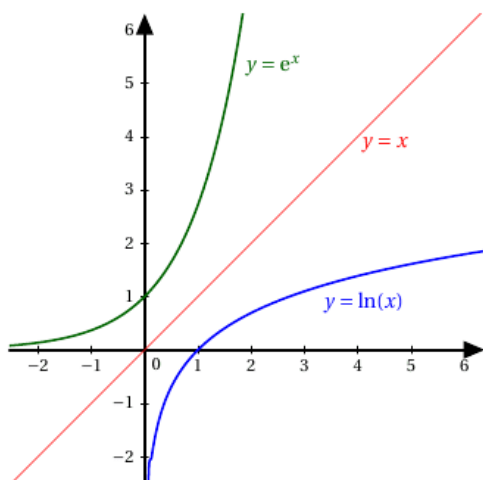


Fonction logarithme népérien – Fiche de cours

1. Définition

La réciproque de e^x s'appelle fonction logarithme népérien et est définie par :

$$\begin{cases} x \rightarrow \ln x \\]0; +\infty[\rightarrow]-\infty; +\infty[\end{cases}$$



2. Propriétés

- $x \in]0; 1[\ln x < 0$
- $x = 1 \ln x = 0$
- $x \in]1; +\infty[\ln x > 0$

3. Règles de calcul

$$\forall a > 0 \forall b > 0 \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b) \quad \ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right) \quad n \cdot \ln a = \ln a^n$$

4. Liens avec la fonction exponentielle

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R} ; \ln e^a &= a \\ \forall b \in]0; +\infty[; e^{\ln b} &= b \end{aligned}$$

5. Equations et inéquations logarithmiques

$$\forall a > 0 \forall b > 0$$

$$\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b \quad \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b \quad \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$$

6. Limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

7. Composition de fonction

- Dérivée $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$

- Fonction associée

Soit u une fonction à valeur positives définie sur I
 u et $\ln u$ ont les mêmes variations sur I

Fonction logarithme népérien – Exercices – Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

Exprimer en fonction de $\ln(3)$ les expressions suivantes :

$$A = 2 \ln(9) - 5 \ln(3) \qquad B = 3 \ln\left(\frac{1}{9}\right) + 2 \ln(27)$$

$$C = \ln(81) - 3 \ln(27)$$

Exercice 2 corrigé disponible

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$\bullet \ln(x - 4) > 0 \qquad \ln(8x - 4) = 1$$

$$\bullet \ln(x^2 + 4) > \ln(5x)$$

Exercice 3 corrigé disponible

Déterminer les dérivées et dresser le tableau de variation des fonctions suivantes définies sur $]0; +\infty[$

$$f(x) = 5x - 2 \ln(x) \qquad g(x) = 2x^3 \ln(x)$$

$$h(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x}$$

Exercice 4 corrigé disponible

On considère la fonction g définie sur $]0; 10]$ par $g(x) = x - 3 - 2 \ln(x)$.

1. Déterminer la limite en 0 de g . Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C}_g ?
2. Calculer la dérivée g' de g .
3. Déterminer le signe de g' sur $]0; 10]$.
4. En déduire le tableau de variation de g .
5. Donner à 10^{-2} près, à l'aide de la calculatrice, les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

Exercice 5 corrigé disponible

On considère l'équation : $3 \ln(x) - \ln(x + 30) = 2 \ln(5)$, où x appartient à l'intervalle $]0; +\infty[$.

Donner, parmi les quatre propositions suivantes, la solution de cette équation.

- | | |
|-------|-------------|
| a. 0 | b. e^{-5} |
| c. 10 | d. 20 |

Exercice 6 corrigé disponible

on admet que, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction θ est définie par :

$$\theta(t) = 580 e^{-0,1t} + 20.$$

L'inéquation $\theta(t) \leq 40$, d'inconnue t , admet comme ensemble solution sur $[0; +\infty[$:

- | | |
|---|--|
| a. l'intervalle $\left[0; 10 \ln\left(\frac{1}{29}\right)\right]$ | b. l'intervalle $\left[-10 \ln\left(\frac{1}{29}\right); +\infty\right]$ |
| c. l'intervalle $\left[0; \frac{10}{29}\right]$ | d. l'ensemble vide (pas de solution) |

Exercice 7

1. Montrer, en détaillant vos calculs, que :

$$\ln(2025) = 4 \ln(3) + 2 \ln(5).$$

2. Simplifier le nombre A ci-dessous en détaillant les calculs :

$$A = 2 \ln(e^4) - 3 \ln\left(\frac{1}{e}\right).$$

Exercice 8

PROPOSITION 1 : $\ln 10000 - \ln 0,1 + \ln 0,01 = 3 \ln 10$.

PROPOSITION 2 : La solution de l'équation $2 \ln x = 1$ est $\frac{e}{2}$.

PROPOSITION 3 : L'équation $2 \ln x = \ln(4x - 3)$ admet une seule solution $x = 1$.

