
I	Dérivabilité des fonctions à valeurs vectorielles	3
I.1	Représentation d'une fonction à valeurs vectorielles	3
I.2	Rappels : continuité des fonctions à valeurs vectorielles	4
I.3	Définition	5
I.4	Opérations sur les fonctions dérivables	9
I.5	Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$	12
II	Rappels et compléments de Sup'	16
II.1	Continuité des fonctions à valeurs réels : théorèmes fondamentaux	16
II.2	Dérivation des fonctions à valeurs réels : théorèmes fondamentaux	21
II.3	Théorème fondamental de l'analyse	31
II.4	Calcul de primitives	36
II.5	Formules du Taylor	38

Extrait du programme

Dérivabilité des fonctions vectorielles

L'objectif de cette section est de généraliser aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ la notion de dérivée d'une fonction numérique. Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Interprétation d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ comme courbe paramétrée. Dérivabilité en un point. Dérivabilité sur un intervalle.	L'étude et le tracé d'arcs paramétrés sont hors programme. Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité d'ordre un. Traduction par les coordonnées dans la base canonique. Interprétation cinématique.
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivée de $L(f)$, où L est linéaire et f à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1, \dots, f_p)$, où M est p -linéaire, et $f, g, f_1, \dots, f_p$ à valeurs vectorielles. Dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est à valeurs réelles et f à valeurs vectorielles. Fonction de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle.	La démonstration n'est pas exigible. Application au produit scalaire et au déterminant.

I. Dérivabilité des fonctions à valeurs vectorielles

Dans toute cette partie, sauf mention contraire, les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point) et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

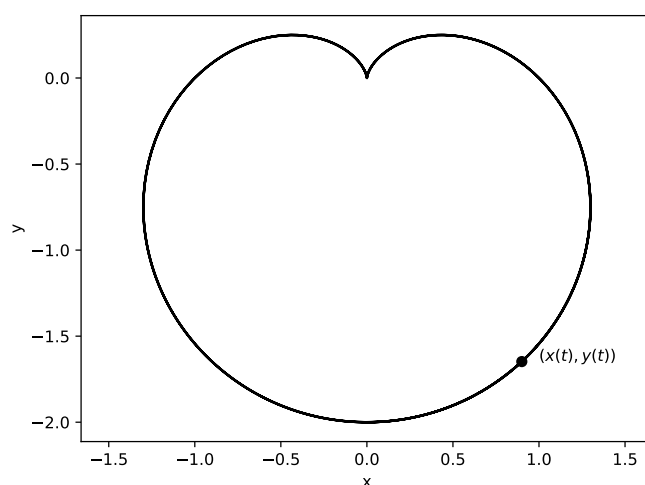
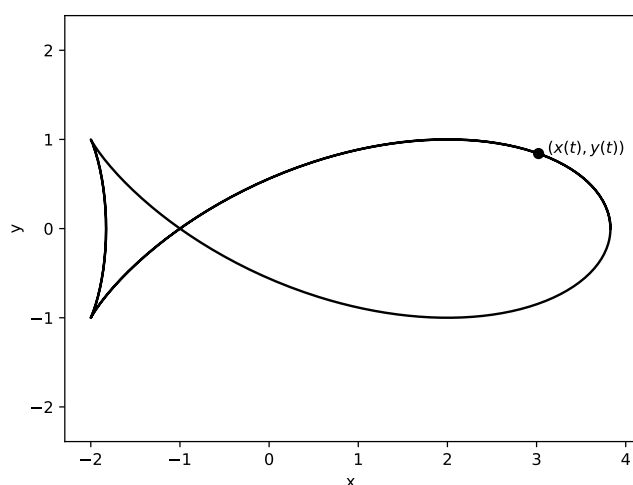
I.1. Représentation d'une fonction à valeurs vectorielles

On considère les fonctions :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \left(\cos(t) + 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right), \sin(t) \right) \quad t \mapsto (\sin(t)(1 + \sin(t)), -\cos(t)(1 + \sin(t))).$$

Pour représenter la fonction f (respectivement g), on place dans le plan les points $M(t)$ de coordonnées $f(t)$ (respectivement $g(t)$) lorsque t varie.

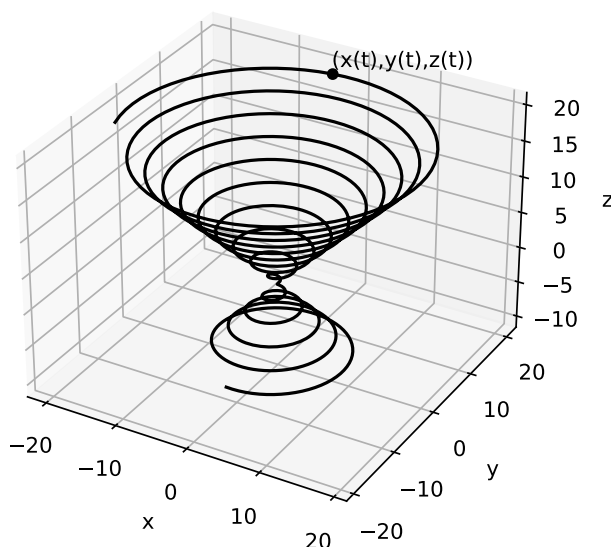


On considère la fonction :

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto (t \cos(t), t \sin(t), t).$$

Pour représenter la fonction h , on place dans le plan les points $M(t)$ de coordonnées $h(t)$ lorsque t varie.



On dit que les courbes précédentes sont des **courbes paramétrées**.

I.2. Rappels : continuité des fonctions à valeurs vectorielles



Définition 16.1 – Continuité en un point

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E , $f : A \rightarrow F$ une application et $a \in A$.

On dit que f est **continue en** a lorsque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.



Définition 16.2 – Continuité sur une partie

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E et $f : A \rightarrow F$ une application.

On dit que f est **continue sur** A lorsque f est continue en tout point de A .



Théorème 16.1 – Continuité sur une partie en dimension finie

Soient E et F deux espaces vectoriels normés de **dimension finie**, A une partie non vide de E et $f : A \rightarrow F$ une application.

Le fait que f est continue sur A ne dépend pas des normes sur E et F choisies.



Proposition 16.1

Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie (on note $n \geq 1$ la dimension de F), A une partie non vide de E et $f : A \rightarrow F$ une application.

On note $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F , et pour tout $x \in A$, $f(x) = f_1(x).\varepsilon_1 + \dots + f_n(x).\varepsilon_n$.

La fonction f est continue sur A si, et seulement si, les **applications coordonnées** $f_1, \dots, f_n$ sont continues sur A .

Exemple 16.1

Les fonctions présentées dans le paragraphe précédent sont continues sur $\mathbb{R}$.



Proposition 16.2

Une application polynomiale est continue.



Théorème 16.2

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de **dimensions finies**.

Toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue sur E .



Théorème 16.3

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $E_1, \dots, E_p, F$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de **dimensions finies**.

Toute application p -linéaire de $E_1 \times \dots \times E_p$ dans F est continue sur $E_1 \times \dots \times E_p$.

Remarque 16.1

En particulier une application bilinéaire (produit scalaire dans un espace euclidien, produit matriciel, déterminant en dimension 2) est continue.

I.3. Définition

Remarque 16.2

Dans cette partie, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\mathring{I}$ l'intervalle ouvert dont les extrémités sont celles de I . Par exemple,

- ▶ si $I = [0, 2[$, alors $\mathring{I} =]0, 2[$;
- ▶ si $I =]-\infty, -1]$, alors $\mathring{I} =]-\infty, -1[$;
- ▶ si $I =]2, +\infty[$, alors $\mathring{I} =]2, +\infty[$. .



Définition 16.3 – Dérivabilité en un point

Soit $a \in I$.

On dit que la fonction f est **dérivable** en a lorsque la fonction $t \mapsto \frac{1}{t-a} \cdot (f(t) - f(a))$ définie sur $I \setminus \{a\}$ admet une limite (finie lorsque $n = 1$) en a . Cette limite est alors notée $f'(a)$ et est appelée vecteur dérivé de f en a .

Remarque 16.3

$f'(a)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$. La fonction $t \mapsto \underbrace{\frac{1}{t-a}}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{(f(t) - f(a))}_{\in \mathbb{R}^n}$ est appelée taux d'accroissement de f en a .



Définition 16.4 – Dérivabilité à gauche et à droite en un point

Soit $a \in I$.

- ▶ On suppose que $a \in \mathring{I}$ ou $a = \sup I$.

On dit que la fonction f est **dérivable à gauche** en a lorsque la fonction $t \mapsto \frac{1}{t-a} \cdot (f(t) - f(a))$ définie sur $I \setminus \{a\}$ admet une limite (finie lorsque $n = 1$) à gauche en a . Cette limite est alors notée $f'_g(a)$.

- ▶ On suppose que $a \in \mathring{I}$ ou $a = \inf I$.

On dit que la fonction f est **dérivable à droite** en a lorsque la fonction $t \mapsto \frac{1}{t-a} \cdot (f(t) - f(a))$ définie sur $I \setminus \{a\}$ admet une limite (finie lorsque $n = 1$) à droite en a . Cette limite est alors notée $f'_d(a)$.

Remarque 16.4

Soit $a \in \mathring{I}$.

La fonction f est dérivable en a si, et seulement si, f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Remarque 16.5 – Rappel : tangente à la courbe représentative d'une fonction à valeurs réelles

On suppose que $n = 1$. Soit $a \in I$ tel que f est dérivable en a . Dans le repère orthonormé Oxy , la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a a pour équation :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a).$$

Lorsque f est dérivable à droite (respectivement à gauche) en a , on dit que la courbe représentative de f possède

une demi-tangente à droite (respectivement à gauche) au point d'abscisse a .

💡 Exemple 16.2

1. La fonction $f : t \mapsto |t|$ n'est pas dérivable en 0 mais est dérivable à gauche et à droite en 0 et on a : $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$. Dans ce cas, la courbe représentative de f possède deux demi-tangentes (d'équations $y = x$ et $y = -x$) au point d'abscisse 0.

2. La fonction $f : t \mapsto \sqrt{t}$ n'est pas dérivable en 0.

En effet, pour tout $t > 0$, $\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{\sqrt{t}}{(\sqrt{t})^2} = \frac{1}{\sqrt{t}} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} +\infty$. Dans ce cas, la courbe représentative de f possède une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

3. La fonction $f : t \mapsto \sqrt[3]{t}$ n'est pas dérivable en 0.

En effet, pour tout $t \neq 0$, $\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{\sqrt[3]{t}}{t} = \frac{\sqrt[3]{t}}{(\sqrt[3]{t})^3} = \frac{1}{(\sqrt[3]{t})^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} +\infty$. Dans ce cas, la courbe représentative de f possède une tangente verticale au point d'abscisse 0.

4. La fonction $f : t \mapsto \begin{cases} t \times \sin\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ n'est pas dérivable en 0.

En effet, pour tout $t \neq 0$, $\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ qui n'admet pas de limite en 0.

5. Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $f : t \mapsto (t, \cos(t), \text{Arctan}(t))$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$.

