Limites de Fonctions

#TerminaleSpéMaths

4 Formes Indéterminées (F.I.) :

$$"+\infty-\infty" \quad ; \quad "\infty\times 0" \quad ; \quad "\frac{\infty}{\infty}" \quad \text{et} \quad "\frac{0}{0}"$$

Comment lever les F.I. ?

- **Polynômes et quotient de polynômes :**

factoriser par le terme du plus haut degré

$$\frac{x^3-2x}{x^2-3x+1}=\frac{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

- **Radicaux :**

multiplier et diviser par le radical

$$\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{\sqrt{x}}{x}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{x}{x\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

- **Croissances comparées :**

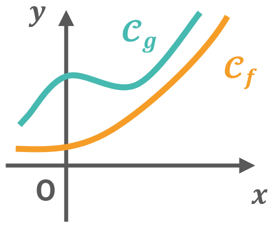
(voir la fiche « fonctions exp et ln »)

$$\lim_{n\to-\infty} x^n.e^x=0 \qquad \lim_{n\to 0^+} x^n.\ln(x)=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=0$$

Comparaison

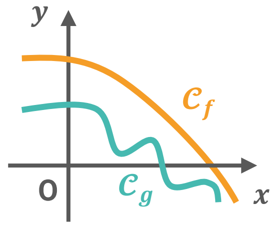
$f(x)\le g(x)$



Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

« Théorème de minoration »

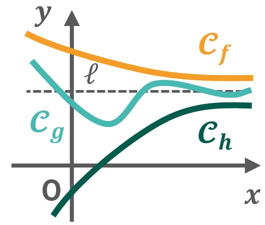
$f(x)\ge g(x)$



Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

« Théorème de majoration »

$f(x)\ge g(x)\ge h(x)$

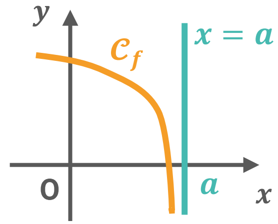


Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$
et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\ell$
Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\ell$

« Théorème des gendarmes »

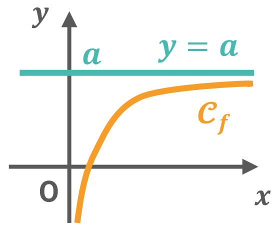
Asymptotes

Asymptote verticale



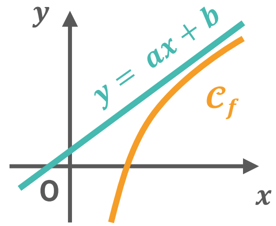
$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$$

Asymptote horizontale



$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=a$$

Asymptote oblique



$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$$

Exercice 1 : (2 points)

Déterminer la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$. Le démontrer.

Exercice 2 : (7 points)

1. Soit la fonction f définie sur $]5\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-5x+20}{-2x+10}$$

   et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan. Démontrer que $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes. Donner leurs équations.
2. Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 + 2x\cos x + 1$$

3. Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2\sin x}{x}$$

Exercice 3 : (2 points)

On considère la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ définie par :

$$f(x) = \frac{3-x}{x+1}$$

Déterminer $f''(x)$.

Exercice 4 : (5 points)

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;1[$ par :

$$f(x) = (-x+1)e^{-x+1}$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. En remarquant que $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{e^{x-1}}{-x+1}}$, déterminer la limite de f en 1.
3. Montrer que $f'(x) = (x-2)e^{-x+1}$.
4. Déterminer le tableau de variation de f.

Exercice 5 : (4 points)

Entourer la bonne réponse. Une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise réponse enlève 0,25 point, une absence de réponse n'enlève ni ne rapporte de point.

