. Interpréter le résultat.

Exercice 3 – Vérification de perpendicularité (contexte agencement)

6 points

Contexte : Un agenceur d'espace réalise le plan d'aménagement d'un local commercial. Sur le plan (unité : 1 m), les coins de la pièce principale sont $A(0; 0)$, $B(7; 0)$, $C(7; 5)$ et $D(0; 5)$. Une cloison part de $E(3; 0)$ et rejoint $F(3; 4)$.

1. (1,5 pt) Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$. Vérifier par le produit scalaire que la cloison $[EF]$ est perpendiculaire au mur $[AB]$.

2. (1,5 pt) L'agenceur trace un second mur allant de $G(3; 4)$ à $H(7; 4)$. Ce mur est-il perpendiculaire à la cloison $[EF]$? Justifier par le produit scalaire.

3. (1,5 pt) L'agenceur vérifie l'équerrage par la méthode 3-4-5. Il mesure 3 m le long de $[EF]$ depuis E et 4 m le long de $[AB]$ depuis E . La diagonale devrait mesurer 5 m. Justifier mathématiquement cette méthode.

4. (1,5 pt) Déterminer l'équation de la droite support de la cloison (EF) . Le point $K(3; 6)$ est-il dans le prolongement de cette cloison ?

Exercice 1 – Angles dans une charpente

10 points

Contexte : Un charpentier conçoit une toiture à deux pans. Sur le plan en coupe (unité : 1 m), le pied gauche de la charpente est en $A(0; 0)$, le pied droit en $B(12; 0)$ et le faîtage en $C(6; 5)$. Un contreventement relie le point $D(3; 0)$ au faîtage C .

1. (2 pts) Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$. En déduire les longueurs des deux pans de toiture.

2. (2 pts) Calculer l'angle au faîtage $\widehat{ACB}$ à l'aide du produit scalaire de $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$. Arrondir au degré.

3. (2 pts) Calculer l'angle que fait le pan gauche $[AC]$ avec l'horizontale $[AB]$. Vérifier que la pente est d'environ 40° .

4. (2 pts) Calculer la longueur du contreventement $[DC]$ et l'angle que fait $[DC]$ avec l'horizontale.

5. (2 pts) Le charpentier veut savoir si le contreventement $[DC]$ est perpendiculaire au pan gauche $[AC]$. Justifier par le produit scalaire.

Exercice 2 – Projection d'une force sur un plan incliné

10 points

Contexte : Un technicien étudie la descente d'une charge sur un plan incliné. Le plan incliné fait un angle de 30° avec l'horizontale. La force de pesanteur est

$\vec{P} \begin{pmatrix} 0 \\ -800 \end{pmatrix}$ (en newtons). Le vecteur directeur du plan incliné est

$$\vec{d} \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. (2 pts) Calculer $\vec{P} \cdot \vec{d}$. Interpréter le signe du résultat.

2. (2 pts) Calculer la norme $\|\vec{d}\|$. Montrer que $\vec{d}$ est un vecteur unitaire.

3. (2 pts) En déduire la composante de $\vec{P}$ le long du plan incliné : $F_{\parallel} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|}$. Donner la valeur en newtons.

4. (2 pts) Calculer la composante normale (perpendiculaire au plan) : $F_{\perp} = \sqrt{\|\vec{P}\|^2 - F_{\parallel}^2}$.
Vérifier que $F_{\perp} = \|\vec{P}\| \times \cos 30^{\circ}$.

5. (2 pts) Le technicien ajoute un frein qui exerce une force $\vec{F}_f \begin{pmatrix} -200 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\vec{F}_f \cdot \vec{d}$ et en déduire la composante du freinage le long du plan. La charge est-elle en équilibre ?

TOTAL : 20 points