

Calcul de primitives

Exercice 1 (★). Après avoir justifié leur existence (ou éventuellement avoir déterminé pour quels $x \in \mathbb{R}$ elles étaient définies), calculer les intégrales suivantes.

- $\int_{-1}^1 (2t^2 - 3) dt$
- $\int_{-1}^x (2s + 1)^4 ds$
- $\int_0^x \frac{dt}{(2t+1)^4}$
- $\int_x^2 \sqrt{u+1} du$
- $\int_{2x}^{x^2} 2s(s^2 + 1)^3 ds$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t) \sin^5(2t) dt$
- $\int_1^{1+2x} \frac{\ln(u)}{u} du$

Résultat attendu : La justification d'existence se fait par étude de la continuité.

- $\frac{-14}{3}$
- $\frac{(2x+1)^5 + 1}{10}$ (pour $x \in \mathbb{R}$)
- $\frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{(2x+1)^3} \right)$ (pour $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$)
- $\frac{2}{3} \left(3^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{3}{2}} \right)$ (pour $x \in [-1, +\infty[$)
- $\frac{(x^4+1)^4 - (4x^2+1)^4}{4}$ (pour $x \in \mathbb{R}$)
- 0
- $\frac{(\ln(1+2x))^2}{2}$ (pour $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$)

Exercice 2 (★). Après avoir justifié leur existence (ou éventuellement avoir déterminé pour quels $x \in \mathbb{R}$ elles étaient définies), calculer les intégrales suivantes.

- $\int_{-x}^x \sin(3t) dt$
- $\int_{x^2}^1 \cos\left(\frac{s-1}{2}\right) ds$
- $\int_0^x \cos^2(t) dt$
- $\int_0^{\frac{\pi}{5}} \sin^2(5u) du$
- $\int_{-x^2}^{2x^2} e^{3t} dt$
- $\int_0^1 e^{(2i-5)t} dt$
- $\int_1^x s e^{2s^2} ds$

Résultat attendu : La justification d'existence se fait par étude de la continuité.

- 0 (pour $x \in \mathbb{R}$)
- $-2 \sin\left(\frac{x^2-1}{2}\right)$ (pour $x \in \mathbb{R}$)
- $\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$ (pour $x \in \mathbb{R}$)
- $\frac{\pi}{10}$
- $\frac{e^{6x^2} - e^{-3x^2}}{3}$ (pour $x \in \mathbb{R}$)
- $\frac{(1-e^{2i-5})(5+2i)}{29}$
- $\frac{e^{2x^2} - e^2}{4}$ (pour $x \in \mathbb{R}$)

Exercice 3 (★). Après avoir justifié leur existence (ou éventuellement avoir déterminé pour quels $x \in \mathbb{R}$ elles étaient définies), calculer les intégrales suivantes.

- $\int_3^x \frac{1}{t+2} dt$
- $\int_{-5}^x \frac{1}{t+2} dt$
- $\int_{-1}^x \frac{1}{3-2s} ds$
- $\int_{-1}^1 \frac{2u+1}{1+u+u^2} du$
- $\int_0^{3x} \tan(t) dt$
- $\int_{-1}^0 \frac{3t}{\sqrt{2t^2+1}} dt$
- $\int_{x-1}^{x+1} \frac{1}{e^s \sqrt{2e^{-s}+1}} ds$

Résultat attendu : La justification d'existence se fait par étude de la continuité.

- $\ln(x+2) - \ln(5)$ (pour $x \in]-2, +\infty[$)
- $\ln(-x-2) - \ln(3)$ (pour $x \in]-\infty, -2[$)
- $\ln\left(\sqrt{\frac{5}{3-2x}}\right)$ (pour $x \in]-\infty, \frac{3}{2}[$)
- $\ln(3)$
- $-\ln(\cos(3x))$ (pour $x \in]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$)
- $\frac{3}{2} (1 - \sqrt{3})$
- $\sqrt{2e^{-x+1}+1} - \sqrt{2e^{-x-1}+1}$ (pour $x \in \mathbb{R}$)

Exercice 4 (★). Étudier le sens de variation de la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = \int_{-2}^x \frac{u-1}{u^4+1} du$.

Résultat attendu : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{x-1}{x^4+1}$. Donc g est décroissante sur $] -\infty, 1[$ et croissante sur $]1, +\infty[$.

Exercice 5 (★). Calculer les intégrales suivantes :

- $A = \int_1^2 t \ln(t) dt$
- $B = \int_0^1 t \arctan(t) dt$

Résultat attendu : Dans les deux cas, on procède par intégration par parties.

