

M6 : Forces centrales conservatives

Table des matières

1	Force centrale conservative	2
1.1	Définition d'une force centrale conservative et énergie potentielle associée	2
1.2	Exemples usuels de forces centrales conservatives	3
1.2.1	Interaction gravitationnelle (rappel)	3
1.2.2	Interaction coulombienne (rappel)	4
1.2.3	Forces newtoniennes	4
1.2.4	Force harmonique centrale de rappel élastique	5
1.3	Quelques observations : mécanique céleste et lois de Kepler	5
1.3.1	Quelques ordres de grandeur pour le système solaire	6
2	Généralités sur les forces centrales conservatives	6
2.1	Conséquence du caractère central de la force	6
2.1.1	Conservation du moment cinétique	6
2.1.2	Planéité de la trajectoire	7
2.1.3	Choix de coordonnées polaires	7
2.1.4	Loi des aires	8
2.2	Conséquence du caractère conservatif de la force	9
2.2.1	Conservation de l'énergie mécanique	9
2.2.2	Énergie potentielle effective	9
3	Cas particulier : attraction gravitationnelle	10
3.1	Position du problème	10
3.2	Étude qualitative via le potentiel effectif	10
3.2.1	Détermination de r_0 et de $E_{\min}$	10
3.2.2	Mise sous forme adimensionnée	12
3.2.3	Lecture des mouvements possibles	12
3.3	Détermination numérique de la trajectoire	13
3.3.1	Adimensionnement : obtention des équations en $r^*(t^*)$ et $\theta(t^*)$	13
3.3.2	Conditions initiales	15
3.3.3	Tracé et analyse en fonction de l'énergie mécanique	16
4	Étude directe de la trajectoire circulaire	17
4.1	Position du problème	17
4.2	Étude par le principe fondamental de la dynamique	17
4.2.1	Vitesse sur l'orbite circulaire	17
4.2.2	Énergies sur une orbite circulaire	18
4.2.3	Troisième loi de Kepler (loi des périodes)	18
5	Application : satellites terrestres	19
5.1	Différents types d'orbites	19
5.2	Cas des satellites géostationnaires	19
5.2.1	Caractéristiques générales	19
5.2.2	Plan orbital équatorial	19
5.2.3	Vitesse angulaire imposée	20
5.2.4	Orbite circulaire	21
5.2.5	Durée de révolution : jour sidéral	21

5.2.6	Rayon et altitude de l'orbite GEO	21
5.3	Vitesses cosmiques	22
5.3.1	Vitesse minimale de mise en orbite	22
5.3.2	Vitesse de libération	22
6	Méthodologie : ellipse et équation polaire	23

Objectif du chapitre

On s'intéresse au mouvement d'un point matériel soumis à une *force centrale et conservative*, avec un accent particulier sur les forces *newtoniennes* en $1/r^2$. Ces champs sont omniprésents : ils gouvernent la mécanique céleste (planètes, satellites) et interviennent aussi dans l'interaction entre particules chargées.

1 Force centrale conservative

1.1 Définition d'une force centrale conservative et énergie potentielle associée

On considère un point matériel $M(m)$ dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, et un point fixe O . On note $\overrightarrow{OM}$ le vecteur position, $\vec{v}$ la vitesse, $\vec{p} = m\vec{v}$ la quantité de mouvement, $\vec{a}$ l'accélération et $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ le moment cinétique par rapport à O . On suppose que M est soumis à une force centrale $\vec{f}$ de centre O .

Force centrale

Une force appliquée en M est dite *centrale* de centre O si sa droite d'action passe en permanence par O .

Ainsi $\vec{f}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ et on adopte naturellement des coordonnées sphériques (ou polaires dans le plan du mouvement) d'origine O . En posant $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$, une force centrale est par définition portée par le vecteur $\vec{u}_r$, de plus les forces centrales que nous étudierons ne dépendent que de la distance $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ mais pas des autres coordonnées, ainsi :

$$\vec{f} = f_r(r) \vec{u}_r$$

Une force conservative dérive d'une énergie potentielle E_p vérifiant

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$$

Ici, comme $\vec{f}$ est portée par $\vec{u}_r$, l'énergie potentielle ne dépend que de r : $E_p = E_p(r)$. La projection radiale de la relation précédente donne alors

$$f_r(r) = -\frac{dE_p}{dr}$$

Force centrale conservative en coordonnées sphériques ou polaires dans le plan du mouvement

Si une force centrale est conservative, alors il existe une énergie potentielle $E_p(r)$ telle que

$$\vec{f} = f_r(r) \vec{u}_r = -\frac{dE_p}{dr} \vec{u}_r$$

Le problème possède une symétrie sphérique : force et énergie potentielle ne dépendent que de r .

1.2 Exemples usuels de forces centrales conservatives

1.2.1 Interaction gravitationnelle (rappel)

Caractéristiques de la force de gravitation

Soient deux points matériels, O de masse m_1 et M de masse m , la force d'interaction gravitationnelle de O sur M a pour expression :

$$\vec{f} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{avec} \quad r = \|\vec{OM}\|$$

où $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ la constante de gravitation universelle.

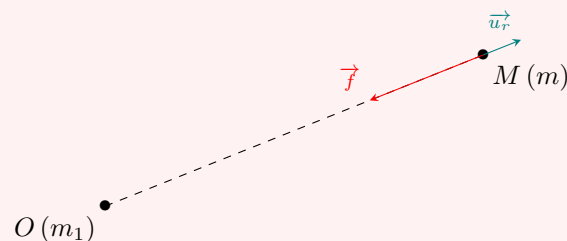


Figure 1 – Force gravitationnelle entre deux masses ponctuelles

En choisissant $\lim_{r \rightarrow \infty} E_p(r) = 0$, on obtient :

$$E_p(r) = -\mathcal{G} \frac{m_1 m}{r}$$

1.2.2 Interaction coulombienne (rappel)

Loi de Coulomb

Soient deux particules chargées, O de charge q_1 et M de charge q , la force d'interaction électrostatique de O sur M a pour expression :

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q}{r^2} \vec{u}_r$$

avec $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9,0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}$ où ϵ_0 est permittivité diélectrique du vide.
Cas où $q_1 q < 0$, les charges s'attirent :

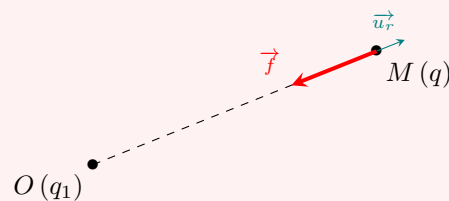


Figure 2 – cas où $q_1 \times q < 0$

Cas où $q_1 q > 0$, les charges se repoussent :

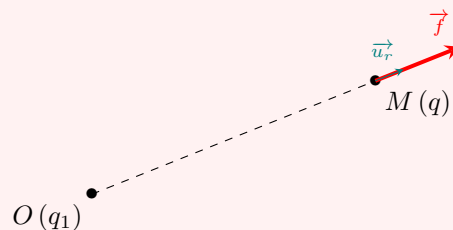


Figure 3 – cas où $q_1 \times q > 0$

Avec la même convention $\lim_{r \rightarrow \infty} E_p(r) = 0$, on obtient :

$$E_p(r) = \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

1.2.3 Forces newtoniennes

Définition des forces newtoniennes

Une force est dite newtonienne si son module est proportionnel à $1/r^2$.
C'est le cas des forces gravitationnelle et coulombienne.

