

Évaluation des compétences calculatoires

Lundi 1er Septembre 2025

Exercice 1

1) Mettre les nombres suivants sous forme de fractions irréductibles :

$$A = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} - \frac{5}{6} \qquad B = \frac{63}{40} \times \frac{8}{15} \times \frac{25}{42}$$

2) Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$$C = \sqrt{12} + \sqrt{75} - 2\sqrt{48} \qquad D = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}$$

Exercice 2

1) Développer et simplifier $A(x) = (x + 7)(5 - 2x) - (2x - 1)(x + 3)$

2) Factoriser $B(x) = x^2 + 2x + 1 - (5x - 3)^2$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

$$(a) \ x^2 + 10x + 16 = (x + 3)(x - 3) \qquad (b) \ \frac{x+2}{x(x+1)} = \frac{x-2}{x(x-1)} \qquad (c) \ 6x - 2x^2 + 8 = 0$$

Exercice 4

Résoudre les inéquations suivantes :

$$(a) \ 4 - 3x > 19 \qquad (b) \ -x^2 + 10x - 16 \leq 0 \qquad (c) \ \frac{2x+1}{x-2} \geq 3$$

Exercice 1

$$1) \bullet A = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} - \frac{5}{6} = \frac{45}{60} + \frac{24}{60} - \frac{50}{60} \text{ soit } \boxed{A = \frac{19}{60}}.$$

$$\bullet B = \frac{63}{40} \times \frac{8}{15} \times \frac{25}{42} = \frac{(3 \times 3 \times 7) \times 8 \times (5 \times 5)}{(8 \times 5) \times (5 \times 3) \times (2 \times 3 \times 7)} \text{ soit } \boxed{B = \frac{1}{2}}.$$

$$2) \bullet C = \sqrt{12} + \sqrt{75} - 2\sqrt{48} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 2 \times 4\sqrt{3} \text{ soit } \boxed{C = -\sqrt{3}}.$$

$$\bullet D = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}} = \frac{3 \times \sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{5}}{\sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}} \text{ soit } \boxed{D = 2}.$$

Exercice 2

$$\begin{aligned} 1) \text{ On développe : } A(x) &= (x+7)(5-2x) - (2x-1)(x+3) \\ &= 5x - 2x^2 + 35 - 14x - (2x^2 + 6x - x - 3) \\ &= -2x^2 - 9x + 35 - (2x^2 + 5x - 3) \\ &= -4x^2 - 14x + 38 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ On factorise : } B(x) &= x^2 + 2x + 1 - (5x - 3)^2 \\ &= (x+1)^2 - (5x-3)^2 \\ &= (x+1+5x-3)(x+1-5x+3) \\ &= (6x-2)(4-4x) \\ &= 8(3x-1)(1-x) \end{aligned}$$

Exercice 3

$$\begin{aligned} (a) \text{ Pour } x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 10x + 16 &= (x+3)(x-3) \iff x^2 + 10x + 16 = x^2 - 9 \\ &\iff 10x = -25 \\ &\iff x = -25/10 = -5/2 \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation proposée est } \mathcal{S} = \{-5/2\}}.$

(b) L'équation est définie lorsque $x(x+1)(x-1) \neq 0$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$, on a alors

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x(x+1)} &= \frac{x-2}{x(x-1)} \iff (x+2) \times x(x-1) = (x-2) \times x(x+1) \\ &\iff x[(x+2)(x-1) - (x-2)(x+1)] = 0 \\ &\iff x[x^2 + x - 2 - (x^2 - x - 2)] = 0 \\ &\iff 2x^2 = 0 \iff x = 0 \quad (\text{valeur interdite}) \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation est } \mathcal{S} = \emptyset}.$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $6x - 2x^2 + 8 = 0 \iff x^2 - 3x - 4 = 0$ (division par -2).

Le trinôme a pour discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-4) = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{3-5}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3+5}{2} = 4$$

Ainsi

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \{-1; 4\}$.

Exercice 4

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $4 - 3x > 19 \iff -3x > 15 \iff x < -5$

Ainsi

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} =]-\infty; -5[$.

(b) Le discriminant du trinôme du second degré $-x^2 + 10x - 16$ est

$$\Delta = 10^2 - 4 \times (-1) \times (-16) = 100 - 64 = 36 = 6^2$$

Comme $\Delta > 0$, il admet deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-10-6}{-2} = 8 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-10+6}{-2} = 2$$

Enfin, le trinôme est du signe de -1 (négatif) à l'extérieur de ses racines, donc

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} =]-\infty; 2] \cup [8; +\infty[$.

(c) Pour tout $x \neq 2$,

$$\frac{2x+1}{x-2} \geq 3 \iff \frac{2x+1}{x-2} \geq \frac{3x-6}{x-2}$$

$$\iff \frac{7-x}{x-2} \geq 0$$

Dressons alors un tableau de signe pour étudier le signe de $Q(x) = \frac{7-x}{x-2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

x	$-\infty$	2	7	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$	$+$
$7-x$	$+$	$+$	0	$-$
$Q(x)$	$-$		$+$	$-$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\mathcal{S} =]2; 7]$.

Devoir Surveillé n°1 de MathématiquesSamedi 20 Septembre 2025 (*Durée : 2 h 30*)**Exercice 1**

1) Mettre les nombres suivants sous forme de fractions irréductibles :

$$A = \frac{2}{3} - \frac{7}{3} \times \frac{8}{21} \qquad B = \frac{4}{3} \times \frac{15}{16} - \frac{1}{2} \qquad C = \frac{63}{40} \times \frac{8}{15} \times \frac{25}{42}$$

2) Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$$D = \sqrt{12} + \sqrt{75} - 2\sqrt{48} \qquad E = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}} \qquad F = \frac{2}{3 - \sqrt{5}}$$

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad x^2 + 10x + 16 = (x + 3)(x - 3) & \text{(b)} \quad \frac{x + 2}{x(x + 1)} = \frac{x - 2}{x(x - 1)} & \text{(c)} \quad x^4 + 2x^2 + 3 = 0 \\ \text{(d)} \quad 6x - 2x^2 + 8 = 0 & \text{(e)} \quad 8x^2 + 56x + 72 = 0 & \text{(f)} \quad |8x - 1| = 3 \end{array}$$

Exercice 3

Un capitaine s'adresse à son mousse :

« Il y a trois ans, moussaillon, j'avais le triple de ton âge, mais dans six ans, je n'en aurai plus que le double, mille sabords ! »

Quel est l'âge du capitaine ?