- $A = 2 \ln(2) - \frac{3}{4}$
- $B = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

Exercice 6 (★). En procédant par intégration par parties, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

- $f_1 : t \mapsto t \sin(t)$
- $f_2 : t \mapsto t \ln(t)$
- $f_3 : t \mapsto t^2 e^{-t}$
- $f_4 : t \mapsto \arctan(t)$
- $f_5 : t \mapsto t \sin(t) \cos(2t)$

Résultat attendu :

- $\forall x \in \mathbb{R}, F_1(x) = \sin(x) - x \cos(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F_2(x) = \ln(x) \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, F_3(x) = e^{-x} (-x^2 - 2x - 2)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, F_4(x) = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, F_5(x) = \frac{x \cos(x)}{2} - \frac{x \cos(3x)}{6} + \frac{\sin(3x)}{18} - \frac{\sin(x)}{2}$

Exercice 7 (★). Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variable proposé :

$$1. M = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \sin^2(x) dx \quad (u = \sin(x)) \quad 2. L = \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{t+1}} \quad (u = \sqrt{t+1})$$

Résultat attendu :

$$1. M = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8} \quad 2. L = \frac{14}{15}\sqrt{2} - \frac{16}{15}$$

Exercice 8 (★). En utilisant des changements de variables, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

$$1. f_1 : t \mapsto \frac{2t}{1+t^4} \quad 2. f_2 : t \mapsto \frac{e^{2t}}{1+e^t} \quad 3. f_3 : t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \quad 4. f_4 : t \mapsto \frac{\sin(t) \cos(t)}{\sin^2(t)+1}$$

Résultat attendu :

$$1. \forall x \in \mathbb{R}, F_1(x) = \arctan(x^2) \quad 2. \forall x \in \mathbb{R}, F_2(x) = e^x - \ln(1+e^x) \\ 3. \forall x \in \mathbb{R}, F_3(x) = 2 \arctan(e^x) \quad 4. \forall x \in \mathbb{R}, F_4(x) = \frac{\ln(\sin^2(x)+1)}{2}$$

Exercice 9 (★). Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Si f est impaire sur $[-a, a]$, que peut-on dire de $\int_{-a}^a f(x) dx$? Prouvez-le.
2. Même question si f est paire.
3. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Si f est T -périodique sur $\mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, que peut-on dire de $\int_{a+T}^{b+T} f(t) dt$? Prouvez-le.

Résultat attendu : Des changements de variables judicieux donnent :

$$1. \int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad 2. \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(t) dt \quad 3. \int_{a+T}^{b+T} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

Exercice 10 (★★). Calculer l'intégrale $I = \int_1^4 \frac{\ln(\frac{x}{2})}{4+x^2} dx$ en posant le changement de variable $t = \frac{4}{x}$.

Résultat attendu : Le changement de variable donne $I = -I$, donc $I = 0$.

Exercice 11 (★★). En utilisant des changements de variables, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

$$1. g_1 : t \mapsto \frac{e^t - 1}{e^t + 1} \quad 2. g_2 : t \mapsto \frac{t^2}{(1-t^2)^{3/2}} \quad 3. g_3 : t \mapsto \arcsin^2(t)$$

Indication : pour g_2 , poser $t = \sin(s)$.

Résultat attendu :

$$1. \forall x \in \mathbb{R}, G_1(x) = 2 \ln(e^x + 1) - \ln(e^x) \\ 2. \forall x \in]-1, 1[, G_2(x) = \tan(\arcsin(x)) - \arcsin(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin(x) \\ 3. \forall x \in [-1, 1], G_3(x) = x \arcsin^2(x) + 2 \arcsin(x) \sqrt{1-x^2} - 2x$$

Exercice 12 (★). Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

$$1. f_1 : t \mapsto \cos(t)e^{-t} \quad 2. f_2 : t \mapsto \sin(2t)e^t \quad 3. f_3 : t \mapsto \sin^2(t)e^t$$

Résultat attendu :

$$1. \forall t \in \mathbb{R}, F_1(t) = \frac{e^{-t}}{2} (\sin(t) - \cos(t)) \quad 2. \forall t \in \mathbb{R}, F_2(t) = \frac{e^t}{5} (\sin(2t) - 2 \cos(2t)) \\ 3. \forall t \in \mathbb{R}, F_3(t) = \frac{e^t}{2} - \frac{e^t}{10} (\cos(2t) + 2 \sin(2t))$$