PROPOSITION 4 : L'ensemble des solutions de l'inéquation

$$\ln \frac{1}{x} - \ln x \geq 0 \text{ est l'intervalle }]0; 1].$$

PROPOSITION 5 : La fonction F définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$F(x) = \ln(x^3) - 2 \text{ est une primitive de la}$$

$$\text{fonction } f \text{ définie par } f(x) = \frac{3}{x}.$$

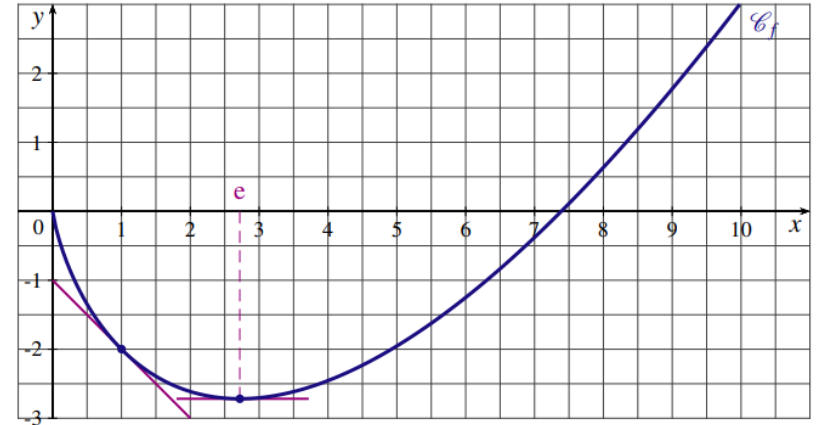
Exercice 9

La fonction f est définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = x(\ln(x) - 2)$.

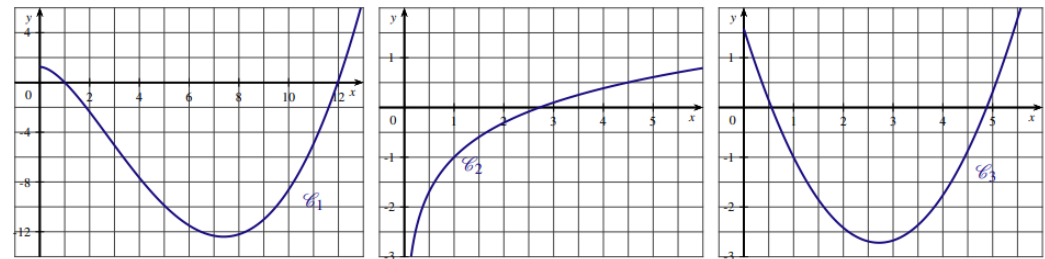
- Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
- Calculer la limite de la fonction f en 0.
 - Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ on a $f'(x) = \ln(x) - 1$.
- Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel x .
 - Donner le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse e^2 .

Exercice 10

On a tracé ci-dessous, la courbe \mathcal{C}_f représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$.



- On note f' la dérivée de la fonction f .
Par lecture graphique, déterminer $f'(1)$ et $f'(e)$.
- Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la dérivée f' de la fonction f et une autre d'une primitive F de la fonction f .
Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F . Justifier la réponse.



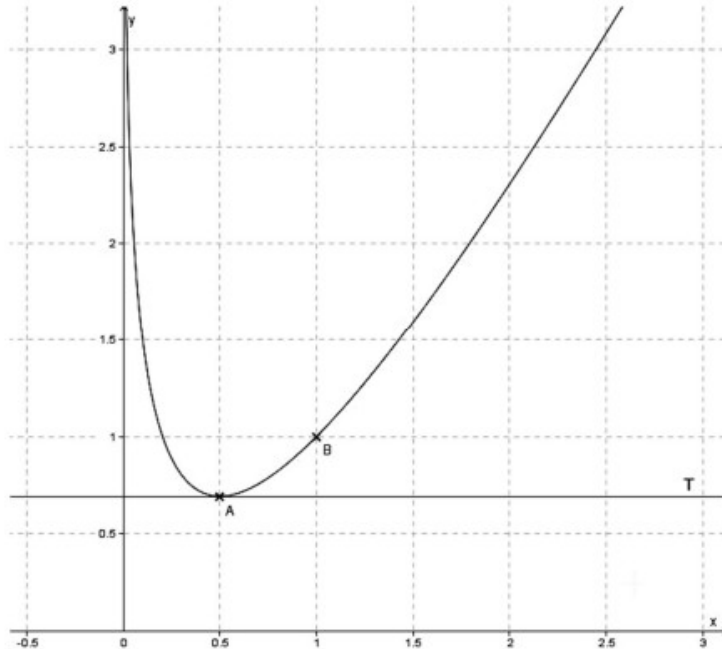
Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = ax + b - \ln(x)$ où a et b sont des nombres réels. On note C_f la courbe représentative de f tracée dans le repère ci-dessous.

On note A le point d'abscisse 0,5 appartenant à la courbe C_f .

On note T la tangente à la courbe C_f au point A. La droite T est parallèle à l'axe des abscisses.

Le point B(1 ; 1) appartient à la courbe C_f .



- Donner la valeur de $f(1)$. En déduire une relation entre a et b .
- Justifier que $f'(0,5) = 0$. En déduire la valeur de a .
- En déduire la valeur de b .

Exercice 12

On considère la fonction f définie sur $]0 ; + \infty[$ par $f(x) = 2x - 1 - \ln(x)$.

- Montrer que pour tout x appartenant à $]0 ; + \infty[$, $f'(x) = \frac{2x-1}{x}$.
- Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0 ; + \infty[$ en faisant figurer la valeur exacte de son extremum. On précisera les limites aux bornes de l'intervalle.