En effet, pour tout $t \neq a$, on a :

$$\frac{1}{t-a} \cdot (f(t) - f(a)) = \left(\frac{t-a}{t-a}, \frac{\cos(t) - \cos(a)}{t-a}, \frac{\text{Arctan}(t) - \text{Arctan}(a)}{t-a} \right) \xrightarrow{t \rightarrow a} \left(1, -\sin(a), \frac{1}{1+a^2} \right)$$

car les fonctions $t \mapsto t$, $\cos$ et Arctan sont dérivables en a .

⚙️ Théorème 16.4 – Dérivation composante par composante

Soit $a \in I$. On note $f_1, \dots, f_n$ les fonctions coordonnées de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$\forall t \in I, \quad f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)).$$

La fonction f est dérivable en a si, et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la fonction f_i est dérivable en a .

De plus, dans ce cas, on a

$$f'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_n(a)).$$

Démonstration

Pour tout $t \in I$ avec $t \neq a$, on a :

$$\frac{1}{t-a} \cdot (f_1(t), \dots, f_n(t)) - (f_1(a), \dots, f_n(a)) = \left(\frac{f_1(t) - f_1(a)}{t-a}, \dots, \frac{f_n(t) - f_n(a)}{t-a} \right).$$

Or, on sait que : $\left(\frac{f_1(t) - f_1(a)}{t-a}, \dots, \frac{f_n(t) - f_n(a)}{t-a} \right)$ possède une limite en a si, et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{f_i(t) - f_i(a)}{t-a}$ possède une limite finie en a .

Pour conclure, il suffit d'appliquer la définition de fonction dérivable. □

📖 Remarque 16.6

- On montre de la même manière que la fonction f est dérivable à gauche (respectivement à droite) en a si, et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la fonction f_i est dérivable à gauche (respectivement à droite) en a .
- Dans la proposition précédente, on considère les fonctions coordonnées de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On pourrait aussi considérer les fonctions coordonnées de f dans une autre base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$: la conclusion est alors la même. La fonction f est dérivable en a si, et seulement si, ses applications coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont

dérivables en a .

Définition 16.5 – Développement limité d'ordre un

Soit $a \in I$.

On dit que f possède un **développement limité d'ordre un en a** lorsqu'il existe u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = u + (t-a).v + (t-a).\varepsilon(t) \quad \text{et} \quad \varepsilon(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} (0, \dots, 0).$$

Théorème 16.5

Soit $a \in I$.

La fonction f est dérivable en a si, et seulement si f possède un développement limité à l'ordre un en a . Dans ce cas (avec les notations de la définition précédente), on a :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = f(a) + (t-a).f'(a) + (t-a).\varepsilon(t) \quad \text{où} \quad \varepsilon(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} (0, \dots, 0).$$

Démonstration

($\Rightarrow$) On suppose que f est dérivable en a .

Pour tout $t \neq a$, on a :

$$f(t) = f(a) + (t-a).f'(a) + (t-a) \left[\frac{1}{t-a} \cdot (f(t) - f(a)) - f'(a) \right].$$

Pour tout $t \neq a$, on pose $\varepsilon(t) = \frac{1}{t-a} \cdot (f(t) - f(a)) - f'(a)$ et $\varepsilon(a) = (0, \dots, 0)$.

Comme f est dérivable en a et $\varepsilon(a) = (0, \dots, 0)$, on a : $\varepsilon(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} (0, \dots, 0)$.

De plus, par construction, pour tout $t \in I$,

$$f(t) = f(a) + (t-a).f'(a) + (t-a).\varepsilon(t).$$

Donc, f possède un développement limité à l'ordre un en a .

($\Leftarrow$) On suppose que f possède un développement limité à l'ordre un en a . Il existe alors $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = u + (t-a).v + (t-a).\varepsilon(t) \quad \text{et} \quad \varepsilon(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} (0, \dots, 0).$$

En prenant $t = a$, on a : $u = f(a)$.

D'où, pour tout $t \neq a$,

$$\frac{1}{t-a} \cdot (f(t) - f(a)) = v + \varepsilon(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} v.$$

Donc f est dérivable en a et $f'(a) = v$. □

Corollaire 16.1

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Démonstration

Supposons f dérivable en a . Par la proposition précédente, f possède un développement limité à l'ordre un en a : il existe $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = f(a) + (t-a).f'(a) + (t-a).\varepsilon(t) \quad \text{et} \quad \varepsilon(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} (0, \dots, 0).$$

En faisant tendre t vers a , il vient $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} f(a)$. Donc, f est continue en a . □

Remarque 16.7 – Prudence ! La réciproque est fausse

Considérer par exemple la fonction valeur absolue qui est continue en 0 mais non dérivable en 0.

**Définition 16.6 – Fonction dérivée**

Lorsque la fonction f est dérivable en tout point de I , on dit que f est **dérivable sur I** .

De plus, la fonction

$$\begin{aligned} f' : I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto f'(t) \end{aligned}$$

est appelée **(fonction) dérivée de f** .

**Théorème 16.6**

La fonction f est dérivable sur I si, et seulement si, ses fonctions coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont dérivables sur I .

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème 16.4

□

 Remarque 16.8

Attention à ne pas confondre : « f est dérivable à droite en a » et « f' possède une limite à droite en a ».

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto \begin{cases} t^2 \times \sin\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

La fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ car :

$$\forall t \neq 0, \quad \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = t \times \sin\left(\frac{1}{t}\right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

De plus, la fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par opérations sur les fonctions dérivables, et, pour tout $t \neq 0$,

$$f'(t) = 2t \times \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right).$$

Or, $2t \times \sin\left(\frac{1}{t}\right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ et $\cos\left(\frac{1}{t}\right)$ ne possède pas de limite en 0. Donc, f' ne possède pas de limite en 0.

 Remarque 16.9 – Interprétation cinématique de la dérivée

On considère un point mobile M_t , dont la position dépend du temps, qui se déplace dans le plan ($n = 2$) ou dans l'espace ($n = 3$).

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(t) = \overrightarrow{OM_t}$, où O est l'origine du plan ou de l'espace. La trajectoire du point mobile est l'ensemble $\{f(t) | t \in \mathbb{R}_+\}$ (on s'autorise à identifier le point M_t et le vecteur $f(t)$).

On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Le vecteur vitesse instantanée du point M_a à l'instant a est $f'(a) = \frac{d\overrightarrow{OM_a}}{dt}$.

I.4. Opérations sur les fonctions dérivables



Proposition 16.3 – Combinaison linéaire

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Si f et g sont dérivables en $a \in I$, alors $\lambda.f + \mu.g$ est dérivable en a et $(\lambda.f + \mu.g)'(a) = \lambda.f'(a) + \mu.g'(a)$.

Démonstration

Pour tout $t \in I$ avec $t \neq a$, on a

$$\frac{1}{t-a} \cdot ((\lambda.f + \mu.g)(t) - (\lambda.f + \mu.g)(a)) = \lambda \cdot \frac{1}{t-a} \cdot (f(t) - f(a)) + \mu \cdot \frac{1}{t-a} \cdot (g(t) - g(a)) \xrightarrow{t \rightarrow a} \lambda.f'(a) + \mu.g'(a).$$

Donc, $\lambda.f + \mu.g$ est dérivable en a et $(\lambda.f + \mu.g)'(a) = \lambda.f'(a) + \mu.g'(a)$. □



Théorème 16.7 – Combinaison linéaire

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Si f et g sont dérivables sur I , alors $\lambda.f + \mu.g$ est dérivable sur I et $(\lambda.f + \mu.g)' = \lambda.f' + \mu.g'$.

Démonstration

Conséquence immédiate de la proposition précédente. □

Remarque 16.10

L'ensemble des applications dérivables sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}^n$.



Proposition 16.4 – Composée d'une application linéaire et d'une application dérivable

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, une application **linéaire**.

On note abusivement $L(f)$ la fonction $L \circ f$.

Si f est dérivable en $a \in I$, alors $L \circ f$ est dérivable en a et $(L \circ f)'(a) = L(f'(a))$.

Démonstration

Pour tout $t \in I$ avec $t \neq a$, par linéarité de L , on a : $\frac{1}{t-a} \cdot ((L(f))(t) - (L(f))(a)) = \frac{1}{t-a} \cdot (L(f(t)) - L(f(a))) = L\left(\frac{1}{t-a} \cdot (f(t) - f(a))\right)$.

Or, f est dérivable en a , donc $\frac{1}{t-a} \cdot (f(t) - f(a)) \xrightarrow{t \rightarrow a} f'(a)$.

De plus, L est une application linéaire en dimension finie, donc est continue sur $\mathbb{R}^n$.

D'où, $\frac{1}{t-a} \cdot ((L(f))(t) - (L(f))(a)) \xrightarrow{t \rightarrow a} L(f'(a))$.

Ainsi, $L(f)$ est dérivable en a et $(L(f))'(a) = L(f'(a))$. □



Théorème 16.8 – Composée d'une application linéaire et d'une application dérivable

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, une application **linéaire**.

Si la fonction f est dérivable sur I , alors la fonction $L \circ f$ est dérivable sur I et

$$(L(f))' = L(f').$$

Démonstration

Conséquence immédiate de la proposition précédente. □

**Proposition 16.5 – Composée d’une application bilinéaire et d’applications dérivables**

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, avec $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$ une application **bilinéaire**. On note abusivement la fonction $B(f, g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$.

Si f et g sont dérivables en $a \in I$, alors $B(f, g)$ est dérivable en a et

$$(B(f, g))'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a)).$$

Démonstration

Pour tout $t \in I$ avec $t \neq a$, on a :

$$\frac{1}{t-a} \cdot [(B(f, g))(t) - (B(f, g))(a)] = \frac{1}{t-a} \cdot [B(f(t), g(t)) - B(f(a), g(a))] = \frac{1}{t-a} \cdot [B(f(t), g(t)) - B(f(a), g(t)) + B(f(a), g(t)) - B(f(a), g(a))].$$

D’où, par bilinéarité de B , on a :

$$\frac{1}{t-a} \cdot [(B(f, g))(t) - (B(f, g))(a)] = B\left(\frac{1}{t-a} \cdot (f(t) - f(a)), g(t)\right) + B\left(f(a), \frac{1}{t-a} \cdot (g(t) - g(a))\right).$$

Or, f est dérivable en a , donc $\frac{1}{t-a} \cdot (f(t) - f(a)) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} f'(a)$. De même, g est dérivable en a , donc est continue en a et : $g(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} g(a)$ et $\frac{1}{t-a} \cdot (g(t) - g(a)) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} g'(a)$.

De plus, B est une application bilinéaire en dimension finie, donc est continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

D’où, $\frac{1}{t-a} \cdot [(B(f, g))(t) - (B(f, g))(a)] \xrightarrow[t \rightarrow a]{} B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$.