Propriété des forces newtoniennes

Une force centrale en $1/r^2$ s'écrit

$$\vec{f} = -\frac{K}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{où } K \text{ est une constante}$$

et en choisissant $\lim_{r \rightarrow \infty} E_p(r) = 0$, elle dérive d'une énergie potentielle du type :

$$E_p(r) = -\frac{K}{r}$$

1.2.4 Force harmonique centrale de rappel élastique

Propriété de la force centrale de rappel élastique

On suppose que M est rappelé vers O et on note r_0 sa position d'équilibre. La force de rappel élastique exercée sur M a pour expression en coordonnées sphériques :

$$\vec{f} = -k(r - r_0) \vec{u}_r = -m\omega_0^2(r - r_0) \vec{u}_r \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

En choisissant $E_p(r_0) = 0$, on obtient :

$$E_p(r) = \frac{1}{2}k(r - r_0)^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2(r - r_0)^2$$

1.3 Quelques observations : mécanique céleste et lois de Kepler

Historiquement, l'étude des forces centrales a été portée par l'analyse du mouvement des planètes. Kepler a proposé trois lois expérimentales :

Lois de Kepler

- **Loi des orbites** : les planètes décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe un foyer.
- **Loi des aires** : les aires balayées par le rayon vecteur en des temps égaux sont égales.
- **Loi des périodes** : le rapport T^2/a^3 , période divisée par le demi-grand axe de l'ellipse, a la même valeur pour toutes les planètes autour du Soleil.

On peut estimer cette constante à partir de l'orbite terrestre : $T = 1$ an et $a \simeq 1$ ua = 150×10^6 km, d'où

$$\frac{T^2}{a^3} \approx 2,9 \times 10^{-19} \text{ s}^2 \text{ m}^{-3}$$

Ces lois ne se transposent pas *telles quelles* à n'importe quelle force centrale : la forme conique des trajectoires est typique des forces newtoniennes en $1/r^2$. L'objectif est d'en retrouver une

partie à partir de la seule loi d'attraction gravitationnelle.

1.3.1 Quelques ordres de grandeur pour le système solaire

On retiendra notamment : $M_T \simeq 6,0 \times 10^{24}$ kg, $R_T \simeq 6,4 \times 10^3$ km, $D_{TS} = 1$ ua et $M_S \simeq 2,0 \times 10^{30}$ kg. Les excentricités des planètes sont globalement faibles : leurs orbites sont donc souvent proches de cercles.

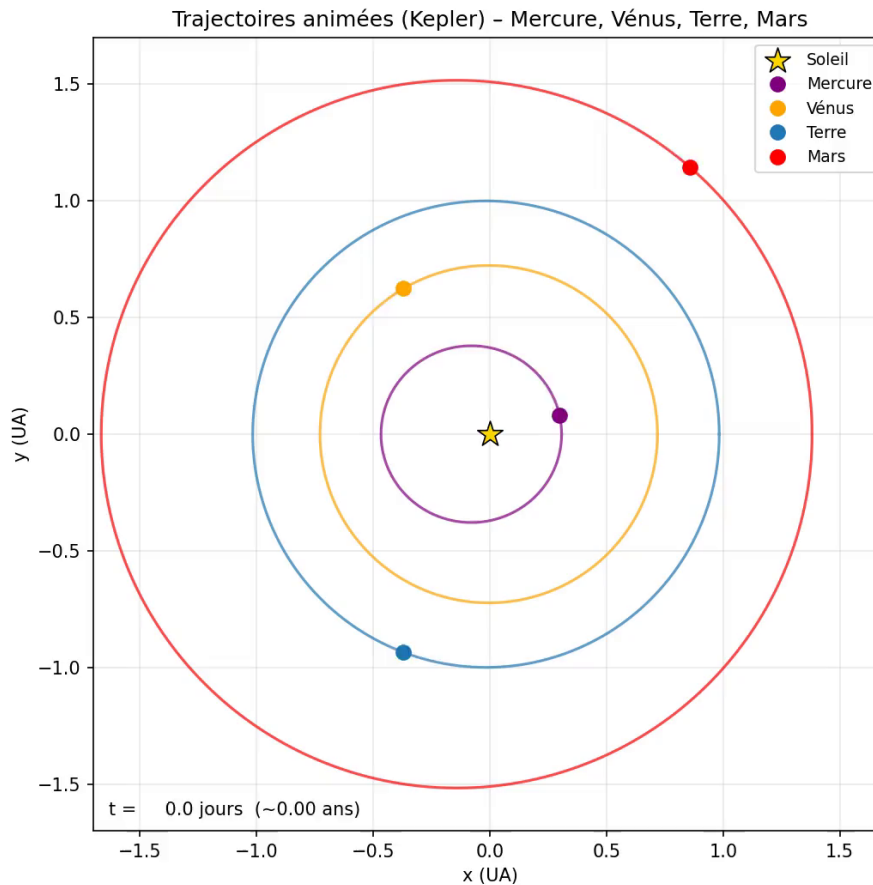


Figure 4 – Cliquez sur l'image pour récupérer/ouvrir la vidéo jointe.

2 Généralités sur les forces centrales conservatives

2.1 Conséquence du caractère central de la force

2.1.1 Conservation du moment cinétique

On applique le théorème du moment cinétique au point M par rapport à O :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f})$$

Or $\vec{f}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$, donc

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{f}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = \vec{0}$$

On en déduit immédiatement

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \vec{0}$$

Conservation du moment cinétique

Pour une force centrale de centre O ,

$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v}$$

est conservé au cours du mouvement, il est égale au moment cinétique initial. Il s'agit d'une intégrale première du mouvement.

On déterminera sa valeur à partir des conditions initiales : position $\overrightarrow{OM_0}$, vitesse $\vec{v}_0$.

2.1.2 Planéité de la trajectoire

Les conditions initiales définissent le plan $\Pi = (O, \overrightarrow{OM_0}, \vec{v}_0)$. Au temps initial :

$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM_0} \wedge m \vec{v}_0$$

Par définition du produit vectoriel, $\overrightarrow{L_O}$ est perpendiculaire au plan Π . Comme $\overrightarrow{L_O}$ reste constant, le plan orthogonal à $\overrightarrow{L_O}$ et passant par O reste fixe. Or, à tout instant, $\overrightarrow{OM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{L_O}$ (puisque $\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v}$), donc M reste dans ce même plan.

