

Suites et séries de fonctions

Feuille d'exercices #08

Partie A – Suites de fonctions

★ **Exercice 1** — Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions :

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x} \text{ et } g_n(x) = nx^n \ln(x) \text{ sur }]0, 1] ; h_n(x) = e^{-nx} \sin(nx) \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

★★ **Exercice 2** — Étudier de même la convergence sur $[0, 1]$ des suites :

$$f_n(x) = n^\alpha x^n (1-x), g_n(x) = (1-x)^n \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \text{ et } h_n(x) = nx^n \sin(\pi x)$$

★ **Exercice 3** — Soient $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \int_0^x f(t^n) dt$.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

★ **Exercice 4** — Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto n \cos^n(x) \sin(x)$.

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

2. Comparer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x) dx$ et $\int_0^{\pi/2} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$. Qu'en déduire ?

★ **Exercice 5** — Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto n^2 t e^{-nt}$. Prouver de deux façons que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

★★★ **Exercice 6** — Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0, n]}(x)$.

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. On pose $\delta_n(x) = e^{-x} - f_n(x)$. Montrer que $\|\delta_n\|_\infty \leq \frac{1}{en}$ puis conclure.

On cherchera à majorer $\delta_n(x_0)$ pour x_0 vérifiant $\delta'_n(x_0) = 0$.

3. Prouver que $\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x) dx = -\gamma$.

★ **Exercice 7** — Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \frac{n+2}{n+1} e^{-nx} \cos(nx)$.

Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+^*$ et sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

★★ **Exercice 8** — Soit (u_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, $|u_n(x)| \leq a_n$ où a_n est le terme général d'une série supposée convergente.

Montrer que la suite (P_n) de terme général $P_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 + u_k(x))$ converge uniformément sur I vers une fonction continue sur I .

★ **Exercice 9** — Soit $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x^n}{1+x+\dots+x^n}$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement et uniformément sur $[1, +\infty[$.

2. Calculer, de deux façons différentes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^2 f_n(x) dx$.

★★ **Exercice 10** — Soient $f_n : x \mapsto \frac{n}{1+n^2 x^2}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, où $a < b$.

Déterminer la limite de $\int_a^b f_n(x) g(x) dx$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

★★ **Exercice 11** — On définit la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, u_0(x) = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) = \frac{2\sqrt{u_n(x)}}{1+u_n(x)}$$

1. Montrer que la suite (u_n) converge simplement vers une fonction constante.

2. Montrer que $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

3. Que peut-on en déduire pour la suite de fonctions (u_n) ?

★★ **Exercice 12** — Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \varphi_n(t) dt \text{ où } \varphi_n(t) = \frac{n}{\pi} \cdot \frac{1}{1+n^2 t^2}$$

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ et qu'elle converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

★★ **Exercice 13** — Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \geq 0, \quad f_0(t) = 0 \quad \text{et} \quad f_{n+1}(t) = \sqrt{t + f_n(t)}$$

1. Déterminer la limite simple ℓ de la suite (f_n) .
2. Préciser si la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que pour tout $t > 0$, $|f_{n+1}(t) - \ell(t)| \leq \frac{|f_n(t) - \ell(t)|}{2f_{n+1}(t)}$.
4. Remarquer que $f_n - \ell$ est bornée pour $n \geq 1$ et en déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

★★ **Exercice 14** — On note (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, convergeant uniformément sur I vers une fonction f .

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $(\varphi \circ f_n)$ converge uniformément sur I vers $\varphi \circ f$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = \frac{f_n}{1 + f_n^2}$. Que dire de la suite (g_n) ?

★★ **Exercice 15** — *Second théorème de Dini*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On considère une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions croissantes de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction continue f . Soit enfin, pour $p \in \mathbb{N}^*$, la subdivision du segment $[a, b]$ définie par :

$$\forall k \in \{0, \dots, p\}, \quad a_k = a + k \cdot \frac{b-a}{p}$$

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(a_{k+1}) - f(a_k) \leq \varepsilon$ pour tout entier $k \in \{0, \dots, p-1\}$.
2. Montrer que la convergence de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur $[a, b]$.
3. *Application* – Montrer que la suite de fonctions $\left(x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $\exp$ sur tout segment de $\mathbb{R}$.