Exercice 13 (★). Déterminer une primitive (intervalle(s) de validité à préciser) de :

$$1. f : t \mapsto \frac{1}{2t+1} \quad 2. g : t \mapsto \frac{2t}{2t+1} \quad 3. h : t \mapsto \frac{3t+1}{2t+1}$$

Résultat attendu :

$$1. \forall t \in]-\infty, -\frac{1}{2}[\text{ ou } \forall t \in]-\frac{1}{2}, +\infty[, F(t) = \frac{\ln(|2t+1|)}{2}. \\ 2. \forall t \in]-\infty, -\frac{1}{2}[\text{ ou } \forall t \in]-\frac{1}{2}, +\infty[, G(t) = t - \frac{\ln(|2t+1|)}{2}. \\ 3. \forall t \in]-\infty, -\frac{1}{2}[\text{ ou } \forall t \in]-\frac{1}{2}, +\infty[, H(t) = \frac{3t}{2} - \frac{\ln(|4t+2|)}{4}.$$

Exercice 14 (★). Déterminer une primitive (intervalle(s) de validité à préciser) de :

1. $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t^2-2t-3}$
2. $\psi : t \mapsto \frac{1}{2t^2-3t-2}$
3. $\mu : t \mapsto \frac{1}{4t^2+4t+1}$
4. $u : t \mapsto \frac{1}{t^2-4t+5}$
5. $v : t \mapsto \frac{1}{t^2+t+1}$.

Résultat attendu :

1. $\forall t \in]-\infty, -1[$ ou $\forall t \in]-1, 3[$ ou $\forall t \in]3, +\infty[$, $\Phi(t) = \frac{\ln(|t-3|)}{4} - \frac{\ln(|t+1|)}{4}$.
2. $\forall t \in]-\infty, -\frac{1}{2}[$ ou $\forall t \in]-\frac{1}{2}, 2[$ ou $\forall t \in]2, +\infty[$, $\Psi(t) = \frac{\ln(|t-2|)}{5} - \frac{\ln(|t+\frac{1}{2}|)}{5}$.
3. $\forall t \in]-\infty, -\frac{1}{2}[$ ou $\forall t \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$, $M(t) = -\frac{1}{4t+2}$.
4. $\forall t \in \mathbb{R}$, $U(t) = \arctan(t-2)$.
5. $\forall t \in \mathbb{R}$, $V(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2(t+1)}{\sqrt{3}}\right)$.

Exercice 15 (★★). Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition les intégrales suivantes sont-elles définies, et que valent-elles ?

1. $\int_0^\pi (1-pt) \sin(pt) dt$
2. $\int_{-1}^x (t+x)^p dt$
3. $\int_0^1 \frac{e^{2s}}{e^s+1} ds$
4. $\int_{-x}^x \frac{ds}{\sqrt{1-as}}$
5. $\int_0^{e^p} \ln(1+r^2) dr$
6. $\int_1^2 \frac{dt}{t+t \ln(t)}$
7. $\int_{-a}^{2a} t \sqrt{p-t^2} dt$
8. $\int_1^x \frac{\ln(au)}{\sqrt{2u}} du$
9. $\int_0^{x^2} \frac{ds}{s^2-p^2}$
10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) e^{a \sin(t)} dt$

Résultat attendu :

1. $\frac{1-(1-p\pi) \cos(p\pi) - \sin(p\pi)}{p}$
2. $\frac{(2x)^{p+1} - (x-1)^{p+1}}{p+1}$
3. $e - 1 - \ln(e+1) + \ln(2)$
4. $-\frac{2}{a} (\sqrt{1-ax} - \sqrt{1+ax})$ (il faut $ax \in [-1, 1]$)
5. $e^p \ln(1+e^{2p}) - 2e^p + 2 \arctan(e^p)$
6. $\ln(1 + \ln(2))$
7. $\frac{(\sqrt{p-a^2})^3 - (\sqrt{p-4a^2})^3}{2}$ (il faut $p \geq 4a^2$)
8. $\ln(ax)\sqrt{x} - \ln(a) - 2\sqrt{x} + 2$ (il faut $x > 0$)
9. $\frac{1}{2p} \ln\left(\left|\frac{x^2-p}{x^2+p}\right|\right)$ (il faut $x^4 \neq p^2$)
10. $\frac{2}{a} \left(e^a - \frac{e^a}{a} + \frac{1}{a}\right)$

Exercice 16 (★★★). Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue, non identiquement nulle et vérifiant pour tous x, y réels, $f(x+y) = f(x)f(y)$. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Résultat attendu : Plusieurs approches (avec ou sans primitives) sont possibles. On peut notamment primitiver la relation de l'énoncé pour obtenir une nouvelle expression de f .