Les réponses « au pif » ne sont pas acceptées ... mettez le problème en équation !**Exercice 4**

Résoudre les inéquations suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \leq 1 - \frac{4 - x}{6} & \text{(b)} \quad \sqrt{7}x - 2 \leq 3x + 2 & \text{(c)} \quad \frac{3x - 1}{x + 3} \geq 2 \\ \text{(d)} \quad -0,5x^2 + 9x - 28 > 0 & \text{(e)} \quad 3x^2 - 1 \geq 6x & \text{(f)} \quad |4 - x| > 1 \end{array}$$

Exercice 5

1) Donner les valeurs exactes des nombre suivants :

$$(a) \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \quad (b) \cos\left(\frac{19\pi}{4}\right) \quad (c) \sin\left(\frac{-20\pi}{3}\right) \quad (d) \cos(705\pi)$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes :

$$A(x) = \cos(-x) + \sin(-x) + \cos(x + \pi) + \sin(\pi - x)$$

$$B(x) = \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - 2\cos\left(\frac{21\pi}{2} - x\right) - 3\sin(x - \pi) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

Exercice 6

Résoudre sur l'intervalle $] -\pi ; \pi]$ les équations et inéquations suivantes :

$$(a) \quad 2\cos^2(x) - \cos(x) = 0 \quad (b) \quad \sin(3x) = \frac{1}{2}$$

$$(c) \quad \cos(x) \leq 2 \quad (d) \quad \sin(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 1

$$1) \bullet A = \frac{2}{3} - \frac{7}{3} \times \frac{8}{21} = \frac{2}{3} - \frac{7 \times 8}{3 \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} - \frac{8}{3 \times 3} \text{ donc } \boxed{A = -\frac{2}{9}}$$

$$\bullet B = \frac{4}{3} \times \frac{15}{16} - \frac{1}{2} = \frac{4}{3} \times \frac{3 \times 5}{4 \times 4} - \frac{1}{2} = \frac{5}{4} - \frac{2}{4} \text{ soit } \boxed{B = \frac{3}{4}}$$

$$\bullet C = \frac{63}{40} \times \frac{8}{15} \times \frac{25}{42} = \frac{(3 \times 3 \times 7) \times 8 \times (5 \times 5)}{(8 \times 5) \times (5 \times 3) \times (2 \times 3 \times 7)} \text{ soit } \boxed{C = \frac{1}{2}}$$

$$2) \bullet D = \sqrt{12} + \sqrt{75} - 2\sqrt{48} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 2 \times 4\sqrt{3} \text{ soit } \boxed{D = -\sqrt{3}}$$

$$\bullet E = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}} = \frac{3 \times \sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{5}}{\sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}} \text{ soit } \boxed{E = 2}$$

$$\bullet F = \frac{2}{3 - \sqrt{5}} = \frac{2(3 + \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} = \frac{2(3 + \sqrt{5})}{9 - 5} \text{ soit } \boxed{F = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$$

Exercice 2

$$\begin{aligned} \text{(a) Pour } x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 10x + 16 &= (x + 3)(x - 3) \iff x^2 + 10x + 16 = x^2 - 9 \\ &\iff 10x = -25 \\ &\iff x = -25/10 = -5/2 \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation proposée est } \mathcal{S} = \{-5/2\}}$

(b) L'équation est définie lorsque $x(x + 1)(x - 1) \neq 0$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$, on a alors

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x(x+1)} &= \frac{x-2}{x(x-1)} \iff (x+2) \times x(x-1) = (x-2) \times x(x+1) \\ &\iff x[(x+2)(x-1) - (x-2)(x+1)] = 0 \\ &\iff x[x^2 + x - 2 - (x^2 - x - 2)] = 0 \\ &\iff 2x^2 = 0 \iff x = 0 \quad (\text{valeur interdite}) \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation est } \mathcal{S} = \emptyset}$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a clairement

$$x^4 + 2x^2 + 3 \geq 3 > 0$$

si bien que

$\boxed{\text{L'équation proposée n'a pas de solution.}}$

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $6x - 2x^2 + 8 = 0 \iff x^2 - 3x - 4 = 0$ (division par -2).

Le trinôme a pour discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-4) = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{3-4}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3+5}{2} = 4$$

Ainsi

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \{-1; 4\}$.

(e) Après division par 8, l'équation proposée équivaut à $x^2 + 7x + 9 = 0$.

Cette équation du second degré a pour discriminant

$$\Delta = 7^2 - 4 \times 9 = 49 - 36 = 13$$

Comme $\Delta > 0$, elle admet deux solutions réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{13}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-7 + \sqrt{13}}{2}$$

Ainsi

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{7 + \sqrt{13}}{2}; \frac{-7 + \sqrt{13}}{2} \right\}$.

(f) Pour $x \in \mathbb{R}$, $|8x - 1| = 3 \iff 8x - 1 = 3 \quad \text{ou} \quad 8x - 1 = -3$

$$\iff 8x = 4 \quad \text{ou} \quad 8x = -2$$

$$\iff x = 1/2 \quad \text{ou} \quad x = -1/4$$

Ainsi,

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \{-1/4; 1/2\}$.

Exercice 3

Soient x l'âge actuel du capitaine et y l'âge actuel du mousse.

- Il y a 3 ans, le capitaine avait le triple de l'âge du mousse donc

$$x - 3 = 3 \times (y - 3) = 3y - 9$$

soit

$$\underline{x = 3y - 6}$$

- Dans 6 ans, le capitaine aura le double de l'âge du mousse donc

$$x + 6 = 2(y + 6) = 2y + 12$$

soit

$$\underline{x = 2y + 6}$$

Ainsi $\begin{cases} x = 3y - 6 \\ x = 2y + 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3y - 6 \\ 3y - 6 = 2y + 6 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 6 + 6 = 12 \\ x = 3 \times 12 - 6 = 30 \end{cases}$

Par conséquent,

L'âge du capitaine est 30 ans.

(et celui du mousse 12)

Exercice 4

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \leq 1 - \frac{4-x}{6} &\iff 3x - 2 \leq 6 - (4-x) && (\text{mult. par } 6) \\ &\iff 3x - 2 \leq 2 + x \\ &\iff 2x \leq 4 \iff x \leq 2 \end{aligned}$$

Ainsi L'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est $\mathcal{S} =]-\infty; 2]$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} \sqrt{7}x - 2 \leq 3x + 2 &\iff (\sqrt{7} - 3)x \leq 4 \\ &\iff x \geq \frac{4}{\sqrt{7} - 3} \end{aligned}$$

En effet, $\sqrt{7} - 3 < 0$ puisque $2 < \sqrt{7} < 3$.