★★★ **Exercice 16** — *Théorème d'Ascoli (cas lipschitzien) et application*

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ supposée α -lipschitzienne. On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[a, b]$.
Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$.

2. Soient $I =]a, b[$ et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions convexes sur I convergeant simplement vers f . Montrer que f est convexe et que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I .

⊗ Partie B – Séries de fonctions

★★ **Exercice 17** — Étudier la convergence simple puis uniforme sur $\mathbb{R}_+$ des séries de termes généraux $u_n(x) = \frac{x}{n(1+nx)}$ et $v_n(x) = \frac{x}{(1+nx)^2}$.

★★ **Exercice 18** — Étudier la convergence simple puis uniforme de la série de fonctions de terme général u_n dans les cas suivants :

$$u_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}; \quad u_n(x) = \frac{1}{2^n} \operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right); \quad u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$$

$$u_n(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right); \quad u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n} \quad (x \geq 0)$$

★ **Exercice 19** — Déterminer les domaines de convergence simple et uniforme de la série de terme général $u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$. Calculer sa somme.

★★ **Exercice 20** — Soient $\alpha > 0$ et $u_n(x)$ défini sur $\mathbb{R}_+$ par $u_n(x) = n^2 x^\alpha e^{-nx^2}$.

1. Étudier la convergence simple et normale de $\sum u_n$ sur $[0, +\infty[$.
2. En cas de convergence, quel est le domaine de continuité de la somme?
3. Étudier la somme au voisinage de 0.

★★ **Exercice 21** — Étudier les modes de convergence sur $[0, 1]$ de la série de fonctions $\sum u_n$, où l'on a posé $u_n(x) = n^\alpha x^n (1-x)$.

★★ **Exercice 22** — Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ telle que $\sum a_n^2$ converge. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+x}$.

Montrer que $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et déterminer sa limite en 0 et en $+\infty$.

★★ **Exercice 23** — On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2 x^2}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Donner un équivalent en 0 et $+\infty$ de f .

★ **Exercice 24** — Pour $\alpha > 1$ et $x > 0$, on pose $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ et $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Déterminer la limite ζ en $+\infty$ et trouver un équivalent en 1^+ .
2. Montrer que la fonction η est bien définie et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Trouver pour $x > 1$ une relation entre $\zeta(x)$ et $\eta(x)$.
4. Retrouver un équivalent en 1^+ de $\zeta(x)$.

★ **Exercice 25** — On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer f' .
2. Déterminer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

★★★ **Exercice 26** — On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}$? convergence uniforme?

★★ **Exercice 27** — Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ puis de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Justifier la décroissance de f puis que pour tout $x > 0$, $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$.
3. Déterminer un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

★★ **Exercice 28** — On pose, pour tout $x > 0$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + e^{-nx})$.

Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ puis que $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$.

★ **Exercice 29** — Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n^2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \pi\sqrt{x}$.

★★ **Exercice 30** — Soit, pour tout $x > 0$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(x+n)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que f est définie, continue et à valeurs positives.
2. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser ses variations.
3. Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.
4. En déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$ et en 0.

★★ **Exercice 31** — On pose, sous réserve d'existence, $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x \ln(n)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Étudier la continuité de f puis trouver un équivalent de $f(x)$ en 1^+ .

★ **Exercice 32** — Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (\arctan(n+x) - \arctan(n))$.

1. Donner le domaine de définition de f puis étudier sa régularité.
2. Exprimer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$ et de x .

★★ **Exercice 33** — On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \quad \text{et,} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t) dt$$

1. Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de la forme $[0, a]$, où $a > 0$, puis justifier la continuité de sa somme S sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $S(x) = u_0(x) + e^x \int_0^x e^{-t} u_0(t) dt$.

★ **Exercice 34** — Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n e^{ikx}$ et $f_n : x \mapsto \frac{e^{inx}}{n}$.

1. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, $|S_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$.
2. Prouver que $\sum f_n$ converge unif. sur tout segment inclus dans $]0, 2\pi[$.