Exercice 17 (Type DS). Pour tout couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on note $I(p, q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

1. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, justifier l'existence de $I(p, q)$. Calculer $I(0, 0)$, $I(1, 0)$ et $I(1, 1)$.
2. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$, $I(p, q) = I(q, p)$.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, déterminer $I(p, 0)$.
4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$, $I(p, q+1) = \frac{q+1}{p+1} I(p+1, q)$.
5. Dédire des deux questions précédentes la valeur pour $p \in \mathbb{N}$ de $I(p, 1)$, puis celle de $I(p, 2)$.
6. Montrer par récurrence que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.
7. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. En déduire la valeur de l'intégrale $J(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(\theta) \cos^{2q+1}(\theta) d\theta$.
Indication : poser le changement de variable $t = \sin^2(\theta)$.

Résultat attendu :

1. Pour tous $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, la fonction $t \mapsto t^p(1-t)^q$ est continue sur $[0, 1]$, donc $I(p, q)$ est bien définie. On calcule $I(0, 0) = \int_0^1 1 dt = 1$, puis $I(1, 0) = \int_0^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$ et :

$$I(1, 1) = \int_0^1 t(1-t) dt = \int_0^1 t dt - \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{2} - \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

2. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. La fonction $t \mapsto 1-t$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$, on peut donc poser le changement de variable $s = 1-t$. On a alors $ds = -dt$, et :

$$I(p, q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt = \int_1^0 (1-s)^p s^q (-ds) = \int_0^1 s^q(1-s)^p ds = I(q, p).$$

3. Soit $p \in \mathbb{N}$, $I(p, 0) = \int_0^1 t^p dt = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$.
4. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Les fonctions $t \mapsto \frac{t^{p+1}}{p+1}$ et $t \mapsto (1-t)^{q+1}$ sont de classe C^1 sur $[0, 1]$, donc une intégration par parties donne : $I(p, q+1) = \int_0^1 t^p(1-t)^{q+1} dt = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} (1-t)^{q+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{p+1}}{p+1} (-1)(q+1)(1-t)^q dt$.

$$\text{On en déduit alors } I(p, q+1) = 0 + \frac{q+1}{p+1} \int_0^1 t^{p+1}(1-t)^q dt = \frac{q+1}{p+1} I(p+1, q).$$

5. Soit $p \in \mathbb{N}$. La question 4 donne $I(p, 0+1) = \frac{0+1}{p+1} I(p+1, 0)$. Or, d'après la question 3, $I(p+1, 0) = \frac{1}{p+2}$. Donc $I(p, 1) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$, la question 4 donne $I(p, 1+1) = \frac{1+1}{p+1} I(p+1, 1)$. Appliquer le résultat précédent (valable pour tout entier) en $p+1$ donne $I(p+1, 1) = \frac{1}{(p+2)(p+3)}$. Donc $I(p, 2) = \frac{2}{(p+1)(p+2)(p+3)}$.

6. Soit $q \in \mathbb{N}$, on pose $P(q) : \ll \forall p \in \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!} \gg$.
— $\forall p \in \mathbb{N}$, $I(p, 0) = \frac{1}{p+1} = \frac{p!}{(p+1)!} = \frac{p!0!}{(p+0+1)!}$, donc $P(0)$ est vraie.
— Soit $q \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(q)$ est vraie. Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la question 4 et $P(q)$,

$$I(p, q+1) = \frac{q+1}{p+1} I(p+1, q) = \frac{q+1}{p+1} \frac{(p+1)!q!}{(p+q+2)!} = \frac{p!(q+1)!}{(p+q+2)!}.$$

Donc $P(q+1)$ est vraie.

Donc pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

7. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. La fonction $\theta \mapsto \sin^2(\theta)$ est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc on peut poser le changement de variable $t = \sin^2(\theta)$. On a alors $dt = 2 \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta$. Préparons son application :

$$J(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(\theta))^p (\cos^2(\theta))^q \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(\theta))^p (1 - \sin^2(\theta))^q (2 \sin(\theta) \cos(\theta)) d\theta$$

Le changement de variable et les questions précédentes donnent alors :

$$J(p, q) = \frac{1}{2} \int_0^1 t^p(1-t)^q dt = \frac{1}{2} I(p, q) = \frac{1}{2} \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$