Ainsi, $B(f, g)$ est dérivable en a et $(B(f, g))'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$. □

**Théorème 16.9 – Composée d’une application bilinéaire et d’applications dérivables**

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, avec $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$ une application **bilinéaire**. Si les fonctions f et g sont dérivables sur I , alors la fonction $B(f, g)$ est dérivable sur I et

$$(B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g').$$

Démonstration

Conséquence immédiate de la proposition précédente. □

**Exemple 16.3 – Cas particuliers classiques**

- L’application $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire. Donc, si f et g sont deux fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors l’application $f \times g$ est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$, $(f \times g)'(t) = f'(t) \times g(t) + f(t) \times g'(t)$. On retrouve un résultat bien connu !
- L’application $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est bilinéaire. Donc, si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont deux fonctions dérivables sur I , alors l’application $\alpha \cdot f : t \mapsto \alpha(t) \cdot f(t)$ est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$, $(\alpha \cdot f)'(t) = \alpha'(t) \cdot f(t) + \alpha(t) \cdot f'(t)$.
- Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On sait que l’application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire, donc, si f et g sont deux fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, alors l’application $\langle f, g \rangle : t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle$ est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$,

$$\langle f, g \rangle'(t) = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle.$$

En particulier, par symétrie du produit scalaire, on a : pour tout $t \in I$, $(\|f\|^2)' = 2 \langle f(t), f'(t) \rangle$ (où $\|f\|^2 : t \mapsto \|f(t)\|^2$).

Théorème 16.10 – Composée d'une application multilinéaire et d'applications dérivables

Soient $f_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}, \dots, f_q : I \rightarrow \mathbb{R}^{n_q}$, avec $n_1, \dots, n_q$ des entiers naturels non nuls.

Soit $M : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$ une application **p -linéaire**.

Si les fonctions $f_1, \dots, f_q$ sont dérivables sur I , alors la fonction $M(f_1, \dots, f_q)$ est dérivable sur I et

$$(M(f_1, \dots, f_q))' = M(f_1', f_2, \dots, f_q) + M(f_1, f_2', \dots, f_q) + \dots + M(f_1, \dots, f_{q-1}', f_q) = \sum_{k=1}^q M(f_1, \dots, f_k', \dots, f_q).$$

Démonstration

Similaire à la démonstration du théorème 16.9 page 10. □

Exemple 16.4

Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^3$. L'application $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est 3-linéaire. Donc, si f_1, f_2, f_3 sont des fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, alors l'application $\det_{\mathcal{B}}(f_1, f_2, f_3) : t \mapsto \det_{\mathcal{B}}(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$,

$$(\det_{\mathcal{B}}(f_1, f_2, f_3))'(t) = \det_{\mathcal{B}}(f_1'(t), f_2(t), f_3(t)) + \det_{\mathcal{B}}(f_1(t), f_2'(t), f_3(t)) + \det_{\mathcal{B}}(f_1(t), f_2(t), f_3'(t)).$$



Exercice 16.1

On considère un point mobile M_t , dont la position dépend du temps. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(t) = \overrightarrow{OM_t}$ et on suppose f dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que si M_t se déplace sur une sphère centrée en 0, alors à chaque instant t le vecteur position de M_t est orthogonal à son vecteur vitesse instantanée.

Résolution

Le point se déplace sur une sphère donc sa norme est constante. Autrement dit, l'application $\varphi : t \mapsto \|f(t)\|^2$ est constante.

Or, cette application est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (cf. remarque précédente) et, pour tout $t \geq 0$, $\varphi'(t) = 2 \langle f(t), f'(t) \rangle$.

Donc, pour tout $t \geq 0$, $\langle f(t), f'(t) \rangle = 0$.



Proposition 16.6 – Composition

Soient $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ où J est un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$. On suppose que $\phi(I) \subset J$.

Si ϕ est dérivable en $a \in I$ et f est dérivable en $\phi(a)$, alors $f \circ \phi$ est dérivable en a et $(f \circ \phi)'(a) = \phi'(a).f'(\phi(a))$.

Démonstration

On sait que f possède un développement limité à l'ordre un en $\phi(a)$: il existe $\varepsilon : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $s \in J$,

$$f(s) = f(\phi(a)) + (s - \phi(a)).f'(\phi(a)) + (s - \phi(a)).\varepsilon(s) \quad \text{et} \quad \varepsilon(s) \xrightarrow{s \rightarrow \phi(a)} (0, \dots, 0)$$

D'où, pour tout $t \in I$ ($\phi(t) \in J$),

$$f \circ \phi(t) = f(\phi(a)) + (\phi(t) - \phi(a)).f'(\phi(a)) + (\phi(t) - \phi(a)).\varepsilon(\phi(t)).$$

De plus, ϕ possède un développement limité à l'ordre un en a : il existe $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in I$,

$$\phi(t) = \phi(a) + (t - a) \times \phi'(a) + (t - a) \times \eta(t), \quad \text{et} \quad \eta(t) \xrightarrow{t \rightarrow a} 0.$$

D'où, pour tout $t \in I$,

$$f \circ \phi(t) = f(\phi(a)) + (t - a) \times \phi'(a).f'(\phi(a)) + \underbrace{(t - a) \times \eta(t).f'(\phi(a)) + ((t - a) \times \phi'(a) + (t - a) \times \eta(t)).\varepsilon(\phi(a) + (t - a) \times \phi'(a) + (t - a) \times \eta(t))}_{=(t-a).h(t)}.$$

On définit ainsi, pour tout $t \in I$, $h(t) = \eta(t).f'(\phi(a)) + (\phi'(a) + \eta(t)).\varepsilon(\phi(a) + (t-a) \times \phi'(a) + (t-a) \times \eta(t))$.

Or, $\eta(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} 0$ et $\varepsilon(s) \xrightarrow[s \rightarrow \phi(a)]{} (0, \dots, 0)$.

D'où, par opérations sur les limites, $\varepsilon(\phi(a) + (t-a) \times \phi'(a) + (t-a) \times \eta(t)) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} (0, \dots, 0)$, puis $h(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} (0, \dots, 0)$. $\square$

Théorème 16.11 – Composition

Soient $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ où J est un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$. On suppose que $\phi(I) \subset J$. Si ϕ est dérivable sur I et f est dérivable sur J , alors $f \circ \phi$ est dérivable sur I et $(f \circ \phi)' = \phi' \cdot (f' \circ \phi)$.

Démonstration

Conséquence immédiate de la proposition précédente. $\square$

I.5. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition 16.7 – Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

- On dit que l'application $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de **classe $\mathcal{C}^0$ sur I** lorsque f est continue sur I .
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que l'application $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de **classe $\mathcal{C}^k$ sur I** lorsque f est dérivable sur I et la fonction f' est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I .
La dérivée k -ème de f est définie par $f^{(k)} = (f')^{(k-1)}$.
- On dit que l'application $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de **classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I** lorsque f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I , pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque 16.11

- Dire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I signifie que f est dérivable sur I et que sa dérivée f' est continue sur I .
- Lorsque $k = 2$, on note aussi f'' la fonction $f^{(2)}$ (la fonction f est dérivable, la fonction f' est dérivable et la fonction f'' est continue).

Remarque 16.12 – Interprétation cinématique de la dérivée seconde

On considère un point mobile M_t , dont la position dépend du temps, qui se déplace dans le plan ($n = 2$) ou dans l'espace ($n = 3$).

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(t) = \overrightarrow{OM_t}$, où O est l'origine du plan ou de l'espace. La trajectoire du point mobile est l'ensemble $\{f(t) | t \in \mathbb{R}_+\}$ (on s'autorise à identifier le point M_t et le vecteur $f(t)$).

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$. Le vecteur accélération instantanée du point M_a à l'instant a est $f''(a) = \frac{d^2 \overrightarrow{OM_a}}{dt^2}$.

Notation 16.1

L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, de I dans $\mathbb{R}^n$ est noté $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$.

Proposition 16.7 – Combinaison linéaire

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$.

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I , alors $\lambda.f + \mu.g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $(\lambda.f + \mu.g)^{(k)} = \lambda.f^{(k)} + \mu.g^{(k)}$.

► Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I , alors $\lambda.f + \mu.g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .

Démonstration

- Récurrence.
- Utiliser le point précédent.

□

Remarque 16.13

L'ensemble $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (car sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}^n$).



Proposition 16.8 – Composée d'une application linéaire et d'une application de classe $\mathcal{C}^k$

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, une application **linéaire**.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I , alors $L(f)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $(L(f))^{(k)} = L(f^{(k)})$.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I , alors $L(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .

Démonstration

Récurrence. Idée : $(L(f))^{(k+1)} = (L(f'))^{(k)} = L(f'^{(k)})$.

□



Proposition 16.9 – Composée d'une application bilinéaire et d'applications de classe $\mathcal{C}^k$

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, avec $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$ une application **bilinéaire**.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I , alors $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, on a la formule de Leibniz :

$$(B(f, g))^{(k)} = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} B(f^{(p)}, g^{(k-p)}).$$

- Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I , alors $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .

Démonstration

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{H}_k$: « si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I , alors, $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et

$$(B(f, g))^{(k)} = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} B(f^{(p)}, g^{(k-p)}). »$$

Initialisation. $k = 1$. On suppose que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

On sait alors que la fonction $B(f, g)$ est dérivable sur I et $B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$.

Or, les fonctions f, f', g et g' sont continues sur I . De plus, B est une application bilinéaire en dimension finie, donc est continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

D'où, par opération sur les fonctions continues, $B(f, g)'$ est continue sur I .

Donc, $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

De plus,

$$\sum_{p=0}^1 \binom{1}{p} B(f^{(p)}, g^{(1-p)}) = B(f^{(0)}, g^{(1)}) + B(f^{(1)}, g^{(0)}) = B(f, g') + B(f', g).$$

Donc, $\mathcal{H}_1$.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{H}_k$ et on montrons $\mathcal{H}_{k+1}$.

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I .

En particulier, f et g sont dérivables sur I . D'où, $B(f, g)$ est dérivable sur I et $B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$.

Or, les fonctions f, f', g et g' sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I . Donc, par hypothèse de récurrence, $B(f', g)$ et $B(f, g')$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .

D'où, par opérations, $B(f, g)'$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .
Ainsi, $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I .

De plus, par hypothèse de récurrence,

$$B^{(k+1)} = (B')^{(k)} = (B(f', g) + B(f, g'))^{(k)} = (B(f', g))^{(k)} + (B(f, g'))^{(k)} = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} B(f^{(p+1)}, g^{(k-p)}) + \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} B(f^{(p)}, g^{(k-p+1)})$$

Le changement d'indice $j = p + 1$ dans la première somme donne :

$$B^{(k+1)} = \binom{k}{k} B(f^{(k+1)}, g^{(0)}) + \sum_{j=1}^k \left[\binom{k}{j-1} B(f^{(j)}, g^{(k-j+1)}) \right] + \sum_{p=0}^k \left[\binom{k}{p} B(f^{(p)}, g^{(k-p+1)}) \right] + \binom{k}{0} B(f^{(0)}, g^{(k+1)}).$$

En regroupant les deux sommes, puis en appliquant la formule de Pascal, il vient :

$$B^{(k+1)} = \binom{k+1}{k+1} B(f^{(k+1)}, g^{(0)}) + \sum_{p=1}^k \left[\binom{k+1}{p} B(f^{(p)}, g^{(k+1-p)}) \right] + \binom{k+1}{0} B(f^{(0)}, g^{(k+1)}) = \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} B(f^{(p)}, g^{(k+1-p)}).$$

Donc, $\mathcal{H}_{k+1}$. Ce qui achève la récurrence. $\square$



Exercice 16.2

Montrer que l'application $f : x \mapsto e^x \times (2x^2 + 3x - 5)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer ses dérivées successives.