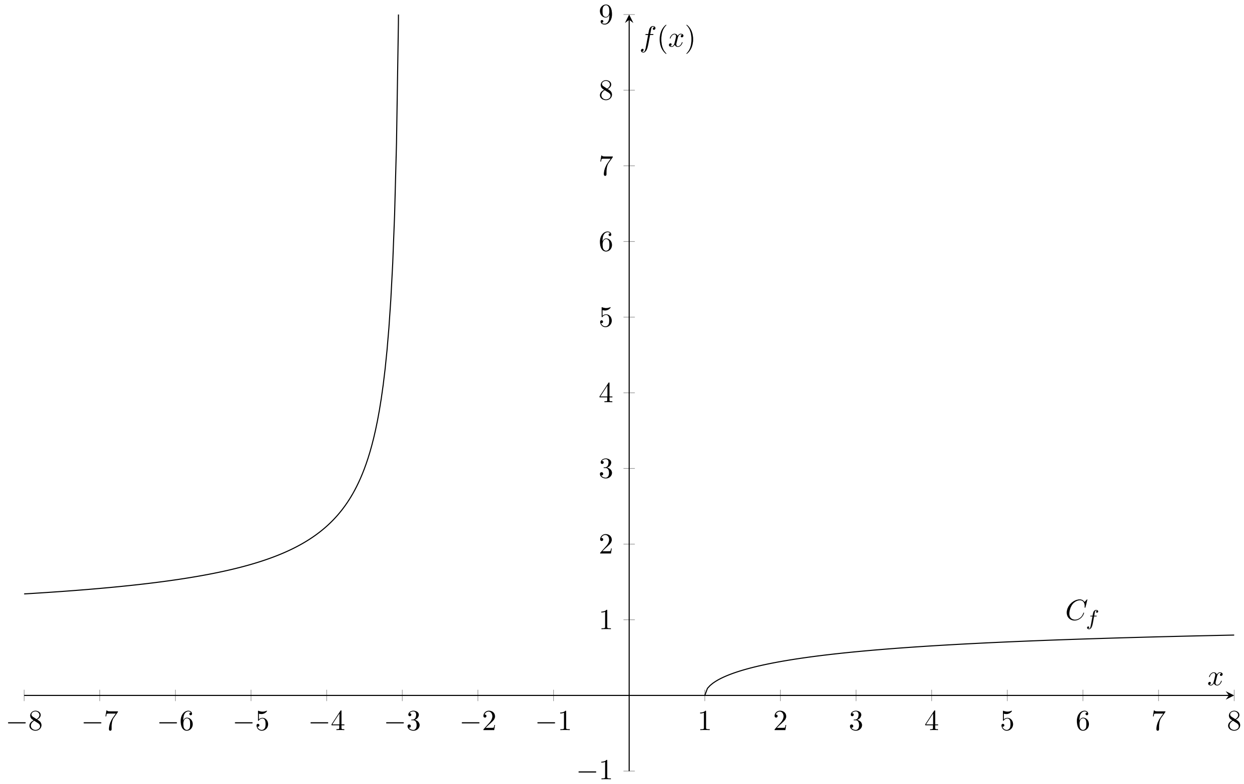
1.	Soit $f(x) = x^3(-x+1)^2$, définie sur $\mathbb{R}$. Alors la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 est horizontale.	Vrai	Faux
2.	Si g est définie sur $[-3\,;+\infty[$ par $g(x) = x\sqrt{x+3}$ alors $g'(x) = \dfrac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$ sur $]-3\,;+\infty[$.	Vrai	Faux
3.	Soit h une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $h'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. La dérivée de la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = h(2x+3)$ est : $$k'(x) = \frac{1}{2x^2+6x+5}$$	Vrai	Faux
4.	Soit la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par : $v(x) = (6x^3+1)^8$. Alors $v'(x) = 24x^2(6x^3+1)^7$.	Vrai	Faux

Exercice 1 :

On considère la fonction

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$$

et C_f sa courbe représentative tracée ci-dessous.



1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f =]-\infty; -3[\cup[1; +\infty[$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f \setminus \{1\}$:

$$f'(x) = \frac{2}{(x+3)^2}\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$$

3. Dresser le tableau de variation de f (sans indiquer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$).
4. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse -4 et tracer cette tangente sur le précédent graphique.
5. Tracer sur le précédent graphique la tangente à C_f en un point A d'abscisse a passant par l'origine du repère et déterminer graphiquement une valeur approchée de a.

Bonus : Retrouver par le calcul la valeur exacte de a.

Exercice 2 :

Dans cet exercice, les trois questions sont indépendantes.

1. Déterminer les limites suivantes :

   a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 7x + 1}{3x^3 + x^2 - 6}$ b) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \dfrac{3x^2 + 4x - 7}{x + 2}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 1}{\sqrt{x}}$

2. Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes.

   a) $f(x) = xe^{3x+1}$ b) $g(x) = (\sqrt{x} - 2)^4$

3. Soit f une fonction définie et dérivable sur $]-2; +\infty[$. On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé et on donne le tableau de variation suivant :

x	-2		$+\infty$
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	-5

   La courbe C_f possède-t-elle une (des) asymptote(s) ? Si oui, préciser l'équation.