Mouvement plan de M soumis à une force centrale de centre O

Si $\overrightarrow{L_O} \neq \vec{0}$, le mouvement sous force centrale est plan : la trajectoire est contenue dans un plan fixe passant par O et perpendiculaire à $\overrightarrow{L_O}$.

2.1.3 Choix de coordonnées polaires

Quand $\overrightarrow{L_O} \neq \vec{0}$, on choisit l'axe (Oz) dans la direction de $\overrightarrow{L_O}$. Le mouvement se fait alors dans le plan (Oxy) et on utilise des coordonnées polaires d'origine O . On a

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

et le moment cinétique prend la forme

$$\overrightarrow{L_O} = mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$$

2.1.4 Loi des aires

Puisque $\vec{L}_O$ et m sont constants, la quantité $r^2\dot{\theta}$ l'est aussi. On introduit la **constante des aires** C :

$$C = r^2\dot{\theta} = \frac{\|\vec{L}_O\|}{m}$$

Dimensionnellement, C s'exprime en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$. À l'instant initial,

$$C = \|\vec{OM}_0 \wedge \vec{v}_0\|$$

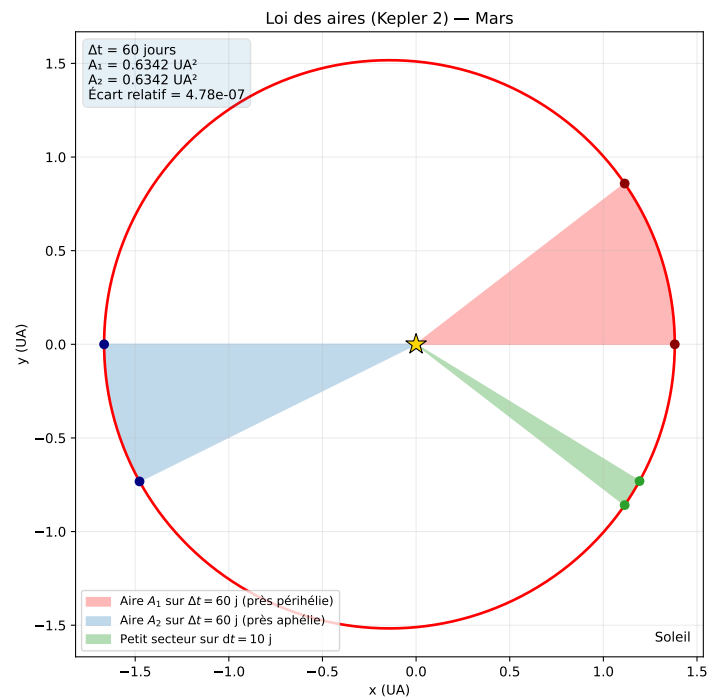


Figure 5 – Loi des aires

Sur un court intervalle dt , l'aire dA balayée par le rayon vecteur est l'aire du triangle vert de la figure 5, soit la moitié de l'aire du rectangle de côtés r et $r d\theta$:

$$dA \simeq \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Donc

$$dA = \frac{1}{2} C dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{C}{2} = \text{cste}$$

Loi des aires

Sous force centrale, la vitesse aréolaire $\frac{dA}{dt}$ est constante :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2} = \text{cste}$$

Ainsi, des durées égales Δt correspondent à des aires A égales balayées par $\overrightarrow{OM}$:

$$A = \frac{C}{2} \Delta t$$

2.2 Conséquence du caractère conservatif de la force

2.2.1 Conservation de l'énergie mécanique

On applique le théorème de l'énergie cinétique. Comme la force est conservative, l'énergie mécanique se conserve :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} (E_c + E_p) = 0$$

Énergie mécanique (intégrale première du mouvement)

On a

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) = \text{cste}$$

2.2.2 Énergie potentielle effective

Dans le plan du mouvement, $E_p = E_p(r)$. Avec $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, on a :

$$E_c = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

En combinant avec $C = r^2\dot{\theta}$, on obtient

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$$

On introduit alors l'énergie potentielle effective

$$E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$$

ce qui ramène l'étude radiale à une énergie « à un degré de liberté » :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$$

Énergie potentielle effective

Le mouvement radial se traite comme un mouvement conservatif 1D avec une énergie potentielle effective :

$$E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$$

3 Cas particulier : attraction gravitationnelle

3.1 Position du problème

On étudie le mouvement d'un point M de masse m attiré par un astre A de masse M_A situé en O , avec $M_A \gg m$ (astre supposé fixe). La force subie par M est

$$\vec{f} = -\mathcal{G} \frac{mM_A}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{avec} \quad E_p(r) = -\mathcal{G} \frac{mM_A}{r}$$

Le mouvement est plan, et en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} C = r^2\dot{\theta} \\ E_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \mathcal{G}\frac{mM_A}{r} \end{cases}$$

3.2 Étude qualitative via le potentiel effectif

En éliminant $\dot{\theta}$ grâce à C , on écrit

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r) \quad \text{avec} \quad E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G}\frac{mM_A}{r}$$

3.2.1 Détermination de r_0 et de $E_{\min}$

On part du potentiel effectif

$$E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G}\frac{mM_A}{r}$$

1) Position du minimum de $E_{p,\text{eff}}(r)$: calcul de r_0 . On cherche l'extremum de $E_{p,\text{eff}}$ en dérivant par rapport à r :

$$\frac{dE_{p,\text{eff}}}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2}mC^2r^{-2} - \mathcal{G}mM_Ar^{-1} \right)$$

Or

$$\frac{d}{dr} (r^{-2}) = -2r^{-3} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dr} (r^{-1}) = -r^{-2}$$

Donc

$$\frac{dE_{p,\text{eff}}}{dr} = \frac{1}{2}mC^2(-2)r^{-3} - \mathcal{G}mM_A(-1)r^{-2} = -\frac{mC^2}{r^3} + \frac{\mathcal{G}mM_A}{r^2}$$

On impose la condition d'extremum :

$$\frac{dE_{p,\text{eff}}}{dr}(r_0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{mC^2}{r_0^3} + \frac{\mathcal{G}mM_A}{r_0^2} = 0$$

On factorise $\frac{m}{r_0^3}$ (strictement positif pour $r_0 > 0$) :

$$\frac{m}{r_0^3}(-C^2 + \mathcal{G}M_A r_0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -C^2 + \mathcal{G}M_A r_0 = 0$$

d'où

$$r_0 = \frac{C^2}{\mathcal{G}M_A}$$

2) Valeur minimale : calcul de $E_{\min} = E_{p,\text{eff}}(r_0)$. On évalue $E_{p,\text{eff}}$ en r_0 :

$$E_{\min} = E_{p,\text{eff}}(r_0) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r_0^2} - \mathcal{G}\frac{mM_A}{r_0}$$

On remplace $r_0 = \frac{C^2}{\mathcal{G}M_A}$. D'abord,

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\mathcal{G}M_A}{C^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r_0^2} = \left(\frac{\mathcal{G}M_A}{C^2}\right)^2 = \frac{\mathcal{G}^2 M_A^2}{C^4}$$