Résolution

La fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

De plus, en notant $g : x \mapsto 2x^2 + 3x - 5$, on a par la formule de Leibniz :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \times e^x \times g^{(p)}(x) = e^x \times \left(\sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \times g^{(p)}(x) \right).$$

Or, pour tout $p \geq 3$, $g^{(p)} = \tilde{0}$, où $\tilde{0}$ désigne la fonction nulle. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 4x + 3$ et $g''(x) = 4$.

Donc,

$$\forall k \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(k)}(x) = e^x \times \underbrace{\left(g(x) + k \times g'(x) + \frac{k \times (k-1)}{2} \times g''(x) \right)}_{(*)} = (2x^2 + (4k+3)x + 2k^2 + k - 5) \times e^x.$$

De plus, $(*)$ montre que la relation trouvée est encore valable pour $k = 0$ et $k = 1$.



Proposition 16.10 – Composition

Soient $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ où J est un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$. On suppose que $\phi(I) \subset J$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Si ϕ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J , alors $f \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .
- Si ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J , alors $f \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .

Démonstration

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{H}_k$: « Si ϕ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J , alors $f \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I . »

Initialisation. $k = 1$. On suppose que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur J . On sait que la fonction $f \circ \phi$ est dérivable sur I et $(f \circ \phi)' = \phi' \cdot (f' \circ \phi)$.

Or, les fonctions ϕ , ϕ' et f' sont continues sur I , donc $(f \circ \phi)'$ est continue sur I par opération sur les fonctions continues.

Donc, $f \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

D'où, $\mathcal{H}_1$.

Hérédité. soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{H}_k$ et on montre $\mathcal{H}_{k+1}$.

Soient ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur J .

En particulier, ϕ et f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $(f \circ \phi)' = \phi' \cdot (f' \circ \phi)$.

Or, f' et ϕ sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I . D'où, par hypothèse de récurrence, $f' \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

De plus, l'application $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est bilinéaire.

$$(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$$

Donc, l'application $(f \circ \phi)' = \phi' \cdot (f' \circ \phi) = B(\phi', f' \circ \phi)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .
Donc, $\mathcal{H}_{k+1}$. Ce qui achève la récurrence. □

II. Rappels et compléments de Sup'

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$.

II.1. Continuité des fonctions à valeurs réels : théorèmes fondamentaux



Exercice 16.3

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = g(x)$.

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.

Résolution

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On sait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, donc, il existe une suite (x_n) de nombres rationnels tel que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{Q}$, donc, $f(x_n) = g(x_n)$.

Or, par continuité de f et g , $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$ et $g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(x)$.

En passant à la limite dans $f(x_n) = g(x_n)$, on a : $f(x) = g(x)$.



Théorème 16.12 – Théorème des valeurs intermédiaires

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et $(a, b) \in I^2$ avec $a \leq b$.

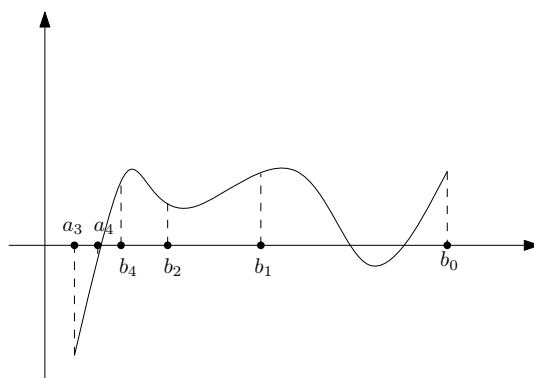
Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$.

Démonstration

Soit y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Quitte à remplacer f par $f - y$, on peut supposer que $y = 0$.

On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f(a_n)f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq 0 \\ \frac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f(a_n)f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f(a_n)f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq 0 \\ b_n & \text{si } f(a_n)f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0 \end{cases}$$



Par construction, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) \quad \text{et} \quad f(a_n)f(b_n) \leq 0.$$

La suite $(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, donc $b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Par théorème, elles convergent vers une même limite c .

De plus, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[a, b]$ donc (passage à la limite dans les inégalités) sa limite c appartient à $[a, b]$.

D'autre part, la fonction f est continue sur I , $c \in I$ et $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c$, donc par caractérisation séquentielle de la continuité, on a : $f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(c)$. De même, $f(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(c)$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n)f(b_n) \leq 0$. Donc, par passage à la limite, on obtient $f(c)^2 \leq 0$, donc, comme $f(c) \in \mathbb{R}$, on a : $f(c) = 0$. $\square$

Corollaire 16.2

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et $(a, b) \in I^2$ avec $a \leq b$.
Si $f(a) \times f(b) \leq 0$ alors, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires avec $y = 0$. □

 Remarque 16.14

Dans les deux résultats précédents, le réel c peut ne pas être unique.

 Exercice 16.4

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

On suppose que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

Résolution

L'hypothèse $f([a, b]) \subset [a, b]$ se réécrit : $\forall x \in [a, b], f(x) \in [a, b]$.

On note $g : x \mapsto f(x) - x$.

On sait que $f(a) \in [a, b]$, donc $g(a) = f(a) - a \geq 0$. On sait que $f(b) \in [a, b]$, donc $g(b) = f(b) - b \leq 0$.

De plus, g est continue sur l'intervalle $[a, b]$ comme somme de fonctions continues.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$.

Donc, $f(c) = c$.

 Remarque 16.15 – Algorithme de dichotomie

La démonstration du théorème des valeurs intermédiaires avec $y = 0$ donne une méthode algorithmique pour déterminer une valeur approchée d'une solution de l'équation $f(x) = 0$, d'inconnue réelle x .

Pour pouvoir appliquer l'algorithme, il suffit de connaître deux valeurs $a \leq b$ telles que $f(a)f(b) \leq 0$ (ce qui est équivalent à $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents) et de savoir la fonction f continue sur $[a, b]$.

 Python – Algorithme de dichotomie

```

1  def dichotomie(f, a, b, epsilon):
2      """
3      Renvoie une valeur approchée à epsilon près d'une solution de l'équation f(x)=0
4      Entrée : f une fonction, a et b des réels, epsilon un réel strictement positif
5      Sortie : m un réel
6      """
7      assert f(a)*f(b) <= 0, "Condition initiale non remplie"
8      while abs(b-a) > epsilon:
9          m = (a+b)/2
10         if f(a)*f(m) <= 0:
11             b = m
12         else:
13             a = m
14     return m

```

La valeur renvoyée appartient à un intervalle de longueur inférieure ou égale à ϵ et est donc bien une valeur approchée à ϵ près d'une solution de l'équation $f(x) = 0$.

Appliquons la fonction précédente pour déterminer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à $\epsilon = 10^{-10}$ près. Pour cela, on utilise la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2$, $a = 1$ et $b = 2$ (le choix de a et b est motivé par l'encadrement $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$).

 Python

```
1 >>> dichotomie(lambda x : x**2-2, 1, 2, 10**(-10))
2 1.4142135623260401
```

**Exercice 16.5**

Soit P un polynôme de degré impair. Montrer que P possède une racine réelle.

Résolution

On note d le degré de P et a_d son coefficient dominant (on sait donc que $a_d \neq 0$).

On a alors $P(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} a_d x^d$.

Cas 1 : $a_d > 0$. On a $P(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $P(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$.

Donc, la fonction continue $x \mapsto P(x)$ prend des valeurs positives et négatives.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, $x \mapsto P(x)$ s'annule.

Donc, P possède une racine réelle.

Cas 2 : $a_d < 0$. On applique le cas 1 à $-P$ (son coefficient dominant est $-a_d > 0$).

Donc, $-P$ possède une racine réelle, donc, P possède une racine réelle.

Corollaire 16.3

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I .

Si f ne s'annule pas sur I , alors

- ou bien f est strictement positive sur I ;
- ou bien f est strictement négative sur I .

Démonstration

Si f prend des valeurs strictement positives et strictement négatives, alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule. Contradiction. □

Corollaire 16.4 – Cas d'une fonction strictement monotone

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I et $(a, b) \in I^2$ avec $a \leq b$.

Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$.

Démonstration

L'existence de c est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.

La fonction f est strictement monotone, donc est injective sur I , ce qui assure l'unicité de c . □

**Théorème 16.13 – Théorème des valeurs intermédiaires**

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Démonstration

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $J \subset I$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

Montrons que $f(J)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Pour cela, montrons que, pour tout $(y_1, y_2) \in f(J)^2$ avec $y_1 \leq y_2$, on a : $[y_1, y_2] \subset f(J)$. Soit $(y_1, y_2) \in f(J)^2$.

On sait alors qu'il existe $(x_1, x_2) \in J^2$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.

Soit $z \in [y_1, y_2]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c compris entre x_1 et x_2 tel que $y = f(c)$.

Or, J est un intervalle et $(x_1, x_2) \in J^2$, donc $c \in J$, puis $z = f(c) \in f(J)$.

D'où, $[y_1, y_2] \subset f(J)$. Donc, $f(J)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. □

🔗 Théorème 16.14 – Théorème des bornes atteintes

Soient $a \leq b$ des réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors, f est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration

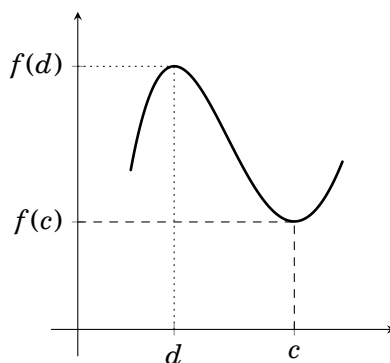
Hors-programme. □

🔗 Remarque 16.16

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ▶ f est bornée et atteint ses bornes ;
- ▶ il existe $(c, d) \in [a, b]^2$ tel que $f(c) = \min \{f(x) | x \in [a, b]\}$ et $f(d) = \max \{f(x) | x \in [a, b]\}$;
- ▶ il existe $(c, d) \in [a, b]^2$ tel que, pour tout $x \in [a, b]$, $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.

Théorème des bornes atteintes



🔗 Exercice 16.6

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

Résolution

On note $T > 0$ une période de f .

La fonction f est continue sur le **segment** $[0, T]$, donc, par le théorème des bornes atteintes, f est bornée sur $[0, T]$ et atteint ses bornes : il existe $(c, d) \in [0, T]^2$ tel que,

$$\forall x \in [0, T], f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par périodicité, il existe $x_0 \in [0, T]$ tel que $f(x) = f(x_0)$. Donc, $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

f est bornée et atteint ses bornes.

🔗 Exercice 16.7

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Montrer que f possède un minimum.

Résolution

On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Donc, par définition de limite, il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \leq -A$, $f(x) \geq f(0)$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Donc, par définition de limite, il existe $B \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \geq B$, $f(x) \geq f(0)$.

On a : $A < 0 < B$.

De plus, f est continue sur le segment $[A, B]$.

Donc, par le théorème des bornes atteintes, il existe $c \in [A, B]$ tel que, pour tout $x \in [A, B]$, $f(x) \geq f(c)$.

En particulier, comme $0 \in [A, B]$, on a : $f(0) \geq f(c)$.

De plus, pour tout $x < A$, on a $f(x) \geq f(0) \geq f(c)$.

De même, pour tout $x > B$, on a $f(x) \geq f(0) \geq f(c)$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq f(c)$.