★★ **Exercice 35** — On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!^2}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $\phi_x : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} e^{ikt}$ et $I_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_x(t) e^{-int} dt$.
 - a) Calculer $I_n(x)$ puis, de deux façons différentes, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\phi_x(t)|^2 dt$.
 - b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{2x \cos(t)} dt$.

★★★ **Exercice 36** — *Théorème de Bohr-Mollerup*

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : x \mapsto x \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

1. Justifier la convergence simple de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $f : x \mapsto -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que f est l'unique fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant :
 - (i) $\forall x > 0, f(x+1) - f(x) = \ln(x)$
 - (ii) $f(1) = 0$
 - (iii) f convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

4. (5/2) Montrer que $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}$.

★★★ **Exercice 37** — Soit $f_0(x) = \frac{1}{x}$ et $f_n(x) = \frac{2x}{x^2 - n^2}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que la somme f de $\sum f_n$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, impaire, 1-périodique et qu'elle vérifie $2f(2x) = f(x) + f\left(x + \frac{1}{2}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \frac{\mathbb{Z}}{2}$.
2. Montrer que $g : x \mapsto f(x) - \pi \cotan(\pi x)$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. En considérant $\max_{[0,1]} |g|$ sur $[0, 1]$, montrer que g est nulle.
3. En déduire que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2} \right)$.

⊗ Partie C – Approximation uniforme

★ **Exercice 38** — *Lemme de Riemann-Lebesgue*

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{K})$. Montrer que $\int_a^b f(t) e^{int} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}_{p.m.}([a, b], \mathbb{K})$. Montrer que $\int_a^b f(t) e^{int} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

★ **Exercice 39** — *Théorème des moments*

Que peut-on dire de $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b t^n f(t) dt = 0$?

★ **Exercice 40** — *Approximation simultanée*

1. Soient $f, g \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$. Montrer qu'alors, pour tout $x_0 \in [a, b]$:

$$\|f - g\|_{\infty} \leq |f(x_0) - g(x_0)| + (b - a) \|f' - g'\|_{\infty}$$

2. En déduire que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$, il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers f telle que la suite $(P'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers f' .

★★ **Exercice 41** — *Approximation polynomiale de la racine carrée*

On considère la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes définie par $P_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(X - P_n^2)$$

1. Montrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est polynomiale et préciser le degré de P_n .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \geq 0, P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = (P_n(x) - \sqrt{x}) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}(P_n(x) + \sqrt{x})\right)$$

3. Montrer que tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$.
4. En déduire que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$, en croissant, vers une fonction f à préciser.
5. Prouver que la convergence de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f est uniforme.

***** Exercice 42** — *Produit de convolution et approximation de l'unité*

On note $\mathcal{E}$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ nulles en dehors d'un segment. On définit alors, pour tous $f, g \in \mathcal{E}$, l'application $f * g$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt$$

1. Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{E}$. Prouver qu'elle est commutative et distributive par rapport à l'addition.
2. On appelle approximation de l'unité toute suite (e_n) de fonctions positives de $\mathcal{E}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e_n(t) dt = 1 \quad \text{et} \quad \forall \alpha > 0, \quad \int_{|t| \geq \alpha} e_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Montrer que pour tout $f \in \mathcal{E}$ et toute approximation $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'unité, $(f * e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

3. On pose, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx \quad \text{et} \quad e_n(t) = \frac{(1-t^2)^n}{\lambda_n} \text{ si } |t| \leq 1, \quad e_n(t) = 0 \text{ sinon}$$

- a) Vérifier que (e_n) est une approximation de l'unité puis que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{E}$ nulle en dehors de $[-1/2, 1/2]$, $f * e_n$ est polynomiale.
- b) En déduire le théorème de Weierstrass.

**** Exercice 43** — Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales réelles convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f .

Montrer que f est une fonction polynomiale.

***** Exercice 44** — *Approximation uniforme polynomiale sur $\mathbb{R}$*

Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales réelles, toutes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver l'équivalence des assertions suivantes :

- (i) il existe $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts tels que si $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(P_k(x_i))_{k \in \mathbb{N}}$ converge ;
- (ii) la suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$;
- (iii) la suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

On montrera que la limite de $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est polynomiale, de degré au plus n .