Or,
$$\frac{4}{\sqrt{7} - 3} = \frac{4(\sqrt{7} + 3)}{(\sqrt{7} - 3)(\sqrt{7} + 3)} = \frac{4(\sqrt{7} + 3)}{7 - 9} = -2(\sqrt{7} + 3)$$

Ainsi L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} = [-2\sqrt{7} - 6; +\infty[$.

(c) Pour tout $x \neq -3$,
$$\begin{aligned} \frac{3x-1}{x+3} \geq 2 &\iff \frac{3x-1}{x+3} \geq \frac{2x+6}{x+3} \\ &\iff \frac{3x-1}{x+3} - \frac{2x+6}{x+3} \geq 0 \\ &\iff \frac{x-7}{x+3} \geq 0 \end{aligned}$$

Dressons alors un tableau de signe pour étudier le signe de $Q(x) = \frac{x-7}{x+3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

x	$-\infty$	-3	7	$+\infty$
$x-7$		-	- 0 +	
$x+3$	-	0	+ +	
$Q(x)$	+		- 0 +	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\mathcal{S} =]-\infty; -3[\cup [7; +\infty[$.

(d) Pour simplifier l'étude, notons que

$$-0,5x^2 + 9x - 28 > 0 \iff -0,5(x^2 - 18x + 56) > 0 \iff x^2 - 18x + 56 < 0$$

Or, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 - 18x + 56 = (x-9)^2 - 81 + 56 = 0 = (x-9)^2 - 5^2 = 0 = (x-4)(x-14)$$

Comme le trinôme $x^2 - 18x + 56$ est négatif entre ses racines, on en déduit que

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} =]4; 14[$.

(e) L'inéquation proposée équivaut à $3x^2 - 6x - 1 \geq 0$.

Le discriminant du trinôme du second degré $3x^2 - 6x - 1$ est

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 36 + 12 = 48 = 4^2 \times 3$$

Comme $\Delta > 0$, il admet deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{6 - 4\sqrt{3}}{6} = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{6} = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Enfin, notre trinôme est du signe de 3 (donc positif) à l'extérieur des racines, donc

$$\text{L'ensemble des solutions est } \mathcal{S} = \left] -\infty; 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right] \cup \left[1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}; +\infty \right[.$$

(f) On a $|4 - x| > 1 \iff 4 - x < -1 \quad \text{ou} \quad 4 - x > 1$
 $\iff x > 5 \quad \text{ou} \quad x < 3$

Ainsi $\text{L'ensemble des solutions de l'inéquation est } \mathcal{S} =]-\infty; 3[\cup]5; +\infty[.$

Exercice 5

1) (a) On a directement $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ par lecture du cercle trigonométrique.

(b) On a $\cos\left(\frac{19\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{19\pi}{4} - 4\pi\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ soit $\cos\left(\frac{19\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) On a $\sin\left(\frac{-20\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{-20\pi}{3} + 6\pi\right) = \sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$ soit $\sin\left(\frac{-20\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(d) On a $\cos(705\pi) = \cos(705\pi - 704\pi) = \cos(\pi)$ soit $\cos(705\pi) = -1$

2) (a) $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

d'où

$$\begin{aligned} A(x) &= \cos(-x) + \sin(-x) + \cos(x + \pi) + \sin(\pi - x) \\ &= \cos(x) - \sin(x) - \cos(x) + \sin(x) = 0 \end{aligned}$$

(b) $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \cos(-x) = \cos(x)$

$$\cos\left(\frac{21\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 10\pi - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\sin(x - \pi) = -\sin(\pi - x) = -\sin(x)$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi + x\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos(x)$$

Ainsi $\begin{aligned} B(x) &= \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - 2\cos\left(\frac{21\pi}{2} - x\right) - 3\sin(x - \pi) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \\ &= \cos(x) - 2\sin(x) + 3\sin(x) - \cos(x) = \sin x \end{aligned}$

Exercice 6

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $2 \cos^2 x - \cos x = 0$

$$\begin{aligned} &\iff 2 \cos(x) \times \left(\cos(x) - \frac{1}{2} \right) = 0 \\ &\iff \cos(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(x) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Or $\cos(x) = 0 \iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\iff x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

et $\cos(x) = \frac{1}{2} \iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\iff x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

En prenant $k = 0$ dans chaque cas, on obtient les solutions dans l'intervalle proposé.

De ce fait,

L'ensemble des solutions dans l'intervalle $] -\pi ; \pi]$ de l'équation $2 \cos^2 x - \cos x = 0$ est $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right\}$.

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin(3x) = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} &\iff \sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &\iff 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ &\iff x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

En prenant les valeurs $k = -1, k = 0$ et $k = 1$, on en déduit que

L'ensemble des solutions dans l'intervalle $] -\pi ; \pi]$ de l'équation $\sin(3x) = \frac{1}{2}$ est $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{11\pi}{18}; -\frac{7\pi}{18}; \frac{\pi}{18}; \frac{5\pi}{18}; \frac{13\pi}{18}; \frac{17\pi}{18} \right\}$.
--

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(x) \leq 1 \leq 2$ donc

L'ensemble des solutions dans l'intervalle $] -\pi ; \pi]$ de l'inéquation $\cos(x) \leq 2$ est $\mathcal{S} =] -\pi ; \pi]$.

(d) On sait (ou on lit) que $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

On voit sur le cercle trigonométrique que les solutions de notre inéquation correspondent aux abscisses curvilignes des points situés en-dessous des points d'abscisses curvilignes $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$ (ceux-ci sont exclus).

Ainsi,

L'ensemble des solutions dans l'intervalle $] -\pi ; \pi]$ de l'inéquation $\sin(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ est $\mathcal{S} = \left] -\pi ; \frac{\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{3\pi}{4} ; \pi \right[$.

Devoir Surveillé n°2 de MathématiquesSamedi 8 Novembre 2025 (*Durée : 3 h*)**Exercice 1**

Soient P et Q deux assertions.

- 1) (a) Dresser la table de vérité de l'assertion « $(P \implies Q) \text{ OU } (Q \implies P)$ ».
(b) Que peut-on en déduire ? Était-ce prévisible ?
- 2) Simplifier les propositions suivantes :
(a) $P \text{ ET } (P \implies Q)$ (b) $(P \implies Q) \text{ ET } (Q \implies \text{NON } P)$
- 3) Donner, en justifiant bien entendu, la négation des propositions suivantes :
(a) $P \text{ ET NON } Q$ (b) $P \implies (P \text{ ET } Q)$ (c) $(P \implies Q) \text{ OU } (Q \implies P)$

On simplifiera au maximum la proposition obtenue.