La fonction f possède un minimum (ce minimum est atteint en c).



Exercice 16.8

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

On suppose que $[a, b] \subset f([a, b])$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

Résolution

L'hypothèse $[a, b] \subset f([a, b])$ se réécrit : $\forall x \in [a, b], x \in f([a, b])$.

La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$.

Par le théorème des bornes atteintes, il existe $(\alpha, \beta) \in [a, b]^2$ tel que $f([a, b]) = [f(\alpha), f(\beta)]$.

Comme précédemment, on note $g : x \mapsto f(x) - x$.

On a $\alpha \in [a, b]$. Donc, $\alpha \in f([a, b]) = [f(\alpha), f(\beta)]$. D'où, $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha \leq 0$.

De même $\beta \in [a, b]$. Donc, $\beta \in f([a, b]) = [f(\alpha), f(\beta)]$. D'où, $g(\beta) = f(\beta) - \beta \geq 0$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c compris entre α et β tel que $g(c) = 0$. Donc, $f(c) = c$.

De plus, $(\alpha, \beta) \in [a, b]^2$ et c est compris entre α et β , donc $c \in [a, b]$.



Théorème 16.15

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I .

Si f est injective sur I , alors f est strictement monotone sur I .



Remarque 16.17 – La réciproque est vraie

Si f est strictement monotone sur I , alors f est injective sur I . L'hypothèse de continuité n'est pas nécessaire.



Théorème 16.16 – Théorème de la bijection

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I .

Alors,

1. $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$;
2. f réalise une bijection de I sur $f(I)$;
3. f^{-1} est de même variation que f ;
4. La bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ de f est continue sur $f(I)$.

 Remarque 16.18 – Forme de l'intervalle image $f(I)$

	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$I =$	$f(I) =$	$f(I) =$
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$\left[f(a), \lim_{x \rightarrow b} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b} f(x), f(a) \right]$
$]a, b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a} f(x), f(b) \right]$	$\left[f(b), \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right[$
$]a, b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow b} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b} f(x), \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right[$

II.2. Dérivation des fonctions à valeurs réels : théorèmes fondamentaux

 Théorème 16.17

Soient $f : I \rightarrow J$ une bijection de I sur J et $a \in I$. On suppose que f est continue et strictement monotone sur I et est dérivable en a .

Alors, la bijection réciproque f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si, et seulement si, $f'(a) \neq 0$.

Dans ce cas,

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

De plus, lorsque $f'(a) = 0$, la courbe représentative de f^{-1} possède une tangente verticale d'équation $x = b$ au point d'abscisse b .

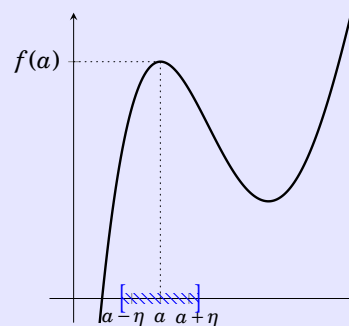
 Définition 16.8 – Extrema

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

On dit que f admet un **maximum global** (resp. un **minimum global**) en a lorsque, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(a) \leq f(x)$).

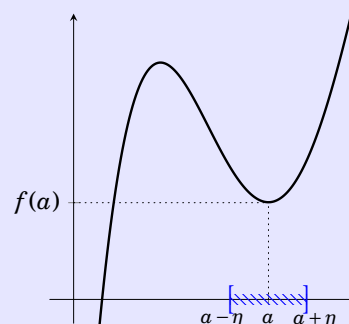
On dit que f possède un **maximum local** en a lorsqu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap [a - \eta, a + \eta]$,

$$f(x) \leq f(a).$$



On dit que f possède un **minimum local** en a lorsqu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap [a - \eta, a + \eta]$,

$$f(a) \leq f(x).$$



On dit que f possède un **extremum local** en a lorsque f possède un minimum ou un maximum local en a .

Théorème 16.18 – Condition nécessaire d'extremum en un point intérieur

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

Si

1. a n'est pas un extrémité de I ,
2. f est dérivable en a ,
3. f possède un extremum local en a ,

alors $f'(a) = 0$.

Démonstration

Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que f possède un maximum local en a .

Il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap [a - \eta, a + \eta]$, $f(x) \leq f(a)$.

Or, a n'est pas un extrémité de I , donc il existe $r \in]0, \eta]$ tel que $[a - r, a + r] \subset I$.

D'où, pour tout $x \in [a - r, a]$, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$.

Donc, en passant à la limite quand x tend vers a , on a $f'(a) \geq 0$.

De même, pour tout $x \in]a, a + r]$, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$. Donc, $f'(a) \leq 0$.

Donc, $f'(a) = 0$. □

 **Remarque 16.19 – Prudence! La condition « a est un point de l'intérieur de I » est très importante. .**

En effet, la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ possède un maximum global en 1 et un minimum global en 0, mais pour

$$x \mapsto x + 1$$

tout $x \in [0, 1]$, $f'(x) = 1 \neq 0$.

 Remarque 16.20 – Prudence ! La réciproque est fausse.

En effet, la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(0) = 0$ mais f ne possède pas d'extremum local en 0.

$$x \mapsto x^3$$

 Théorème 16.19 – Condition suffisante d'extremum en un point intérieur

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que a appartient à I et n'est pas une extrémité de I .
Si f possède un développement limité à l'ordre 2 en a de la forme :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} a_0 + a_2 h^2 + o(h^2),$$

avec $a_2 \neq 0$, alors f possède un extremum local en a .

En particulier,

- ▶ si $a_2 > 0$, alors f possède un minimum local en a ;
- ▶ si $a_2 < 0$, alors f possède un maximum local en a .

Démonstration

Le développement limité de f se réécrit : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_2(x-a)^2 + o((x-a)^2)$.

Du développement limité de f , on déduit $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} a_0$. Comme f est définie en a , on a $f(a) = a_0$.

De plus, comme $a_2 \neq 0$, on a : $f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_2(x-a)^2$.

Donc, $f(x) - f(a)$ est signe constant au voisinage de a . Donc, f possède un extremum local en a .

Plus précisément,

- ▶ si $a_2 > 0$, alors $f(x) - f(a) \geq 0$ au voisinage de a . Donc, f possède un minimum local en a ;
- ▶ si $a_2 < 0$, alors $f(x) - f(a) \leq 0$ au voisinage de a . Donc, f possède un maximum local en a .

□

 Remarque 16.21 – Que faire si le coefficient a_2 est nul ? On pousse le développement limité à un ordre supérieur !

Supposons qu'il existe $p \geq 2$ et $a_p \neq 0$ tel que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_p \times (x-a)^p + o((x-a)^p).$$

On sait que $a_0 = f(a)$ et :

$$f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_p \times (x-a)^p.$$

Ainsi :

Si p est impair, alors f ne possède pas d'extremum local en a .

Si p est pair et $a_p > 0$, alors f possède un minimum local en a .

Si p est pair et $a_p < 0$, alors f possède un maximum local en a .



Exercice 16.9

Soit $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{-1 + \cos(x) + x \times \sin(x)}{x^2}.$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et que le prolongement obtenu est dérivable en 0.
2. Montrer que f possède une extremum local en 0.

Résolution

1. On est amené à diviser par x^2 . Pour répondre à toutes les questions, on détermine un développement limité à l'ordre 4 du numérateur. On a :

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \quad \text{et} \quad \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Donc, par opérations sur les développements limités,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

On en déduit que : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} \frac{1}{2}$. Donc, f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \frac{1}{2}$.

De plus, f , ainsi prolongée, possède un développement limité à l'ordre 1 en 0. Donc, f est dérivable en 0.

Or, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + 0 \times x + o(x)$. Donc, $f'(0) = 0$.

2. On a $f(x) - f(0) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{8} + o(x^2)$. Donc, $f(x) - f(0) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{8} \leq 0$. Au voisinage de 0, on a $f(x) \leq f(0)$.

Donc, f possède un maximum local en 0.



Théorème 16.20 – Théorème de Rolle

Soient $a < b$ des réels et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si

1. f est continue sur $[a, b]$;
2. f est dérivable sur $]a, b[$;
3. $f(a) = f(b)$;

alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration

La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$, donc, par le théorème des bornes atteintes, il existe $(\alpha, \beta) \in [a, b]^2$ tel que :

$$\forall x \in [a, \beta], f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta).$$

Il y a trois cas.

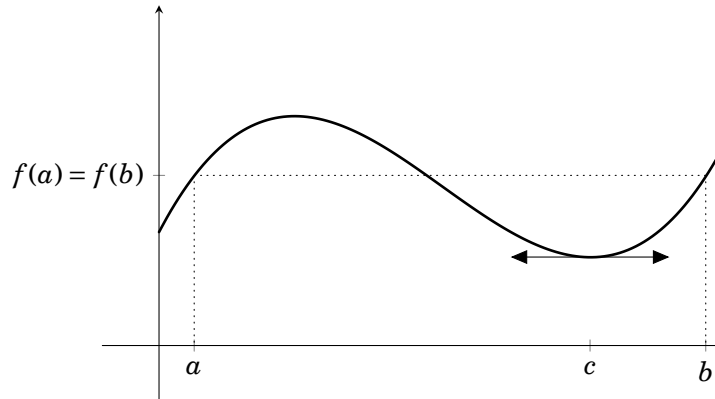
- Cas 1 : $\alpha \notin \{a, b\}$. La fonction f est dérivable en α , possède un minimum (local) en α et α n'est pas une extrémité de $[a, b]$. Donc, par le théorème précédent, $f'(\alpha) = 0$.
- Cas 2 : $\alpha \in \{a, b\}$ et $\beta \notin \{a, b\}$. La fonction f est dérivable en β , possède un maximum (local) en β et β n'est pas une extrémité de $[a, b]$. Donc, par le théorème précédent, $f'(\beta) = 0$.
- Cas 3 : $\alpha \in \{a, b\}$ et $\beta \in \{a, b\}$. Dans ce cas, comme $f(a) = f(b)$, on a $f(\alpha) = f(\beta)$. Donc, f est constante. Donc, tout point $c \in]a, b[$ vérifie $f'(c) = 0$.

Dans tous les cas, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

□

Remarque 16.22

1. Dans le théorème de Rolle, le point c n'est pas nécessairement unique.
2. Si une fonction vérifie le théorème de Rolle, alors son graphe possède une tangente horizontale.



3. On considère un point mobile se déplaçant sur une droite. Sa position à l'instant x est notée $f(x)$. On suppose qu'aux instants a et b le mobile se trouve à la même position. Si f est continue sur $[a, b]$ et est dérivable sur $]a, b[$, alors il existe un instant c où la vitesse instantanée du mobile est nulle : $f'(c) = 0$.



Exercice 16.10 – Classique!

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, où $a < b$ sont des réels.

On suppose que f s'annule $n + 1$ fois sur $[a, b]$.