Ainsi

$$\frac{1}{2}m\frac{C^2}{r_0^2} = \frac{1}{2}mC^2\frac{\mathcal{G}^2 M_A^2}{C^4} = \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{G}^2 M_A^2}{C^2}$$

et

$$\mathcal{G}\frac{mM_A}{r_0} = \mathcal{G}mM_A\frac{\mathcal{G}M_A}{C^2} = m\frac{\mathcal{G}^2 M_A^2}{C^2}.$$

Donc

$$E_{\min} = \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{G}^2 M_A^2}{C^2} - m\frac{\mathcal{G}^2 M_A^2}{C^2} = -\frac{1}{2}m\frac{\mathcal{G}^2 M_A^2}{C^2}$$

On peut aussi réécrire ce résultat en fonction de r_0 en remarquant que

$$\frac{\mathcal{G}M_A}{r_0} = \frac{\mathcal{G}^2 M_A^2}{C^2}$$

ce qui donne

$$E_{\min} = -\frac{\mathcal{G}M_A m}{2r_0}$$

3) Vérification que c'est bien un minimum. On peut vérifier via la dérivée seconde :

$$\frac{d^2 E_{p,\text{eff}}}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(-\frac{mC^2}{r^3} + \frac{\mathcal{G}mM_A}{r^2} \right) = \frac{3mC^2}{r^4} - \frac{2\mathcal{G}mM_A}{r^3}$$

En $r = r_0$ et en utilisant $\mathcal{G}M_A r_0 = C^2$:

$$\left. \frac{d^2 E_{p,\text{eff}}}{dr^2} \right|_{r_0} = \frac{3mC^2}{r_0^4} - \frac{2m(\mathcal{G}M_A)}{r_0^3} = \frac{m}{r_0^4} (3C^2 - 2\mathcal{G}M_A r_0) = \frac{m}{r_0^4} (3C^2 - 2C^2) = \frac{mC^2}{r_0^4} > 0$$

donc r_0 correspond bien à un minimum.

3.2.2 Mise sous forme adimensionnée

On note $r_0 = \frac{C^2}{\mathcal{G}M_A}$ l'échelle de longueur correspondant au minimum de $E_{p,\text{eff}}$, et $E_{\min} = -\frac{\mathcal{G}M_A m}{2r_0}$.

On choisit alors $E_0 = -E_{\min} = \frac{\mathcal{G}M_A m}{2r_0}$ comme échelle d'énergie, et on introduit les grandeurs adimensionnées :

$$r^* = \frac{r}{r_0} \quad \text{et} \quad E_{p,\text{eff}}^* = \frac{E_{p,\text{eff}}}{E_0}$$

On obtient

$$E_{p,\text{eff}}^*(r^*) = \frac{1}{r^{*2}} - \frac{2}{r^*}$$

En effet, on part de

$$E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G}\frac{mM_A}{r}$$

Avec

$$r = r_0 r^*, \quad r_0 = \frac{C^2}{\mathcal{G}M_A}, \quad E_0 = \frac{\mathcal{G}M_A m}{2r_0},$$

on obtient

$$E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r_0^2} \frac{1}{r^{*2}} - \mathcal{G}\frac{mM_A}{r_0} \frac{1}{r^*}$$

En divisant par E_0 :

$$E_{p,\text{eff}}^*(r^*) = \frac{C^2}{\mathcal{G}M_A r_0} \frac{1}{r^{*2}} - 2\frac{1}{r^*}$$

Comme $r_0 = \frac{C^2}{\mathcal{G}M_A}$, il vient finalement

$$E_{p,\text{eff}}^*(r^*) = \frac{1}{r^{*2}} - \frac{2}{r^*}$$

3.2.3 Lecture des mouvements possibles

On distingue alors plusieurs cas (figure 6) :

- si $E_m < E_{\min}$, le mouvement est interdit (pas de r accessible) ;
- si $E_m = E_{\min}$, alors $r = r_0$ constant : la trajectoire est un cercle et $\dot{\theta} = \frac{C}{r_0^2}$ est constante ;
- si $0 > E_m > E_{\min}$, r reste borné entre deux valeurs : état *lié* (trajectoire fermée) ;
- si $E_m \geq 0$, r peut devenir arbitrairement grand : état de *diffusion* (trajectoire ouverte).

Lecture qualitative des mouvements via $E_{p,\text{eff}}^*(r^*) = \frac{1}{r^{*2}} - \frac{2}{r^*}$

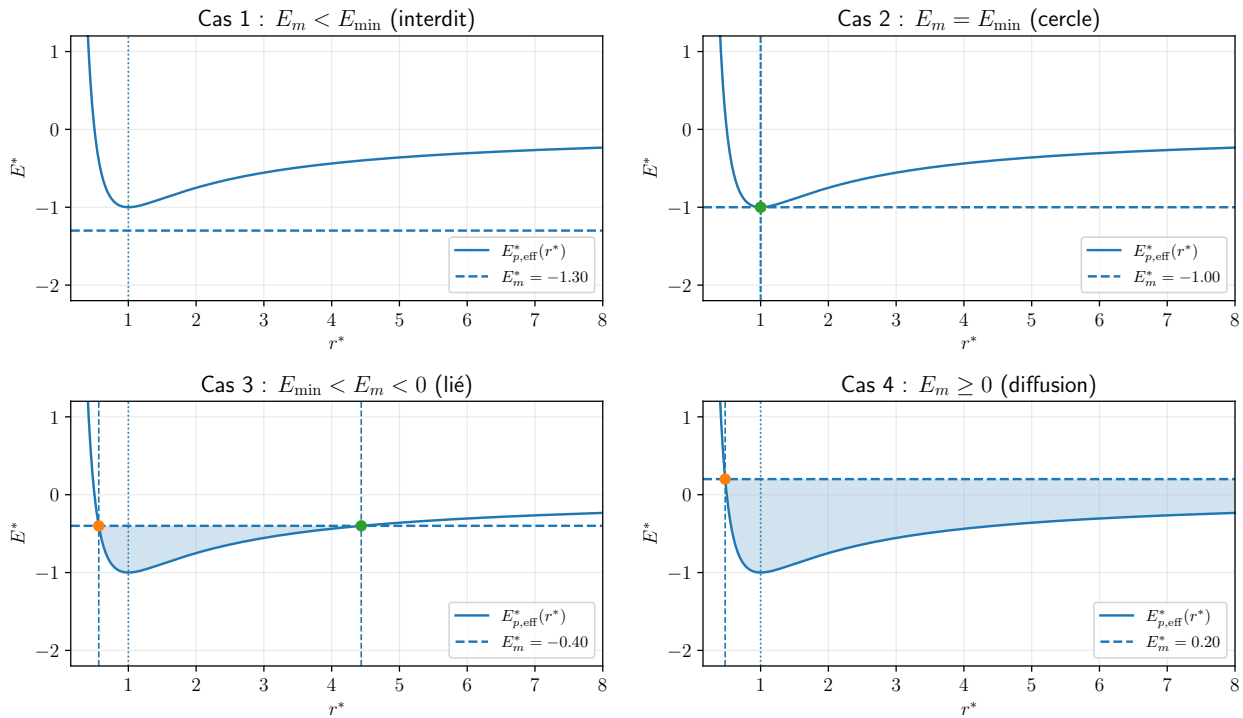


Figure 6 – Mouvements possibles selon la valeur de l'énergie mécanique E_m

3.3 Détermination numérique de la trajectoire

3.3.1 Adimensionnement : obtention des équations en $r^*(t^*)$ et $\theta(t^*)$

On part des deux intégrales premières :

$$C = r^2 \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$$

et

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G} \frac{m M_A}{r} \quad \Rightarrow \quad \dot{r}^2 = \frac{2E_m}{m} - \frac{C^2}{r^2} + \frac{2\mathcal{G} M_A}{r}$$