Exercice 2

Calculer les limites suivantes, en détaillant soigneusement les raisonnements :

- | | | |
|---|--|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - \cos(\pi x) + 3}{5 - x }$ | (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5 - x^3 + 7x}$ | (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^4 + 3x^3 - 7)$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8x + 7 - 5x^2}{3 + x^2}$ | (e) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{25 - 4x}{(x - 7)^2}$ | (f) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 7x + 10}$ |

Exercice 3

Calculer, en justifiant bien, les limites suivantes :

- | | | |
|---|---|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cos\left(\frac{\pi x^2}{x^2 + 1}\right)$ | (b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ | (c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x - 2)}{x - 3}$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1}$ | (e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1}$ | (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{e^x - 1}$ |

Exercice 4

Déterminer *proprement* les ensembles de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes, calculer ensuite leurs dérivées et étudier leurs signes (sauf celui de h')

$$\begin{array}{lll} f : x \mapsto \sqrt{x-4} & g : x \mapsto \frac{1}{(x^2+x+1)^3} & h : x \mapsto 2x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ j : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} & k : x \mapsto e^{x \ln x} & l : x \mapsto \frac{xe^x}{e^x - 1} \end{array}$$

Indication : pour déterminer le signe de l' , on commencera par dresser le tableau de variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $m : x \mapsto e^x - x - 1$ afin d'en déduire son signe.

Exercice 5

Partie A - questions de cours

Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

- 1) Que signifie précisément « f est injective » ?
En pratique, comment démontre-t-on que f est injective ?
- 2) Que signifie précisément « f est surjective » ?
En pratique, comment démontre-t-on que f est surjective ?

Partie B - application

Étudier la surjectivité et l'injectivité des applications suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1) f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x - 7 \end{array} \right. & 2) g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2|x| + 1 \end{array} \right. & 3) h : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x, x + y) \end{array} \right. \end{array}$$

Exercice 6

On définit l'application $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto 3n \end{array} \right.$.

- 1) Cette application est-elle injective ? surjective ?
- 2) On pose $A = \{-2; 0; 5; 6; 12\}$.
Déterminer l'ensemble de tous les antécédents par f des éléments de A .

Exercice 1

1) (a) Voici la table de vérité demandée :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \text{ OU } (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

(b) On en déduit que l'assertion proposée est toujours vraie ... et c'était prévisible car :

$$(P \Rightarrow Q) \text{ OU } (Q \Rightarrow P)$$

équivalent à $(\text{NON } P \text{ OU } Q) \text{ OU } (\text{NON } Q \text{ OU } P)$

équivalent à **NON P OU P OU NON Q OU Q**

équivalent à **VRAI**.

2) (a) $P \text{ ET } (P \Rightarrow Q)$

équivalent à **P ET (NON P OU Q)**

équivalent à **(P ET NON P) OU (P ET Q)**

équivalent à **FAUX OU (P ET Q)**

équivalent à **P ET Q**

(b) $(P \Rightarrow Q) \text{ ET } (Q \Rightarrow \text{NON } P)$

équivalent à **(NON P OU Q) ET (NON Q OU NON P)**

équivalent à **NON P OU (Q ET NON Q)**

équivalent à **NON P OU FAUX**

équivalent à **NON P**

3) Utilisons les règles logique vues en cours.

(a) $\text{NON } (P \text{ ET } \text{NON } Q)$

équivalent à $(\text{NON } P) \text{ OU } Q$

équivalent à **$P \Rightarrow Q$**

(b) $\text{NON } (P \Rightarrow (P \text{ ET } Q))$ équivalent à $\text{NON } (\text{NON } P \text{ OU } (P \text{ ET } Q))$

équivalent à $P \text{ ET } (\text{NON } P \text{ OU } \text{NON } Q)$

équivalent à $(P \text{ ET } \text{NON } P) \text{ OU } (P \text{ ET } \text{NON } Q)$

équivalent à $\text{FAUX OU } (P \text{ ET } \text{NON } Q)$

équivalent à **$P \text{ ET } \text{NON } Q$**

(c) $\text{NON } ((P \Rightarrow Q) \text{ OU } (Q \Rightarrow P))$

équivalent à $\text{NON } (P \Rightarrow Q) \text{ ET } \text{NON } (Q \Rightarrow P)$

équivalent à $\text{NON } (\text{NON } P \text{ OU } Q) \text{ ET } \text{NON } (\text{NON } Q \text{ OU } P)$

équivalent à $P \text{ ET } \text{NON } Q \text{ ET } Q \text{ ET } \text{NON } P$

équivalent à **FAUX**

Exercice 2

- (a) La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - \cos(\pi x) + 3}{5 - |x|}$ est une composée de fonctions usuelles et définie en -2 .

De ce fait, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = \frac{4 - \cos(-2\pi) + 3}{5 - 2} = \frac{6}{3}$ soit $\boxed{\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - \cos(\pi x) + 3}{5 - |x|} = 2.}$

- (b) On a $5 - x^3 + 7x \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} -x^3$. Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty$ par produit de limites.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5 - x^3 + 7x) = +\infty$.

Enfin, $\lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$ d'où $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5 - x^3 + 7x} = +\infty}$ par composition de limites.

- (c) On a $3x^3 - 7 = o_{x \rightarrow -\infty}(x^4)$ d'où $(-5x^4 + 3x^3 - 7) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} -5x^4$.

Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^4) = -\infty$ par produit de limites.

De ce fait,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^4 + 3x^3 - 7) = -\infty}$$

- (d) On a $(-8x + 7 - 5x^2) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} -5x^2$ et $(3 + x^2) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} x^2$ donc $\frac{-8x + 7 - 5x^2}{3 + x^2} \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} -5$.

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8x + 7 - 5x^2}{3 + x^2} = -5.}$$

- (e) Les numérateur et dénominateur sont des fonctions usuelles définies en 7.

On en déduit alors que $\lim_{x \rightarrow 7} (25 - 4x) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow 7} (x - 7)^2 = 0^+$.

Il en découle que $\boxed{\lim_{x \rightarrow 7} \frac{25 - 4x}{(x - 7)^2} = -\infty}$ par quotient de limites.

- (f) Notons déjà que 5 est racine des polynômes $x^2 - 4x - 5$ et $x^2 - 7x + 10$. Les produits de leurs racines (-5 et 10 respectivement) permettent de déduire que les secondes racines sont -1 et 2 . De ce fait, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1) \quad \text{et} \quad x^2 - 7x + 10 = (x - 5)(x - 2)$$

On en déduit que pour tout $x \neq 2$ et $x \neq 5$,

$$\frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 7x + 10} = \frac{(x - 5)(x + 1)}{(x - 5)(x - 2)} = \frac{x + 1}{x - 2}$$

Enfin, la fonction $h : x \mapsto \frac{x + 1}{x - 2}$ est une fonction usuelle définie en 5.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{6}{3} = 2$ d'où $\boxed{\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 7x + 10} = 2}$

Exercice 3

(a) On a $x^2 + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ donc $\frac{\pi x^2}{x^2 + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi x^2}{x^2} = \pi$. De ce fait, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^2}{x^2 + 1} = \pi$.