1. Montrer que f' s'annule au moins n fois sur $]a, b[$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Résolution

1. On note $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1} \leq b$ tels que, $f(a_1) = \dots = f(a_n) = f(a_{n+1}) = 0$.
Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la fonction f est continue sur $[a_j, a_{j+1}]$, dérivable sur $]a_j, a_{j+1}[$ et $f(a_j) = 0 = f(a_{j+1})$, donc, par le théorème de Rolle, il existe $c_j \in]a_j, a_{j+1}[$ tel que $f'(c_j) = 0$.
De plus, on a $a \leq a_1 < c_1 < a_2 < c_2 < \dots < a_n < c_n < a_{n+1} \leq b$. Donc, les $c_1, \dots, c_n$ sont deux à deux distincts.
Donc, f' s'annule au moins n fois sur $]a, b[$.
2. On procède par récurrence. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on note $\mathcal{H}_k$: « La fonction $f^{(k)}$ s'annule au moins $n - k + 1$ fois sur $]a, b[$ ».

Initialisation. Le cas $n = 1$ a été traité dans la question précédente. Donc, $\mathcal{H}_1$.

Hérédité. Soit $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. On suppose $\mathcal{H}_k$ et on montre $\mathcal{H}_{k+1}$.

Par hypothèse de récurrence, la fonction $f^{(k)}$ s'annule au moins $n + 1 - k$ fois sur $]a, b[$.

On note $a < a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1-k} < b$ tels que, $f(a_1) = \dots = f(a_{n+1-k}) = 0$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, n - k \rrbracket$, la fonction $f^{(k)}$ est continue sur $[a_j, a_{j+1}]$, dérivable sur $]a_j, a_{j+1}[$ et $f^{(k)}(a_j) = 0 = f^{(k)}(a_{j+1})$, donc, par le théorème de Rolle, il existe $c_j \in]a_j, a_{j+1}[$ tel que $f^{(k+1)}(c_j) = 0$.

De plus, on a $a < a_1 < c_1 < a_2 < c_2 < \dots < a_{n-k} < c_{n-k} < a_{n+1-k} < b$. Donc, les $c_1, \dots, c_{n-k}$ sont deux à deux distincts.

Donc, $f^{(k+1)}$ s'annule au moins $n - k = n + 1 - (k + 1)$ fois sur $]a, b[$. Donc, $\mathcal{H}_{k+1}$.

Ce qui achève la récurrence : pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la fonction $f^{(k)}$ s'annule au moins $n - k + 1$ fois.

En particulier pour $k = n$, $f^{(n)}$ s'annule au moins 1 fois : il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Remarque 16.23 – Prudence! Le théorème de Rolle est faux si f n'est pas à valeurs réelles.

► Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto e^{it}$.

La fonction f est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$ (car ses parties réelle et imaginaire le sont) et

$f(0) = f(2\pi) = 1$. Par contre, sa dérivée ne s'annule pas : pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $f'(t) = ie^{it} \neq 0$ (car $|f'(t)| = 1$)

► Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto (\cos(t), \sin(t)).$

La fonction f est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$ (car ses applications coordonnées le sont) et $f(0) = f(2\pi) = (1, 0)$.

Par contre, sa dérivée ne s'annule pas : pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $f'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \neq (0, 0)$ (car $\|f'(t)\| = 1$).

Théorème 16.21 – Égalité des accroissements finis

Soient $a < b$ des réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si

1. f est continue sur $[a, b]$;
2. f est dérivable sur $]a, b[$;

alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Démonstration

On considère la fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

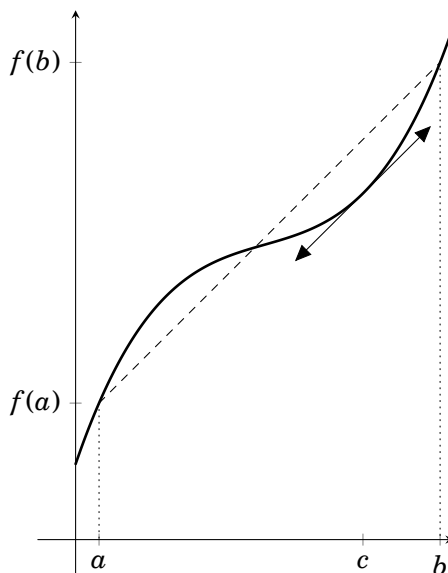
$$I \mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

La fonction g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $g(a) = f(a) = g(b)$.

Donc, par théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. D'où $f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$. □

Remarque 16.24

1. Dans l'égalité des accroissements finis, le point c n'est pas nécessairement unique.
2. Si une fonction vérifie l'égalité des accroissements finis, alors son graphe possède une tangente de même pente que la sécante passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.



3. On considère un point mobile se déplaçant sur une droite. Sa position à l'instant x est notée $f(x)$. Si f est continue sur $[a, b]$ et est dérivable sur $]a, b[$, alors il existe un instant c où la vitesse instantanée du mobile est égale à sa vitesse moyenne entre les instants b et a : $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

 **Remarque 16.25 – Prudence! L'égalité des accroissements finis est fausse si f n'est pas à valeurs réelles.**

L'égalité des accroissement finie est fausse si f n'est pas à valeurs réelles. Les contre-exemples du théorème de Rolle pour des fonctions à valeurs complexes ou dans $\mathbb{R}^2$ sont encore valables.

Corollaire 16.5

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

La fonction f est croissante (resp. décroissante) sur I si, et seulement si, la fonction f' est positive (resp. négative) sur I .

Démonstration

Exercice (appliquer l'égalité des accroissements finis).

 **Remarque 16.26**

On peut reformuler l'inégalité des accroissements finis : si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et si f' est bornée sur I , alors f est lipschitzienne.

Théorème 16.22 – Théorème de la limite de la dérivée

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. Si

1. f est continue sur I ;
2. f est dérivable en tout point de $I \setminus \{a\}$;
3. $f' : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ possède une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a ;

alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell.$$

De plus, lorsque $\ell \in \mathbb{R}$, on a aussi :

- ▶ f est dérivable en a ;
- ▶ $f'(a) = \ell$;
- ▶ f' est continue en a .

Démonstration

Soit $x \in I \setminus \{a\}$.

Si $x > a$, alors f est continue sur $[a, x]$ et dérivable sur $]a, x[$, donc, par l'égalité des accroissements finis, il existe $c_x \in]a, x[$ tel que $f'(c_x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

De même, si $x < a$, il existe $c_x \in]x, a[$ tel que $f'(c_x) = \frac{f(a) - f(x)}{a - x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on a $|c_x - a| \leq |x - a|$. Donc, par théorème, $c_x \xrightarrow{x \rightarrow a} a$.

De plus, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, $c_x \in I \setminus \{a\}$. Donc, par composition des limites, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Supposons maintenant que $\ell \in \mathbb{R}$. Par ce qui précède, f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

De plus, par hypothèse, $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} \ell$ et $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$.

Donc, $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)$ et f' est continue en a . □

Exercice 16.11

On considère :

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} \end{aligned}$$

Montrer que la fonction f est prolongeable en une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$. Donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.

Résolution

Étape 1 : Prolonger f par continuité en 0.

On a, pour tout $t \in [-1, 1] \setminus \{0\}$,

$$f(t) = \frac{\sin(t) - t}{t \times \sin(t)}$$

Or, le développement limité de $\sin$ en 0 donne : $\sin(t) - t = -\frac{t^3}{6} + o_{t \rightarrow 0}(t^3)$. D'où, $t - \sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t^3}{6}$.

Or, $\sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$. Donc, par opérations sur les équivalents, $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{t^3}{6}}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t}{6} \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$.

Ainsi, $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \in \mathbb{R}$.

On peut alors prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Étape 2 : Montrer que le prolongement est dérivable en 0.

La fonction f ainsi prolongée est continue sur $[-1, 1]$.

De plus, la fonction f est dérivable sur $[-1, 0[$ et $]0, 1]$ comme somme et quotient de fonctions de dérivable (les dénominateurs ne s'annulent pas sur $[-1, 0[$ et $]0, 1]$) et, pour tout $t \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, on a

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{\cos(t)}{(\sin(t))^2} = \frac{-(\sin(t))^2 + t^2 \times \cos(t)}{t^2 \times (\sin(t))^2}.$$

Or, $(\sin(t))^2 = \left(t - \frac{t^3}{6} + o_{t \rightarrow 0}(t^3)\right)^2 = t^2 - \frac{t^4}{3} + o_{t \rightarrow 0}(t^4)$.

De plus, $t^2 \times \cos(t) = t^2 - \frac{t^4}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^4)$.

D'où, $t^2 \times \cos(t) - (\sin(t))^2 = \frac{t^4}{3} - \frac{t^4}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^4)$. D'où, $t^2 \times \cos(t) - (\sin(t))^2 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t^4}{6}$.

Donc, par opérations sur les équivalents, $f'(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{t^4}{6}}{t^4} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{6}$.

D'où, $f'(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} -\frac{1}{6}$.

Ainsi, par le théorème de la limite de la dérivée

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} -\frac{1}{6} \in \mathbb{R}.$$

f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{6}$.

Étape 3 : Justifier le caractère $\mathcal{C}^1$.

On a $f'(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} f'(0)$. Donc, f' est continue en 0.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 0[$ et $]0, 1]$,

f ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$.

Théorème 16.23 – Inégalité des accroissements finis (cas d'une fonction à valeurs réelles)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si

- f est dérivable sur I ;

► il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $m \leq f' \leq M$,
 alors, pour tout $(x, y) \in I^2$ avec $x \leq y$,

$$m(y - x) \leq f(x) - f(y) \leq M(y - x).$$

Démonstration

Dans le cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, il suffit d'appliquer la croissance de l'intégrale à $m \leq f' \leq M$. □

⚙️ Théorème 16.24 – Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction. Si

- f est dérivable sur I ;
- il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $|f'|$ est majorée par C ,

alors, pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|.$$

Démonstration

Démonstration dans le cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $(x, y) \in I^2$.

- Cas 1 : on suppose que $x \leq y$. Par inégalité triangulaire,

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_x^y f'(t) dt \right| \leq \int_x^y |f'(t)| dt.$$

Par croissance de l'intégrale,

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_x^y C dt \leq C \times (y - x).$$

- Cas 2 : on suppose que $x > y$. Par inégalité triangulaire, puis croissance de l'intégrale,

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_x^y f'(t) dt \right| = \left| \int_y^x f'(t) dt \right| \leq \int_y^x |f'(t)| dt \leq \int_y^x C dt \leq C \times (x - y).$$

□

💡 Exemple 16.5 – On peut utiliser ce théorème pour montrer qu'une fonction est lipschitzienne

La fonction $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $|\sin'| = |\cos| \leq 1$.

Donc, par l'inégalité des accroissements finis, $\sin$ est 1-lipschitzienne : pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|.$$

En particulier, en prenant $y = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.

Corollaire 16.6

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I .

Si la dérivée de f est bornée sur I , alors f est lipschitzienne sur I .

Démonstration

Appliquer l'inégalité des accroissements □

 Remarque 16.27

En particulier, toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un **segment** est lipschitzienne. En effet, sa dérivée f' est continue sur le segment $[a, b]$, donc par le théorème des bornes atteintes, f' est bornée. On peut alors appliquer l'inégalité des accroissements finis.

Corollaire 16.7

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I .

La fonction f est constante sur I si, et seulement si, f' est la fonction nulle.

Démonstration

Appliquer l'inégalité des accroissements

□

 Remarque 16.28 – Prudence! Le corollaire précédent est faux si I n'est pas un intervalle

Considérons la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, et pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = 0$.