On introduit les grandeurs adimensionnées

$$r^* = \frac{r}{r_0} \quad \text{et} \quad t^* = \frac{t}{\tau} \quad \text{avec} \quad V = \frac{C}{r_0}, \quad \tau = \frac{r_0}{V} = \frac{r_0^2}{C}$$

ainsi que

$$r_0 = \frac{C^2}{\mathcal{G} M_A}, \quad E_0 = \frac{\mathcal{G} M_A m}{2r_0}, \quad \alpha = \frac{E_m}{E_0}$$

1) **Relations de dérivation.** Comme $r = r_0 r^*$ et $t = t^* \tau$, on a

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = r_0 \frac{dr^*}{dt} = r_0 \frac{dr^*}{dt^*} \frac{dt^*}{dt} = \frac{r_0}{\tau} \frac{dr^*}{dt^*}$$

Or $\frac{r_0}{\tau} = \frac{r_0}{r_0^2/C} = \frac{C}{r_0} = V$, donc

$$\dot{r} = V \frac{dr^*}{dt^*} \quad \Rightarrow \quad \dot{r}^2 = V^2 \left(\frac{dr^*}{dt^*} \right)^2$$

De même,

$$\frac{d\theta}{dt^*} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dt^*} = \dot{\theta} \tau$$

2) **Équation adimensionnée pour θ .** Avec $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$, $r = r_0 r^*$ et $\tau = \frac{r_0^2}{C}$:

$$\frac{d\theta}{dt^*} = \frac{C}{(r_0 r^*)^2} \tau = \frac{C}{r_0^2 r^{*2}} \frac{r_0^2}{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dt^*} = \frac{1}{r^{*2}}$$

3) **Équation adimensionnée pour r^* .** On repart de

$$\dot{r}^2 = \frac{2E_m}{m} - \frac{C^2}{r^2} + \frac{2\mathcal{G}M_A}{r}$$

En posant $r = r_0 r^*$, on obtient

$$\dot{r}^2 = \frac{2E_m}{m} - \frac{C^2}{r_0^2} \frac{1}{r^{*2}} + \frac{2\mathcal{G}M_A}{r_0} \frac{1}{r^*}$$

Comme $V = \frac{C}{r_0}$, on a $\frac{C^2}{r_0^2} = V^2$, donc

$$\dot{r}^2 = \frac{2E_m}{m} - V^2 \frac{1}{r^{*2}} + \frac{2\mathcal{G}M_A}{r_0} \frac{1}{r^*}$$

En utilisant $\dot{r}^2 = V^2 \left(\frac{dr^*}{dt^*} \right)^2$ puis en divisant par V^2 :

$$\left(\frac{dr^*}{dt^*} \right)^2 = \frac{2E_m}{mV^2} - \frac{1}{r^{*2}} + \frac{2\mathcal{G}M_A}{r_0 V^2} \frac{1}{r^*}$$

Simplification du terme en $1/r^*$:

$$\frac{\mathcal{G}M_A}{r_0 V^2} = \frac{\mathcal{G}M_A}{r_0} \frac{r_0^2}{C^2} = \frac{\mathcal{G}M_A r_0}{C^2} = 1 \quad \text{car} \quad r_0 = \frac{C^2}{\mathcal{G}M_A}.$$

Donc $\frac{2\mathcal{G}M_A}{r_0 V^2} \frac{1}{r^*} = \frac{2}{r^*}$

Simplification du terme constant :

$$\frac{2E_m}{mV^2} = \frac{2E_m}{m} \frac{r_0^2}{C^2} = \frac{2E_m}{m} \frac{r_0}{\mathcal{G}M_A} = \frac{2E_m r_0}{\mathcal{G}M_A m} = \frac{E_m}{\mathcal{G}M_A m / (2r_0)} = \frac{E_m}{E_0} = \alpha$$

Finalement :

$$\left(\frac{dr^*}{dt^*}\right)^2 = \alpha - \frac{1}{r^{*2}} + \frac{2}{r^*} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{E_m}{E_0}$$

Pour la résolution numérique, il est pratique de dériver cette équation par rapport à t^* :

$$2\frac{dr^*}{dt^*}\frac{d^2r^*}{dt^{*2}} = (2r^{*-3} - 2r^{*-2})\frac{dr^*}{dt^*}$$

En simplifiant par dr^*/dt^* , on obtient :

$$\frac{d^2r^*}{dt^{*2}} = \frac{1}{r^{*3}} - \frac{1}{r^{*2}}$$

3.3.2 Conditions initiales

Le point d'approche minimale correspond à $\frac{dr^*}{dt^*} = 0$ et r^* solution positive de

$$\alpha - \frac{1}{r^{*2}} + \frac{2}{r^*} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha r^{*2} + 2r^* - 1 = 0$$

Ainsi :

$$r^* = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{1 + \alpha}}{\alpha} & \alpha \neq 0, \\ 0,5 & \alpha = 0, \end{cases} \quad \theta(0) = 0, \quad \left.\frac{dr^*}{dt^*}\right|_{t^*=0} = 0$$