De plus, $\lim_{y \rightarrow \pi} \cos(y) = \cos(\pi) = -1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi x^2}{x^2 + 1}\right) = \cos(\pi) = -1$ par composition.

Enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ d'où $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cos\left(\frac{\pi x^2}{x^2 + 1}\right) = -\infty}$ par produit de limites.

(b) Pour tout réel $x \neq 0$, on a $\left|x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \leq |x|^3$ car $|\sin| \leq 1$.

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^3 = 0$ par produit de limites.

On déduit alors du théorème des Gendarmes que $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0}$.

(c) Pour $x > 2$, posons $h = x - 3$: alors $\lim_{x \rightarrow 3} h = 0$ et $\ln(x - 2) = \ln(1 + h)$.

Or $\ln(1 + h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h$ donc $\ln(x - 2) \underset{x \rightarrow 3}{\sim} x - 3$ si bien que $\boxed{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x - 2)}{x - 3} = 1}$.

(d) Comme $1 = o_{x \rightarrow +\infty}(e^x)$ alors $e^x - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$ d'où $\frac{xe^x}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{xe^x}{e^x} = x$.

Par conséquent, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} = +\infty}$.

(e) On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1$ par somme de limites.

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ d'après les croissances comparées.

On en déduit par quotient de limites que $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} = 0}$.

(f) On a $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc $\frac{xe^x}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{xe^x}{x} = e^x$.

Or $\lim_{y \rightarrow 0} e^y = e^0 = 1$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{e^x - 1} = 1}$.

Exercice 4

1) Posons $u : x \mapsto x - 4$.

- La fonction $f = \sqrt{u}$ est définie lorsque $u \geq 0$, donc sur $[4; +\infty[$.
- Elle est dérivable (comme composée de fonctions dérivables) lorsque $u > 0$, soit sur $]4; +\infty[$.
- Enfin, on a $f' = u' / 2\sqrt{u}$ si bien que

$$\boxed{\forall x > 4 \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-4}} > 0}$$

2) Définissons tout d'abord la fonction auxiliaire $v : x \mapsto x^2 + x + 1$.

- Notons que $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, car son discriminant est $\Delta = 1 - 4 < 0$.

Par conséquent,

L'ensemble de définition de g est $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.

- De plus, v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(x) = 2x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
De ce fait, la fonction $g = v^{-3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' = -3v'v^{-4}$, soit

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \frac{-6x - 3}{(x^2 + x + 1)^4}$$

- Enfin, $g'(x)$ est du signe de $-6x - 3 = -3(2x + 1)$ d'où le tableau de signe de g' :

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$2x + 1$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$

3) Définissons tout d'abord la fonction auxiliaire $u : x \mapsto 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$.

- Cette fonction est bien évidemment définie sur $\mathbb{R}^*$.

Par ailleurs, l'expression $h(x)$ est définie lorsque $u(x) > 0$; étudions alors le signe de u .

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
x	$-$	$-$	0	$+$
$u(x)$	$+$	0	$-$	$+$

Ainsi

L'ensemble de définition de h est $\mathcal{D}_h =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$.

- De plus, u est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

De ce fait, $h : x \mapsto 2x \ln u(x)$ est une fonction dérivable sur $\mathcal{D}_h$ et

$$h'(x) = 2 \ln u(x) + 2x \times \frac{u'(x)}{u(x)} = 2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) + 2x \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) \times \frac{x}{x+1}$$

soit

$$\forall x \in \mathcal{D}_h \quad h'(x) = 2 \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right]$$

4) Définissons tout d'abord la fonction auxiliaire $q : x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$.

- Elle est définie lorsque $1+x \neq 0$, soit $x \neq -1$.

De plus, l'expression $j(x)$ est définie lorsque $q(x) \geq 0$; étudions le signe de q .

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1 - x$	$+$	$+$	0	$-$
$1 + x$	$-$	0	$+$	$+$
$q(x)$	$-$	$ $	$+$	0

Ainsi

L'ensemble de définition de j est $\mathcal{D}_j =]-1; 1]$.

- La fonction usuelle q est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et

$$\forall x \neq -1, \quad q'(x) = \frac{(-1) \times (1+x) - (1-x) \times 1}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}$$

Par contre, la fonction racine carrée n'est dérivable que sur $]0; +\infty[$.

De ce fait, la fonction composée $j = \sqrt{q}$ est dérivable sur $] -1; 1[$ et $j' = \frac{q'}{2\sqrt{q}}$ soit

$$\boxed{\forall x \in] -1; 1[\quad j'(x) = \frac{-2}{2(1+x)^2 q(x)} = \frac{-\sqrt{1+x}}{(1+x)^2 \sqrt{1-x}}}$$

- On voit clairement que

$$\boxed{\forall x \in] -1; 1[\quad j'(x) < 0}$$

5) Considérons la fonction auxiliaire $w : x \mapsto x \ln x$.

- Elle est définie lorsque $x > 0$. Comme $k = e^w$, alors

$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de } k \text{ est } \mathcal{D}_k =]0; +\infty[.}$$

- De plus, w est dérivable sur $\mathcal{D}_k$ en tant que produit de fonctions dérivables et

$$\forall x > 0 \quad w'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

De ce fait, la fonction composée $k = e^w$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $k' = w' e^w$, soit

$$\boxed{\forall x > 0 \quad k'(x) = (\ln x + 1) e^{x \ln x}}$$

- Comme $e^{x \ln x} > 0$, alors $k'(x)$ est du signe de $1 + \ln x$. Or, pour tout $x > 0$,

$$1 + \ln x > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > 1/e$$

par croissance de la fonction exp. On en déduit le signe de k' :

x	0	1/e	$+\infty$
$k'(x)$	-	0	+

6) L'expression $l(x)$ est définie lorsque $e^x - 1 \neq 0$ soit $x \neq 0$. Ainsi,

$$\boxed{\text{La fonction } l \text{ est définie sur } \mathcal{D}_l = \mathbb{R}^* .}$$

Elle est dérivable sur $\mathcal{D}_l$ en tant que produit et quotient de fonctions dérivables, et

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad l'(x) = \frac{(x e^x + e^x) \times (e^x - 1) - x e^x \times e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^{2x} - x e^x - e^x}{(e^x - 1)^2}$$

soit

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^* \quad l'(x) = \frac{e^x (e^x - x - 1)}{(e^x - 1)^2}}$$

Considérons maintenant la fonction $m : x \mapsto e^x - x - 1$ sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable en tant que somme de fonctions usuelles dérivables et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad m'(x) = e^x - 1$$

si bien que

$$m'(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$$

Ceci permet de dresser le tableau de variations de m sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$m'(x)$	$-$	0	$+$
$m(x)$	$\searrow$ 0 $\nearrow$		

On déduit de ce tableau de variations que $m(x) = e^x - x - 1 > 0$ pour tout $x \neq 0$.