La dérivée de f est nulle sur $\mathbb{R}^*$, pourtant f n'est pas constante ($\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle).

 Exercice 16.12

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on note $f(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que la fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 0$.
2. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Remarque : cette formule peut parfois vous être utile.

Résolution

1. La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction inverse est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$.
Donc, par opérations sur les fonctions dérivables, la fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$.
De plus, pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

2. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ et sa dérivée est la fonction nulle, donc f est constante sur $]-\infty, 0[$.
Il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in]-\infty, 0[$, $f(x) = C_1$.
De même, la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et sa dérivée est la fonction nulle, donc f est constante sur $]0, +\infty[$.
Il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = C_2$.

En faisant tendre x vers $-\infty$, on trouve $C_1 = -\frac{\pi}{2}$ ($\text{Arctan}(0) = 0$). En faisant tendre x vers $+\infty$, on trouve $C_2 = \frac{\pi}{2}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Théorème 16.25

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Si f' est la fonction nulle (pour tout $x \in I$, $f'(x) = (0, \dots, 0)$), alors f est constante sur I .

Démonstration

On note $f_1, \dots, f_n$ les fonctions coordonnées de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Si f' est la fonction nulle sur I , alors ses applications coordonnées $f'_1, \dots, f'_n$ sont nulles sur I .

D'où, par le corollaire précédent, les fonctions (à valeurs réelles) $f_1, \dots, f_n$ sont constantes.

Ainsi, f est constante. □

II.3. Théorème fondamental de l'analyse**Définition 16.9 – Primitive**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On appelle **primitive de f sur I** toute fonction $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ définie sur I telle que F est dérivable sur I et $F' = f$.

Remarque 16.29

Si f est une application continue et F est une primitive de f , alors F est une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 16.26

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, alors les primitives de f diffèrent d'une constante.

Autrement dit, si F et G sont des primitives de f , alors il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que $F = G + C$.

Démonstration

La fonction $F - G$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I , et $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$. Donc, $F - G$ est constante sur I . □

Théorème 16.27 – Théorème fondamental de l'analyse

Si f est une fonction continue un intervalle I et si a est un point de I , alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a .

Démonstration

On note $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in I, F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

► **Montrons que F est bien définie.**

Soit $x \in I$. La fonction f est continue sur I donc en particulier sur le segment d'extrémités a et x . Ainsi $F(x)$ existe.

► **Montrons que F est une primitive de f .**

Soit $x_0 \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Par la relation de Chasles, on a :

$$F(x_0 + h) - F(x_0) - h \times f(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - h \times f(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0) dt.$$

D'où,

$$|F(x_0 + h) - F(x_0) - h \times f(x_0)| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \right|.$$

La fonction f est continue sur I , donc en x_0 . D'où, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $t \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap I$, $|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Dans la suite, on suppose de plus que $h \in [-\eta, \eta]$ et $x_0 + h \in I$.

- Cas 1 : $h \geq 0$. Pour tout $t \in [x_0, x_0 + h]$, on a $|t - x_0| \leq |h| \leq \eta$. D'où, $|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Par croissance de l'intégrale, on a :

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \right| \underset{\text{car } h \geq 0}{=} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt \leq h \times \varepsilon \leq |h| \times \varepsilon.$$

- Cas 2 : $h < 0$. Pour tout $t \in [x_0 + h, x_0]$, on a $|t - x_0| \leq |h| \leq \eta$. D'où, $|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Dans ce cas, par croissance de l'intégrale,

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \right| \underset{\text{car } h < 0}{=} \int_{x_0+h}^{x_0} |f(t) - f(x_0)| dt \leq \int_{x_0+h}^{x_0} \varepsilon dt \leq -h \times \varepsilon \leq |h| \times \varepsilon.$$

Ainsi,

$$|F(x_0 + h) - F(x_0) - h \times f(x_0)| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \right| \leq |h| \times \varepsilon.$$

Autrement dit :

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon$$

Ainsi, par définition, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$. Donc, F est une primitive de f .

► **F s'annule en a .**

Par définition de F , on a : $F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$. Donc, F s'annule en a .

► **Unicité.**

Soit G une autre primitive de f qui s'annule en a . On sait que F et G diffèrent d'une constante. Or, $G(a) = F(a) = 0$. Donc, $F = G$. □

Théorème 16.28

- Toute fonction continue sur I possède des primitives sur I .
- Soit f une fonction continue sur I . On considère F une primitive de f sur I . On a :

$$\forall (a, b) \in I \times I, \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \stackrel{\text{Notation}}{=} [F(t)]_a^b.$$

- Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . On a :

$$\forall (a, b) \in I \times I, \int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a).$$

Démonstration

- Conséquence du théorème fondamental de l'analyse.
- Soit $(a, b) \in I \times I$. Considérons G l'unique primitive sur I de f qui s'annule en a . Alors, F et G diffèrent d'une constante. Donc

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) = G(b) - G(a) = F(b) - F(a).$$

- Conséquence du point précédent (une primitive de f' est f).

□

Exercice 16.13 – Classique!

Soient I et J deux intervalles d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $(u, v) \in (\mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}))^2$ telles que $u(J) \subset I$ et $v(J) \subset I$.

Montrer que l'application $\Phi : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et calculer $\Phi'(x)$ pour $x \in J$.

(Exercice à savoir refaire et à adapter lorsque les expressions des fonctions u et v sont données :

par exemple, $x \mapsto \int_x^{x^2} f(t) dt$.

Résolution

La fonction f est continue sur l'intervalle I , donc, par le théorème fondamental de l'analyse, possède des primitives sur I . Notons F l'une d'elle. On sait que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

De plus, on a, pour tout $x \in J$,

$$\Phi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = F(v(x)) - F(u(x)).$$

Or, v et u sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur J , F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , $u(J) \subset I$ et $v(J) \subset I$.

Donc, Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J comme somme et composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, pour tout $x \in J$,

$$\Phi'(x) = v'(x) \times F'(v(x)) - u'(x) \times F'(u(x)).$$

Comme F est une primitive de f , on a $F' = f$. Donc, pour tout $x \in J$,

$$\Phi'(x) = v'(x) \times f(v(x)) - u'(x) \times f(u(x)).$$

**Exercice 16.14**

On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt.$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer la dérivée de f .

Résolution

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ est continue sur le segment $[x, 2x]$ (quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas). Donc, $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt$ existe.
Ainsi, f est bien définie.

2. La fonction $g : t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, par théorème, elle possède une primitive G .

La fonction G est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $f(x) = G(2x) - G(x)$.

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = 2 \frac{\cos(2x)}{2x} - \frac{\cos(x)}{x} = \frac{\cos(2x) - \cos(x)}{x}.$$

**Exercice 16.15**

On considère la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(0) = 1$ et, pour tout $x \neq 0$,

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt.$$

On notera $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$.

1. Étudier la parité de F .
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $x > 0$,

$$x \times F'(x) = -F(x) + \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}.$$

3. Déterminer le signe de F et les variations de F sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de F .
5. En déduire que F est dérivable en 0. On donnera $F'(0)$.
6. Montrer que F possède un extremum local en 0. On précisera la valeur de cet extremum.

7. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $h(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$.

8. Soit $x > 0$. En utilisant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, trouver une relation entre $h(x)$ et $h\left(\frac{1}{x}\right)$.

9. En déduire que, $x \times F(x) + \frac{1}{x} \times F\left(\frac{1}{x}\right) = 2F(1)$.

10. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

11. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = 0$.

12. Donner l'allure de la courbe représentative de F sur $\mathbb{R}$.

Résolution

1. F est définie sur $\mathbb{R}^*$ un intervalle symétrique par rapport à 0.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$F(-x) = -\frac{1}{x} \int_0^{-x} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt.$$

On applique le changement de variable $u = -t$ avec $du = -dt$:

$$F(-x) = -\frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+(-u)^4}} \times (-1) du = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+u^4}} du = F(x).$$

Donc,

F est paire.

2. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, donc par le théorème fondamental de l'analyse, g possède des primitives sur cet intervalle. Notons G l'une d'elle.

On a

$$F(x) = \frac{1}{x} \times (G(x) - G(0)).$$

La fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Donc,

F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas).

Pour tout $x > 0$, on a $x \times F(x) = G(x) - G(0)$. Donc, en dérivant,

$$F(x) + x \times F'(x) = G'(x) = g(x).$$

Ainsi,

$$x \times F'(x) = -F(x) + \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}.$$

3. Soit $x > 0$. Pour tout $t \in [0, x]$, on a $1 \leq \sqrt{1+t^4} \leq \sqrt{1+x^4}$.

Donc, $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leq 1$.

D'où, par croissance de l'intégrale (les bornes sont en bon ordre), on a :

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dt \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt \leq \int_0^x 1 dt.$$

Or,

$$\int_0^x 1 dt = x \quad \text{et} \quad \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dt = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \int_0^x 1 dt = \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Comme $x > 0$, en divisant par x , on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leq F(x) \leq 1.$$

► Pour tout $x > 0$, $F(x) \geq \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \geq 0$.

► De plus, pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{1}{x} \times \left(-F(x) + \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \right) \leq 0.$$

Donc,

F est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. On sait que

$$(1+u)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \times u + o(u).$$

Comme $t^4 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, on a :

$$g(t) = (1+t^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{t^4}{2} + o(t^4).$$

D'où en primitivant,

$$G(x) = G(0) + x - \frac{x^5}{10} + o(x^5).$$

Donc,

$$F(x) = \frac{1}{x} \times (G(x) - G(0)) = 1 - \frac{x^4}{10} + o(x^4).$$

5. On a $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 = F(0)$, donc F est continue en 0 et par troncature,

$$F(x) = 1 + o(x).$$

Donc, F possède un développement limité à l'ordre 1 en 0.

Ainsi,

F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

6. On a $F(x) - F(0) = -\frac{x^4}{10} + o(x^4)$.

Donc, $F(x) - F(0) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^4}{10} \leq 0$.

Donc,

F possède un maximum local en 0 et ce maximum est $F(0) = 1$.

7. La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

On a montré que F est dérivable en 0.

De plus,

$$F'(x) = \frac{1}{x} \times \left(-F(x) + \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} \times \left(-1 + \frac{x^4}{10} + 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{2}{5}x^4 + o(x^4) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = F'(0).$$

Donc, F' est continue en 0.

Ainsi,

F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

8. On a $t = \frac{1}{u}$ et $dt = -\frac{1}{u^2} du$. On a :

$$h(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{u^4}}} \times \left(-\frac{1}{u^2} \right) du = - \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{\sqrt{1+u^4}} du = -h\left(\frac{1}{x}\right).$$

9. On a :

$$\begin{aligned} x \times F(x) + \frac{1}{x} \times F\left(\frac{1}{x}\right) &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt + \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt + \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt \\ &= F(1) + h(x) + F(1) + h\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, par la question précédente,

$$x \times F(x) + \frac{1}{x} \times F\left(\frac{1}{x}\right) = 2F(1).$$

10. On a :

$$F(x) = \frac{1}{x} \times \left(2F(1) - \frac{1}{x} \times F\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

Or, $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $F\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} F(0) = 1$.