3.3.3 Tracé et analyse en fonction de l'énergie mécanique

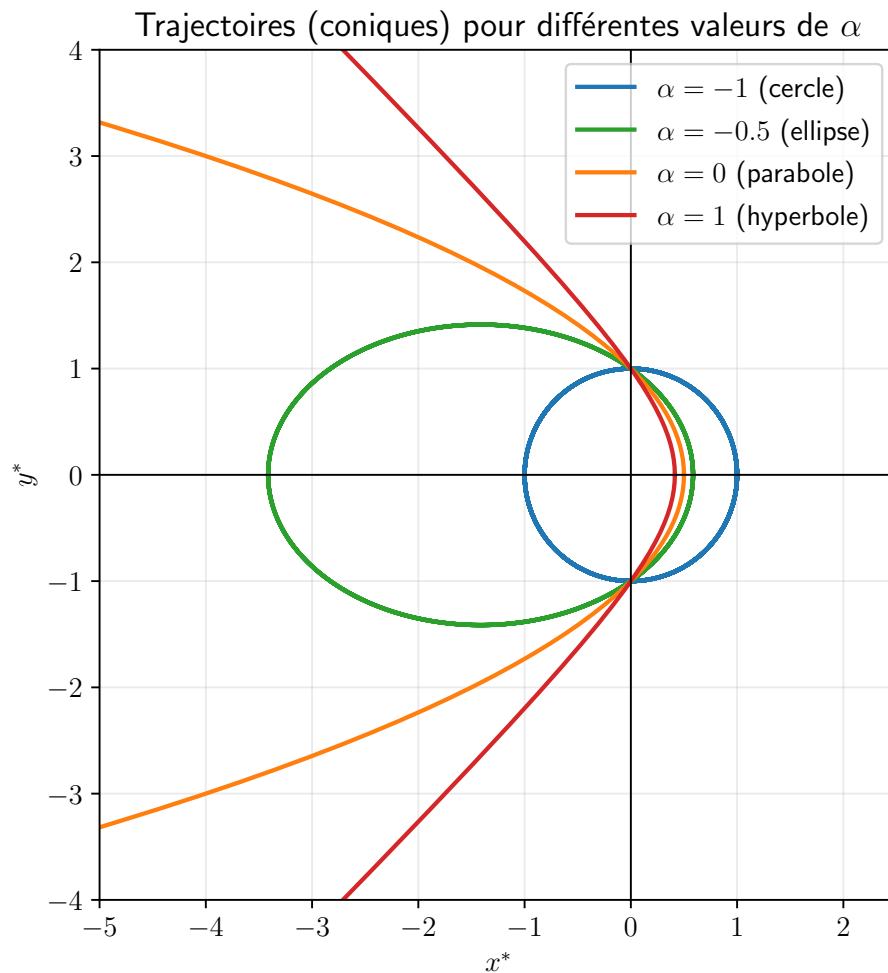


Figure 7 – Trajectoires selon la valeur de α

Les courbes de la figure 7 peuvent être obtenues avec un script Python (par exemple avec `odeint`).

Les trajectoires obtenues sont des coniques de foyer O , et leur nature est entièrement pilotée par α :

- $\alpha = -1 \Leftrightarrow E_m = E_{\min}$: cercle centré en O ;
- $-1 < \alpha < 0 \Leftrightarrow 0 > E_m > E_{\min}$: ellipse de foyer O ;
- $\alpha = 0 \Leftrightarrow E_m = 0$: parabole de foyer O ;
- $\alpha > 0 \Leftrightarrow E_m > 0$: branche d'hyperbole de foyer O .

Les paramètres $\mathcal{G}$, M_A , m , C et E_m n'interviennent pas séparément : ils apparaissent via la combinaison sans dimension

$$\alpha = \frac{E_m}{E_0} = \frac{2C^2 E_m}{\mathcal{G}^2 M_A^2 m}$$

La méthode se transpose à d'autres forces centrales conservatives en adaptant l'expression de $E_p(r)$. En revanche, la propriété « conique » est spécifique des forces newtoniennes en $1/r^2$.

4 Étude directe de la trajectoire circulaire

Les orbites circulaires méritent une attention particulière : elles sont mathématiquement simples, et, dans beaucoup de situations, elles donnent une excellente première approximation (planètes peu excentriques, satellites).

4.1 Position du problème

On se place dans le cas où M décrit un cercle de rayon r_0 centré en O (figure 8).

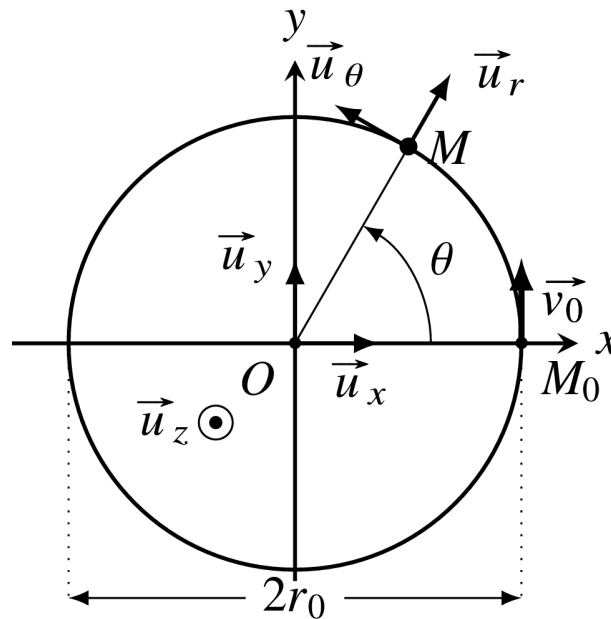


Figure 8 – Trajectoire circulaire

La seule force est l'attraction gravitationnelle :

$$\vec{f} = -\mathcal{G} \frac{mM_A}{r_0^2} \vec{u}_r$$

Le mouvement étant plan, on adopte des coordonnées polaires dans le plan de l'orbite. À $t = 0$, on choisit par exemple

$$\overrightarrow{OM_0} = r_0 \vec{u}_x, \quad \vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_y, \quad (v_0 > 0)$$

Comme $r = r_0$ est constant, les relations cinématiques se simplifient :

$$\overrightarrow{OM} = r_0 \vec{u}_r \quad \vec{v} = r_0 \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \vec{a} = -r_0 \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + r_0 \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

4.2 Étude par le principe fondamental de la dynamique

4.2.1 Vitesse sur l'orbite circulaire

Le PFD donne

$$m \vec{a} = -\mathcal{G} \frac{mM_A}{r_0^2} \vec{u}_r$$

Comme $r = r_0$ est constant, l'accélération radiale vaut $a_r = -v^2/r_0$ et on obtient

$$-\frac{mv^2}{r_0} = -\mathcal{G} \frac{mM_A}{r_0^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_A}{r_0}}$$

Vitesse sur une orbite circulaire

Sur une orbite circulaire de rayon r_0 autour d'un astre de masse M_A , la vitesse est uniforme et vérifie

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_A}{r_0}}$$

4.2.2 Énergies sur une orbite circulaire

On a

$$E_p = -\mathcal{G} \frac{mM_A}{r_0} \quad \text{et} \quad E_c = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\mathcal{G} \frac{mM_A}{r_0}$$

donc

$$E_m = E_c + E_p = -\frac{1}{2}\mathcal{G} \frac{mM_A}{r_0}$$

Pour une orbite circulaire, ces grandeurs sont constantes ; elles s'expriment via l'échelle $E_0 = \mathcal{G} \frac{mM_A}{r_0}$.

Généralisation (orbites elliptiques). On peut montrer que la relation précédente reste vraie en remplaçant r_0 par le demi-grand axe a d'une orbite elliptique :

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}M_A m}{2a}$$

Énergie mécanique en orbite elliptique

Pour une masse m en orbite elliptique autour d'un astre de masse M_A , l'énergie mécanique E_m vaut :

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}M_A m}{2a}$$

où a est le demi-grand axe de l'ellipse.