Par conséquent,

$$\forall x \neq 0 \quad l'(x) > 0$$

Exercice 5

Partie A

- 1) Cela signifie que tout élément de F possède **au plus un** antécédent par f dans E
ou encore que **la fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.**

Pour démontrer que f est injective, on procède de la manière suivante :

- ★ on considère deux éléments quelconques x_1 et $x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$;
- ★ on démontre alors que $x_1 = x_2$.

- 2) Cela signifie que tout élément de F possède **au moins un** antécédent par f dans E
ou encore que **la fonction f atteint toutes les valeurs de l'ensemble d'arrivée F .**

Pour démontrer que f est surjective, on procède de la manière suivante :

- ★ on considère un élément quelconque $y \in F$;
- ★ on prouve l'existence d'un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Partie B

- 1) Soit $y \in \mathbb{R}$. On a : $f(x) = y \iff 3x - 7 = y \iff x = \frac{y+7}{3}$

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution x dans $\mathbb{R}$, donc

L'application f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

- 2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = 2|x| + 1 \geq 1$; en particulier, 0 n'a pas d'antécédent par g .

L'application g n'est pas surjective.

De plus, $g(-1) = 3 = g(1)$ ce qui montre que

L'application g n'est pas injective.

- 3) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$h(x, y) = (a, b) \iff \begin{cases} x = a \\ x + y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = a \\ y = b - a \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $h(x, y) = (a, b)$ admet une unique solution (x, y) dans $\mathbb{R}^2$, ce qui montre que

L'application h est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6

- 1) Soient n_1 et $n_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $f(n_1) = f(n_2)$. Alors $3n_1 = 3n_2$ d'où $n_1 = n_2$.

Ainsi,

L'application f est injective.

Cependant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le nombre $f(n) = 3n$ est un multiple de 3.

Par exemple, 1 n'a pas d'antécédent par f .

Ainsi,

L'application f n'est pas surjective.

- 2) Il faut déterminer les antécédents (éventuels) de chaque élément de A , en notant pour cela que pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$,

$$f(n) = p \iff 3n = p \iff n = p/3 \text{ si } p \in 3\mathbb{Z}$$

Ainsi :

- -2 et 5 n'ont pas d'antécédents par f (ce ne sont pas des multiples de 3)
- $0, 6$ et 12 ont pour antécédents $0, 2$ et 4 .

De ce fait,

L'ensemble des antécédents de A par f est $\{0; 2; 4\}$.

Devoir Surveillé n°3 de Mathématiques

Samedi 6 Décembre 2025 (Durée : 3 h)

Exercice 1Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E .

- 1) Simplifier : (a) $(A \setminus B) \cup (A \cap B)$ (b) $\overline{A \cap B} \cup \overline{B \cap A}$ (c) $\overline{(A \cap B) \cup \overline{B}}$
- 2) Montrer que : $A \cap C = A \cup B \iff B \subset A \subset C$.
- 3) Montrer que : $(A \cup B \subset C) \iff (A \subset C \text{ et } B \subset C)$.

Exercice 2On pose $z = -\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

- 1) Calculer la forme algébrique de z^2 .
Attention à bien aller au bout des calculs, on doit trouver une expression relativement simple.
- 2) Déterminer alors la forme exponentielle de z^2 .
- 3) En déduire celle de z .
- 4) Que valent le sinus et le cosinus de l'argument de z ?
On vérifiera la cohérence des valeurs obtenues.

Exercice 3 - Questions de Cours

- 1) (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition de $e^{i\theta}$.
(b) Rappeler (ou retrouver) les Formules d'Euler.
- 2) Soient a et b deux réels.
(a) Donner les développements de $\cos(a - b)$ et $\sin(a - b)$.
(b) Comment retrouve-t-on ces formules à partir des exponentielles complexes ?
- 3) Soient p et q deux réels.
(a) Comment factorise-t-on $e^{ip} + e^{iq}$?
(b) Retrouver les factorisations de $\cos(p) + \cos(q)$ et $\sin(p) + \sin(q)$.

Exercice 4 - le QCM de tous les Dangers !

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte. Vous indiquerez sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie, **sans aucune justification**.

Les réponses incorrectes seront sanctionnées (avec un empressement sadique).

Par contre, l'absence de réponse n'est pas pénalisée ... faites donc le bon choix !

1) Le module du complexe $3 + i$ vaut :

- a. 4 b. $\sqrt{8}$ c. $\sqrt{10}$

2) Soit le complexe $z = 3 + i(4 - 5i)$. Alors :

- a. $\operatorname{Re}(z) = 3$ b. $|z| = 4\sqrt{5}$ c. $\bar{z} = 3 - i(4 - 5i)$

3) On considère les nombres complexes $z_1 = -2 + 2i$ et $z_2 = 2 + 2i\sqrt{3}$.

Leur quotient $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$ a pour forme algébrique :

- a. $\frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}}$ b. $\frac{\sqrt{3}-1}{4} + \frac{\sqrt{3}+1}{4}i$ c. $\frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{4}i$

4) Le nombre complexe $z = -1 - i$ s'écrit sous forme exponentielle :

- a. $z = -\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ b. $z = \sqrt{2}e^{i5\pi/4}$ c. $z = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$

5) Considérons le nombre complexe $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{i}$. Alors :

- a. $z = \sqrt{3} - i$ b. $\arg(z) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ c. $z^6 = -64$

6) Une solution de l'équation $3z - \bar{z} = 2 - 8i$ est :

- a. $1 - 4i$ b. $1 - 2i$ c. 1

7) Soit z un nombre complexe ; $|z - i|$ est égal à :

- a. $|z| + 1$ b. $|z| - 1$ c. $|i\bar{z} - 1|$

8) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ . Un argument de $\frac{-\sqrt{3}+i}{z}$ est :

- a. $-\frac{\pi}{6} - \theta$ b. $-\frac{5\pi}{6} + \theta$ c. $\frac{5\pi}{6} - \theta$

9) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\frac{z-2}{z-1} = z$ est :

- a. $\{1 - i\}$ b. L'ensemble vide c. $\{1 - i ; 1 + i\}$

10) L'équation $e^z = -2$ admet sur $\mathbb{C}$:

- a. une unique solution b. aucune solution c. une infinité de solutions

Exercice 5

On considère le polynôme $P(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260$, où z est un nombre complexe.