Donc,

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

11. On a :

$$F'(x) = \frac{1}{x} \times \left(-F(x) + \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

12. Par parité, $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

II.4. Calcul de primitives

► Il est indispensable de connaître les primitives usuelles ! (cf. formulaire)

► Primitive d'une fonction de la forme $x \mapsto \frac{1}{a \times x^2 + b \times x + c}$. (cf. formulaire)

► Soit P une fonction polynomiale, $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

Pour déterminer une primitive d'une fonction f de la forme $x \mapsto P(x) \times \operatorname{ch}(b \times x)$, $x \mapsto P(x) \times \operatorname{sh}(b \times x)$, $x \mapsto P(x) \times \cos(b \times x)$, $x \mapsto P(x) \times \sin(b \times x)$, $x \mapsto P(x) \times e^{a \times x}$ on procède par intégration(s) par parties en dérivant la partie polynomiale (jusqu'à obtenir une constante) et primitivant l'autre partie.

Remarque : on peut aussi chercher une primitive de $x \mapsto P(x) \times e^{a \times x}$ sous la forme $F : x \mapsto Q(x) \times e^{a \times x}$, dériver cette fonction et identifier les coefficients des fonctions polynomiales P et $Q' + a \cdot Q$ pour assurer l'égalité $F' = f$.

💡 Exemple 16.6

Une primitive de $x \mapsto x^2 \times \sin(x)$ est $x \mapsto -x^2 \times \cos(x) + 2x \times \sin(x) + 2 \cos(x)$.

► Soit P une fonction polynomiale réelle, $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

Pour déterminer une primitive d'une fonction f de la forme $x \mapsto P(x) \times \cos(b \times x) \times e^{a \times x}$ ou $x \mapsto P(x) \times \sin(b \times x) \times e^{a \times x}$, on utilise les nombres complexes en primitivant (avec la méthode précédente) la fonction $g : x \mapsto P(x) \times e^{(a+ib) \times x}$. Une primitive de f est alors la partie réelle ou imaginaire, selon le cas considéré, d'une primitive g .

► Primitive d'une fonction de la forme $x \mapsto (\cos(x))^p \times (\sin(x))^q$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$:

- Si p est impair : changement de variable $t = \sin(x)$;
- Si q est impair : changement de variable $t = \cos(x)$;
- Si p et q sont pairs : linéariser (formules trigonométriques ou formules d'Euler).

► Règle de Bioche (Hors-Programme). Pour primitiver une fonction f qui s'écrit comme un quotient de combinaisons linéaires de fonctions de la forme $x \mapsto (\cos(x))^p \times (\sin(x))^q$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on applique la règle suivante : on considère la « forme différentielle » $\omega(t) = f(t) dt$ et on regarde les propriétés d'invariance de ω :

- si $\omega(-t) = \omega(t)$ on pose le changement de variable $u = \cos(t)$,
- si $\omega(\pi - t) = \omega(t)$ on pose le changement de variable $u = \sin(t)$,
- si $\omega(\pi + t) = \omega(t)$ on pose le changement de variable $u = \tan(t)$,
- en dernier recours on pose le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

On n'a plus qu'à primitiver une fraction rationnelle en u pour finir.

Attention : il faut impérativement tenir compte de « l'élément différentiel » dt : $d(-t) = -dt$, $d(\pi - t) = -dt$, $d(\pi + t) = dt$, plus généralement si $u = \phi(t)$ on a $du = \phi'(t)dt$.

II.5. Formules du Taylor



Exercice 16.16 – Formule de Taylor avec reste intégral

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$.

Montrer que, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \times f^{(n+1)}(t) dt \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \times (x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \times (x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \times f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

Résolution

On raisonne par récurrence sur n . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note la propriété H_n : « Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et $(x, a) \in I^2$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \times f^{(n+1)}(t) dt. »$$

Initialisation. $n = 0$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ et $(x, a) \in I^2$, on a :

$$\sum_{k=0}^0 \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} \times f^{(0+1)}(t) dt = f(a) + \int_a^x 1 \times f'(t) dt = f(a) + f(x) - f(a) = f(x).$$

Donc H_0 .

Hérédité. soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose H_n et on montre H_{n+1} .

Soient $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I, \mathbb{K})$ et $(x, a) \in I^2$. En particulier $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et, par hypothèse de récurrence, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \times f^{(n+1)}(t) dt. \quad (1)$$

Pour tout $t \in I$, on note $u(t) = f^{(n+1)}(t)$ et $v(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$. La fonction $u = f^{(n+1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I car f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I et la fonction v est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I car polynomiale.

De plus, pour tout $t \in I$,

$$u'(t) = f^{(n+2)}(t) \quad \text{et} \quad v'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Donc, par intégrations par parties,

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \times f^{(n+1)}(t) dt &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(t) \right]_a^x - \int_a^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \times f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \times f^{(n+2)}(t) dt. \end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant dans (1), on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \times f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \times f^{(n+2)}(t) dt. \end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence.



Définition 16.10 – Fonction polynomiale de Taylor associée

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$.

La fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (x-a)^k$ est appelée fonction polynomiale de Taylor associée à f .

Théorème 16.29 – Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in I$, $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$.
Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} \times f^{(k)}(a) \right| \leq M \times \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Démonstration

Soit $(a, b) \in I^2$. Par la formule de Taylor avec reste intégral,

$$f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (b-a)^k = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \times f^{(n+1)}(t) dt$$

- **Cas 1** : $a \leq b$. Par inégalité de la moyenne,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (b-a)^k \right| = \left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \times f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \times |f^{(n+1)}(t)| dt.$$

Or, $|f^{(n+1)}| \leq M$. Donc, par croissance de l'intégrale,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (b-a)^k \right| \leq \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \times M dt.$$

$$\text{Or, } \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Donc,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (b-a)^k \right| \leq M \times \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- **Cas 2** : $a > b$. Par inégalité de la moyenne,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (b-a)^k \right| = \left| \int_b^a \frac{(b-t)^n}{n!} \times f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \int_b^a \frac{(b-t)^n}{n!} \times |f^{(n+1)}(t)| dt.$$

Or, $|f^{(n+1)}| \leq M$. Donc, par croissance de l'intégrale,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (b-a)^k \right| \leq \int_b^a \frac{(b-t)^n}{n!} \times M dt \leq M \times \frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

□

Théorème 16.30 – Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \in I$, $m \leq f^{(n+1)}(x) \leq M$.
Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$ avec $a \leq b$,

$$m \times \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} \times f^{(k)}(a) \leq M \times \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Démonstration

Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a \leq b$. Par la formule de Taylor avec reste intégral,

$$f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (b-a)^k = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \times f^{(n+1)}(t) dt$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \times m dt \leq f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (b-a)^k \leq \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \times M dt.$$

Donc,

$$m \times \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} \times f^{(k)}(a) \leq M \times \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

□



Exercice 16.17

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x) - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$.

Résolution

La fonction $f : x \mapsto \sin(x)$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}^3$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos(x)$, $f^{(2)} = -\sin(x)$ et $f^{(3)}(x) = -\cos(x)$. D'où, $|f^{(3)}(x)| \leq 1$. Donc, par la formule de Taylor-Lagrange, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| f(x) - f(0) - f'(0) \times x - \frac{f''(0)}{2!} \times x^2 \right| \leq 1 \times \frac{x^3}{3!}.$$

Donc, $|\sin(x) - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$.



Exercice 16.18

Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Résolution

La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0, +\infty[$ et, pour tout $x \geq 0$,

$$f(x) = \ln(1+x), \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad \text{et} \quad 0 \leq f'''(t) \leq 2.$$

Donc, par l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq f(x) - f(0) - f'(0)x - \frac{f''(0)}{2!}x^2 \leq \frac{2}{3!} \times x^3.$$

Donc,

$$0 \leq f(x) - x + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3}{3}.$$

Remarque 16.30

La formule de Taylor avec reste intégral donne une information globale sur f .



Théorème 16.31 – Formule de Taylor-Young

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$.

Alors,

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Ce qui se réécrit :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times h^k + o(h^n).$$

Démonstration

► **Cas 1** : $n = 0$. On a, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + f(x) - f(a)$.

Or, f est continue en a , donc $f(x) - f(a) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$. Donc, $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1)$.

► **Cas 2** : $n \geq 1$. Soit $\varepsilon > 0$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{(n-1)+1}(I, \mathbb{K})$. Donc, par la formule de Taylor avec reste intégral, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \times f^{(n)}(t) dt$$

On note $g : x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (x-a)^k$. D'où,

$$g(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \times f^{(n)}(t) dt - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \times (x-a)^n.$$

Or, $\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \frac{(x-a)^n}{n!}$. Donc, par linéarité de l'intégrale,

$$g(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \times (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)) dt.$$

D'où,

$$|g(x)| \leq \left| \int_a^x \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!} \times |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)| dt \right|.$$

La fonction $f^{(n)}$ est continue sur I , donc, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, si $|x-a| \leq \eta$, alors $|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)| \leq \varepsilon$.

Soit $x \in I \cap [a-\eta, a+\eta]$.

- **Sous-cas 1** : $x \geq a$. Pour tout $t \in [a, x]$, on a $|x-t| \leq |x-a| \leq \eta$, donc, $\frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!} \times |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)| \leq \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!} \times \varepsilon$.

D'où, par croissance de l'intégrale,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^x \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!} \times |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)| dt \right| &= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \times |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)| dt \\ &\leq \varepsilon \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt \\ &\leq \frac{(x-a)^n}{n!} \times \varepsilon \\ &\leq (x-a)^n \times \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc, $\left| \frac{g(x)}{(x-a)^n} \right| \leq \varepsilon$.

- **Sous-cas 2** : $x < a$. De la même manière, on a : $\left| \frac{g(x)}{(x-a)^n} \right| \leq \varepsilon$.

Dans les deux sous-cas, $\left| \frac{g(x)}{(x-a)^n} \right| \leq \varepsilon$. Vrai pour tout $\varepsilon > 0$.

Ainsi, par définition de limite,

$$\frac{g(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

□

Remarque 16.31

On détermine les développements limités à tout ordre en 0 de $\exp$, $\cos$ et $\sin$ (par exemple) à l'aide de cette formule.

Corollaire 16.8

Si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ et $t_0 \in I$, alors f possède un développement limité à l'ordre n en t_0 .

Démonstration

Conséquence de la formule de Taylor-Young.

□

Remarque 16.32 – Prudence!La réciproque est fausse dès que $n \geq 2$.Soit f la fonction définie pour tout $t \neq 0$ par $f(t) = 1 + t + t^2 + t^3 \times \cos\left(\frac{1}{t^2}\right)$.On a $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$, donc on prolonge f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.De plus, f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0. En effet, pour tout $t \neq 0$, on a : $f(t) = 1 + t + t^2 + t^2 \times \varepsilon(t)$ avec $\varepsilon(t) = t \times \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$.En particulier, f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0. Donc, f est dérivable en 0, et de plus $f'(0) = 1$.Par contre, f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de 0.En effet, pour tout $t \neq 0$, $f'(t) = 1 + 2t + 3t^2 \times \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) + 2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$, qui n'admet pas de limite en 0 car si $f'(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \ell$,alors $\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \frac{\ell - 1}{2}$ ce qui n'est pas (utiliser la caractérisation séquentielle de la limite).