4.2.3 Troisième loi de Kepler (loi des périodes)

Pour une orbite circulaire, T est le temps pour parcourir $2\pi r_0$ à la vitesse v_0 :

$$T = \frac{2\pi r_0}{v_0} = \frac{2\pi r_0}{\sqrt{\mathcal{G}M_A/r_0}} \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_A}$$

Par extension aux orbites elliptiques, on remplace r_0 par a :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_A}$$

indépendamment de la masse du corps en orbite.

Troisième loi de Kepler

Pour un corps en orbite elliptique autour d'un astre de masse M_A , sa période T et son demi-grand axe a sont liés par la relation :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_A}$$

5 Application : satellites terrestres

5.1 Différents types d'orbites

La Terre possède un satellite naturel (la Lune) : distance moyenne $\sim 384 \times 10^3$ km, période $\sim 27,3$ jours, vitesse moyenne $\sim 3,7 \times 10^3$ km h⁻¹ ; son orbite est peu excentrique ($e \simeq 0,05$).

Depuis 1957 (Spoutnik 1), des milliers de satellites artificiels ont été placés en orbite autour de la Terre. Aujourd'hui, ils sont très nombreux et occupent des orbites variées selon leur mission. On distingue classiquement :

- **Orbite basse (LEO)** : altitude typiquement entre 300 km et 2000 km, périodes de l'ordre de 1 à 2 heures. On n'abaisse pas beaucoup plus l'altitude, car le frottement atmosphérique deviendrait trop important. Ces orbites ont des avantages : coût énergétique plus faible pour la mise en orbite, communications rapides, très bonne résolution pour l'observation (imagerie, météo, etc.).
- **Orbite moyenne (MEO)** : autour de 20 000 km d'altitude, période ~ 12 h, très stable et utile pour la navigation (GPS, etc.).
- **Orbite géostationnaire (GEO)** : altitude $\sim 36\,000$ km, période ~ 24 h. Le satellite reste au-dessus d'une zone fixe de la Terre : très pratique pour télécommunications et météo, mais mauvaise couverture des hautes latitudes.

5.2 Cas des satellites géostationnaires

5.2.1 Caractéristiques générales

Un satellite géostationnaire semble immobile pour un observateur terrestre : il reste au-dessus du même point du sol. Pour conserver cette situation, on doit corriger son orbite (perturbations) via un contrôle d'attitude/orbite, ce qui consomme du carburant et limite la durée de vie. L'orbite GEO est très fréquentée (plusieurs centaines de satellites), donc le positionnement orbital doit être précis (ordre de grandeur : quelques dizaines de kilomètres) ; en fin de vie, les satellites sont typiquement déplacés vers une orbite « cimetière ».

Pour qu'un satellite paraisse fixe, trois conditions sont nécessaires :

- le plan orbital doit coïncider avec le plan équatorial terrestre ;
- le mouvement orbital doit être synchrone avec la rotation de la Terre ;
- l'orbite doit être (quasi) circulaire.

5.2.2 Plan orbital équatorial

Dans un référentiel géocentrique supposé galiléen, le mouvement est à force centrale (centre : Terre). La trajectoire est donc plane et le plan de l'orbite contient le centre de la Terre. Si l'orbite

est inclinée par rapport à l'équateur (figure 9), le satellite passe alternativement au-dessus des hémisphères Nord et Sud : vu depuis le sol, il effectue des oscillations nord-sud. Pour supprimer cette dérive apparente, l'inclinaison doit être nulle : le plan orbital est alors le plan équatorial (figure 10).

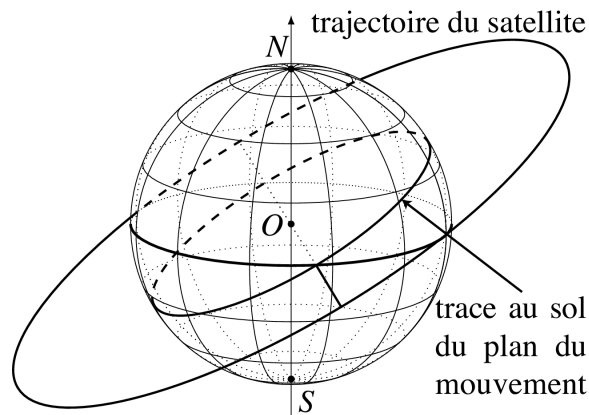


Figure 9 – Trajectoire inclinée par rapport au plan équatorial

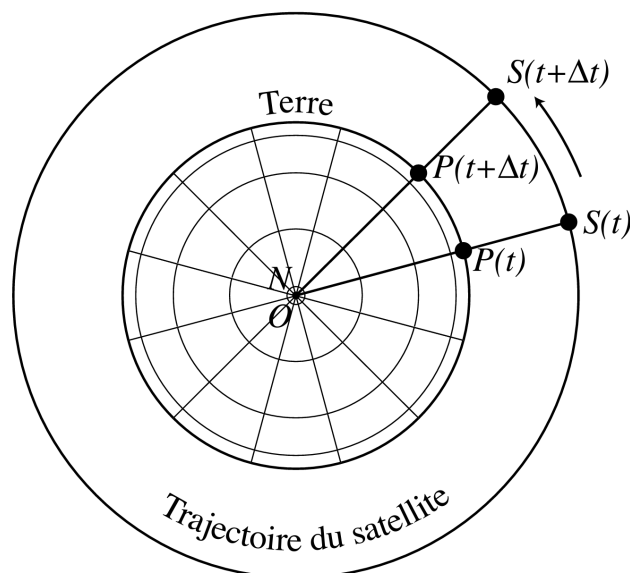


Figure 10 – Trajectoire du satellite géostationnaire dans la plan équatorial vue depuis le pôle Nord

5.2.3 Vitesse angulaire imposée

Si le satellite doit rester à la verticale d'un point fixe P de l'équateur, son déplacement angulaire doit suivre celui de ce point : sa vitesse angulaire orbitale est donc la même que la vitesse angulaire de rotation terrestre. La Terre tourne (à très bonne approximation) uniformément avec la vitesse angulaire

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_{\text{sid}}},$$

où T_{sid} est la durée d'un jour sidéral. Un satellite géostationnaire a donc une période orbitale égale à T_{sid} .

5.2.4 Orbite circulaire

La loi des aires donne $C = r^2 \dot{\theta}$ constant. Si $\dot{\theta}$ est constant (mouvement uniforme imposé par la synchronisation), alors r doit être constant également : l'orbite est circulaire (figure 10).

5.2.5 Durée de révolution : jour sidéral

Pour obtenir la durée exacte de rotation de la Terre, il faut distinguer *jour solaire* (24 h) et *jour sidéral*. En 24 h, la Terre a avancé sur son orbite autour du Soleil : pour que le Soleil repasse au même méridien, la Terre doit tourner un peu plus qu'un tour.