- 1) Vérifier que $P(z) = (z^2 - 4z + 13)(z^2 + 4z + 20)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 6

Étudier la parité des fonctions suivantes, qui sont toutes définies sur $\mathbb{R}$:

$$f : x \mapsto \frac{\cos(3x) + 2}{x^2 + 1} \qquad g : x \mapsto x^3 \sin(x) \qquad h : x \mapsto 4x - 7$$

Exercice 7

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{2} + 2 + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ et l'on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de cette fonction.
- 2) Prouver que le point $\Omega(0; 2)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
- 3) (a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
(b) En déduire l'existence de trois droites asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$.
(c) Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'asymptote oblique.
- 4) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
- 5) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
- 6) D'un geste élégant et décontracté, esquisser l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 8

On définit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - \cos x}$ sur $[0; \pi]$.

- 1) Sans utiliser de calculs de dérivées, étudier ses variations et préciser ses extrema.
Attention aux ensembles de départ / d'arrivée lors des compositions de fonctions monotones ...
- 2) Calculer la dérivée de la fonction f puis retrouver son sens de variation.

Exercice 1

1) (a) On a : $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap E = \boxed{A}$

(b) De même, $\overline{A \cap B} \cup \overline{B \cap A} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{B} \cup A = (A \cup \overline{A}) \cup \overline{B} = E \cup \overline{B} = \boxed{E}$

(c) Enfin, $\overline{(A \cap B) \cup \overline{B}} = \overline{A \cap B} \cap B = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap B = (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap B) = (\overline{A} \cap B) \cup \emptyset = \boxed{(\overline{A} \cap B)}$

2) • Supposons que $A \cup B = A \cap C$.

★ Comme $B \subset (A \cup B)$, alors $B \subset (A \cap C)$; en particulier, $B \subset A$ puisque $A \cap C \subset A$.

★ De même, $A \subset (A \cup B)$ d'où $A \subset (A \cap C)$; ainsi, $A \subset C$ puisque $A \cap C \subset C$.

Ainsi, $B \subset A \subset C$: on a donc prouvé que $\boxed{A \cup B = A \cap C \implies B \subset A \subset C}$.

• Supposons que $B \subset A \subset C$.

★ Comme $B \subset A$, alors $A \cup B = A$.

★ Comme $A \subset C$, alors $A \cap C = A$.

Ainsi, $A \cup B = A \cap C$: on a donc prouvé que $\boxed{B \subset A \subset C \implies A \cup B = A \cap C}$.

Par double implication,

$$\boxed{A \cap C = A \cup B \iff B \subset A \subset C}$$

3) • Supposons que $A \cup B \subset C$.

★ Comme $A \subset (A \cup B)$, alors $A \subset C$.

★ De même, $B \subset (A \cup B)$ d'où $B \subset C$.

Ainsi, $A \subset C$ et $B \subset C$: on a donc prouvé que $\boxed{(A \cup B \subset C) \implies (A \subset C \text{ et } B \subset C)}$.

• Supposons que $A \subset C$ et $B \subset C$.

Prenons alors un élément $x \in A \cup B$.

★ Ou bien $x \in A$, auquel cas $x \in C$.

★ Ou bien $x \in B$, auquel cas $x \in C$.

Ainsi, $x \in C$ pour tout $x \in A \cup B$, ce qui montre que $A \cup B \subset C$.

On a donc prouvé que $\boxed{(A \subset C \text{ et } B \subset C) \implies A \cup B \subset C}$.

Par double implication,

$$\boxed{A \cup B \subset C \iff (A \subset C \text{ et } B \subset C)}$$

Exercice 2

1) On a

$$\begin{aligned}
 z^2 &= \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}} \right)^2 \\
 &= 2 + \sqrt{2} - (2 - \sqrt{2}) - 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} \\
 &= 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{z^2 = 2\sqrt{2}(1-i)}.$$

2) Notons que

$$1-i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$$

si bien que

$$\boxed{z^2 = 4e^{-i\pi/4}}.$$

3) Posons $z = r e^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Alors

$$z^2 = r^2 e^{i2\theta} = 4e^{-i\pi/4}$$

d'où

$$r^2 = 4 \quad \text{et} \quad 2\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

soit

$$r = 2 \quad \text{et} \quad \theta = -\frac{\pi}{8} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ainsi,

$$\theta = -\frac{\pi}{8} \quad \text{ou} \quad \frac{7\pi}{8} + 2k\pi$$

Comme $\text{Im}(z) > 0$, on a nécessairement $\theta = \frac{7\pi}{8} + 2k\pi$.

En conséquence,

$$\boxed{z = 2e^{i7\pi/8}}$$

4) Comme

$$z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}} = 2e^{i7\pi/8} = 2 \left[\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) \right]$$

alors

$$\boxed{\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

L'angle $7\pi/8$ étant dans l'intervalle $[\pi/2; \pi]$, son cosinus est bien négatif et son sinus est bien positif. Vérifions enfin que la somme de leurs carrés vaut 1 :

$$\cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right)^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4} = 1$$

Tout va bien, les résultats obtenus sont cohérents !!!

Exercice 3

1) (a) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

(b) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

2) (a) $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$ et $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)$.

(b) On retrouve ces formules en écrivant la relation $e^{i(a-b)} = e^{ia} \times e^{-ib}$:

$$\begin{aligned} \cos(a - b) + i \sin(a - b) &= [\cos(a) + i \sin(a)] [\cos(b) - i \sin(b)] \\ &= [\cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)] + i [\sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)] \end{aligned}$$

puis en identifiant les parties réelles et imaginaires des deux membres.