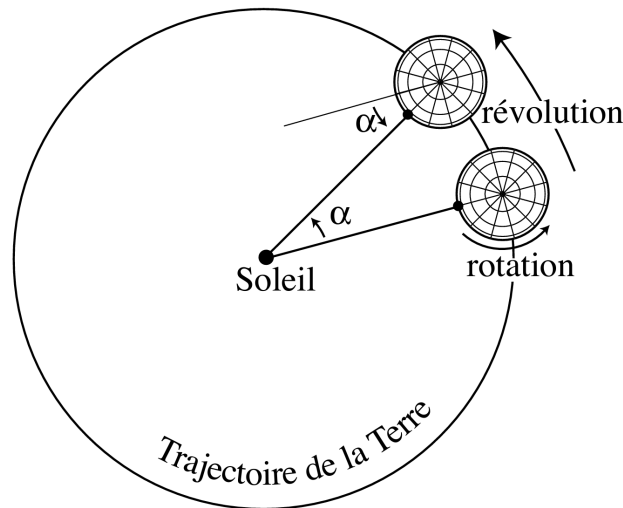


Figure 11 – Relation entre le jour solaire T_{sol} et le jour sidéral T_{sid}

Si α est l'angle correspondant à l'avancement orbital en une journée (figure 11) :

$$\alpha \simeq \frac{2\pi}{365,25}$$

La relation entre $T_{\text{sol}} = 24$ h et T_{sid} est alors :

$$\begin{aligned} T_{\text{sol}} &= T_{\text{sid}} + \frac{\alpha}{2\pi} T_{\text{sid}} \\ &= T_{\text{sid}} \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) \\ &= T_{\text{sid}} \frac{2\pi + \alpha}{2\pi} \end{aligned}$$

On obtient :

$$T_{\text{sid}} = T_{\text{sol}} \frac{2\pi}{2\pi + \alpha} = T_{\text{sol}} \frac{365,25}{366,25} \simeq 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s} \simeq 86\,164 \text{ s}$$

5.2.6 Rayon et altitude de l'orbite GEO

En utilisant la troisième loi de Kepler pour le mouvement d'un satellite autour de la Terre :

$$\frac{T_{\text{sid}}^2}{r_{\text{geo}}^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}$$

avec $\mathcal{G}M_T = 3,9860 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ et $T_{\text{sid}} = 86\,164 \text{ s}$, on obtient :

$$r_{\text{geo}} = \left(\frac{T_{\text{sid}}^2 \mathcal{G}M_T}{4\pi^2} \right)^{1/3} \simeq 4,2164 \times 10^7 \text{ m} = 42\,164 \text{ km}$$

En retranchant le rayon terrestre équatorial $R_T = 6378 \text{ km}$ l'altitude du satellite géostationnaire vaut

$$h = r_{\text{geo}} - R_T \simeq 35\,786 \text{ km}$$

Orbite géostationnaire (résumé)

Dans le référentiel terrestre, un satellite géostationnaire est fixe. Dans un référentiel géocentrique, il décrit une orbite circulaire et uniforme dans le plan équatorial, d'altitude

$$h \simeq 35\,786 \text{ km}$$

avec une période égale au jour sidéral $T_{\text{sid}} \simeq 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s}$. On gardera en tête les ordres de grandeur : $T \approx 24 \text{ h}$ et $h \approx 36\,000 \text{ km}$.

5.3 Vitesses cosmiques

5.3.1 Vitesse minimale de mise en orbite

Les orbites circulaires de faible altitude minimisent l'énergie mécanique : placer un satellite en orbite basse coûte donc moins d'énergie. La **première vitesse cosmique** correspond à la plus petite vitesse orbitale circulaire, typiquement pour une orbite rasant le sol ($r_0 \simeq R_T$) :

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}}$$

Numériquement, avec

$$\mathcal{G} = 6,7 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}/\text{s}^2, \quad M_T = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}, \quad R_T = 6,4 \times 10^6 \text{ m},$$

on obtient

$$v_1 \simeq 7,9 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \simeq 2,8 \times 10^4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

5.3.2 Vitesse de libération

La **seconde vitesse cosmique** est la vitesse minimale permettant à un objet d'échapper à l'attraction terrestre. Cela impose que l'énergie mécanique soit nulle à l'infini (vitesse finale quasi nulle), ce qui conduit, pour un départ du sol, à

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \mathcal{G}\frac{mM_T}{R_T} = 0 \quad \implies \quad v_2 = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}} = \sqrt{2} v_1$$

Numériquement, avec les mêmes valeurs que précédemment,

$$v_2 \simeq 1,12 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \simeq 4,0 \times 10^4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

6 Méthodologie : ellipse et équation polaire

Qu'est-ce qu'une ellipse ? Comment l'écrire en coordonnées polaires ?

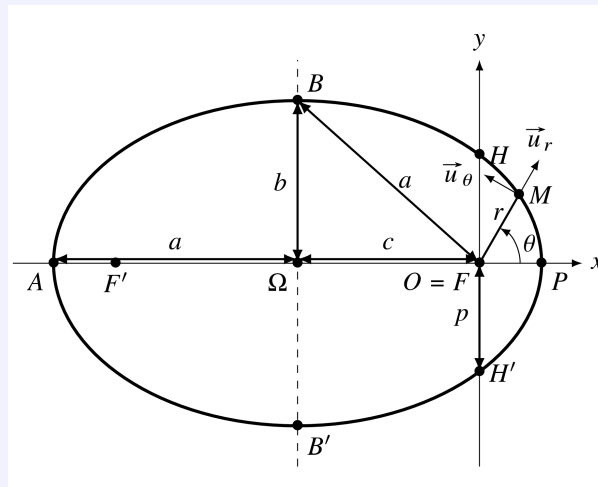


Figure 12 – Paramètres d'une ellipse

Les points F et F' sont les foyers de l'ellipse. Le point Ω est son centre. On note :

— a , le demi grand axe :

$$a = \Omega P = \Omega A = \frac{AP}{2}$$

— b , le demi petit axe :

$$b = \Omega B = \Omega B' = \frac{BB'}{2}$$

— c , la distance focale :

$$c = \Omega F = \Omega F' = \frac{FF'}{2}$$

— e , l'excentricité de l'ellipse :

$$e = \frac{c}{a}$$

— p , le paramètre de l'ellipse :

$$p = OH = OH' = a(1 - e^2)$$

Soit M un point de l'ellipse, les distances entre M et les foyers sont reliées par la relation :

$$MF + MF' = 2a$$

Appliqué pour $M = B$, cette relation implique $a = F'B = FB = OB$.

Si on place l'origine du repère polaire au foyer F de l'ellipse, et que l'on prend l'axe $F'F$ comme référence des angles, l'équation polaire de l'ellipse est :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Retrouver a d'une orbite elliptique à partir des conditions initiales

- déterminer l'énergie mécanique E_m à partir des conditions initiales ;
- utiliser la relation $E_m = -\frac{\mathcal{G}M_A m}{2a}$ (orbite elliptique) pour en déduire a .