3) (a) On factorise par $e^{i(p+q)/2}$, ce qui conduit grâce aux formules d'Euler à

$$e^{ip} + e^{iq} = e^{i(p+q)/2} (e^{i(p-q)/2} + e^{-i(p-q)/2}) = 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i(p+q)/2}$$

(b) Alors $\cos(p) + \cos(q) = \operatorname{Re}(e^{ip} + e^{iq}) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$$\text{et } \sin(p) + \sin(q) = \operatorname{Im}(e^{ip} + e^{iq}) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Exercice 4

1) On a $|3 + i| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$. Ainsi, le module du complexe $3 + i$ vaut :

a. 4

b. $\sqrt{8}$

c. $\sqrt{10}$

2) Comme $z = 3 + i(4 - 5i) = 8 + 4i$, alors $|z| = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

On peut donc affirmer que :

a. $\operatorname{Re}(z) = 3$

b. $|z| = 4\sqrt{5}$

c. $\bar{z} = 3 - i(4 - 5i)$

3) On a : $z_3 = \frac{-1 + i}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{(-1 + i)(1 - i\sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1)}{4}$

Le quotient $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$ a donc pour forme algébrique :

a. $\frac{-1 + i}{-1 + i\sqrt{3}}$

b. $\frac{\sqrt{3} - 1}{4} + \frac{\sqrt{3} + 1}{4}i$

c. $\frac{\sqrt{3} + 1}{4} + \frac{\sqrt{3} - 1}{4}i$

4) On a : $-1 - i = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right)$

Ainsi, $z = -1 - i$ s'écrit sous forme exponentielle :

a. $z = -\sqrt{2}e^{i\pi/4}$

b. $z = \sqrt{2}e^{i5\pi/4}$

c. $z = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$

5) On a :
$$z = \frac{1-i\sqrt{3}}{i} = -\sqrt{3}-i = 2\left(\frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right) = 2e^{-5i\pi/6}$$

donc $z^6 = 64e^{-i5\pi} = -64$. Autrement dit :

a. $z = \sqrt{3}-i$ b. $\arg(z) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ c. $z^6 = -64$

6) Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} 3z - \bar{z} = 2 - 8i &\iff 3(x + iy) - (x - iy) = 2 - 8i \\ &\iff 2x + 4iy = 2 - 8i \\ &\iff x = 1 \quad \text{et} \quad y = -2 \\ &\iff z = 1 - 2i \end{aligned}$$

L'équation $3z - \bar{z} = 2 - 8i$ admet donc pour solution :

a. $1 - 4i$ b. $1 - 2i$ c. 1

7) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$|z - i| = |\overline{z - i}| = |\bar{z} + i| = |i| \times |\bar{z} + i| = |i| |\bar{z} + i| = |i\bar{z} - 1|$$

Ainsi $|z - i|$ est égal à :

a. $|z| + 1$ b. $|z| - 1$ c. $|i\bar{z} - 1|$

8) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ . Il vient

$$\arg\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{z}\right) = \arg(-\sqrt{3}+i) - \arg z = \frac{5\pi}{6} - \theta + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Un argument de $\frac{-\sqrt{3}+i}{z}$ est alors :

a. $-\frac{\pi}{6} - \theta$ b. $-\frac{5\pi}{6} + \theta$ c. $\frac{5\pi}{6} - \theta$

9) Pour tout $z \neq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{z-2}{z-1} = z &\iff z-2 = z^2-z \\ &\iff z^2-2z+2=0 \\ &\iff (z-1)^2+1=0 \\ &\iff (z-1+i)(z-1-i)=0 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\frac{z-2}{z-1} = z$ est donc :

a. $\{1-i\}$ b. L'ensemble vide c. $\{1-i; 1+i\}$

10) Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on a

$$e^z = -2 \iff e^x e^{iy} = 2e^{i\pi} \iff x = \ln(2) \quad \text{et} \quad y = \pi + 2k\pi \quad (\text{avec } k \in \mathbb{Z})$$

Ainsi, l'équation $e^z = -2$ admet sur $\mathbb{C}$

a. une unique solution b. aucune solution c. une infinité de solutions

Exercice 5

1) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} & (z^2 - 4z + 13)(z^2 + 4z + 20) \\ &= z^4 + 4z^3 + 20z^2 - 4z^3 - 16z^2 - 80z + 13z^2 + 52z + 260 \\ &= z^4 + 17z^2 - 28z + 260 \\ &= P(z) \end{aligned}$$

De ce fait

$$P(z) = (z^2 - 4z + 13)(z^2 + 4z + 20) \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}$$

2) D'après la question précédente, on a pour $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} P(z) = 0 &\iff (z^2 - 4z + 13)(z^2 + 4z + 20) = 0 \\ &\iff z^2 - 4z + 13 = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 + 4z + 20 = 0 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} z^2 - 4z + 13 &= [z^2 - 4z + 4] + 9 \\ &= (z - 2)^2 - (3i)^2 \\ &= (z - 2 - 3i)(z - 2 + 3i) \end{aligned}$$

si bien que

$$z^2 - 4z + 13 = 0 \iff z = 2 + 3i \quad \text{ou} \quad z = 2 - 3i$$

On peut aussi calculer le discriminant : comme $\Delta = 16 - 52 = -36 = (6i)^2$, on choisit $\delta = 6i$ et l'on retrouve les racines $2 + 3i$ et $2 - 3i$.

De même

$$\begin{aligned} z^2 + 4z + 20 &= [z^2 + 4z + 4] + 16 \\ &= (z + 2)^2 - (4i)^2 \\ &= (z + 2 - 4i)(z + 2 + 4i) \end{aligned}$$

si bien que

$$z^2 + 4z + 20 = 0 \iff z = -2 + 4i \quad \text{ou} \quad z = -2 - 4i$$

On peut aussi calculer le discriminant : comme $\Delta = 16 - 80 = -64 = (8i)^2$, on choisit $\delta = 8i$ et l'on retrouve les racines $-2 + 4i$ et $-2 - 4i$.

L'ensemble des solutions complexes de l'équation $P(z) = 0$ est donc $\mathcal{S} = \{-2 - 4i; -2 + 4i; 2 - 3i; 2 + 3i\}$.

Exercice 6

Nos trois fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$, qui est bien symétrique par rapport à 0.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = \frac{\cos(-3x) + 2}{(-x)^2 + 1} = \frac{\cos(3x) + 2}{x^2 + 1} = f(x)$ donc f est paire.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(-x) = (-x)^3 \sin(-x) = x^3 \sin(x) = g(x)$ donc g est paire.

3) On observe que les nombres $h(1) = -3$ et $h(-1) = -11$ ne sont ni égaux ni opposés.

De ce fait, h n'est ni paire ni impaire.

Exercice 7

- 1) Le nombre $f(x)$ est défini lorsque $x + 1 \neq 0$ et que $\frac{x-1}{x+1} > 0$ à cause du logarithme.

Un tableau de signe (À FAIRE!!!) montre que $\frac{x-1}{x+1} > 0 \iff x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

Ainsi,

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[.$$

- 2) Déjà, l'ensemble $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0. De plus, on a pour $|h| > 1$

$$\begin{aligned} f(0+h) + f(0-h) &= \frac{h}{2} + 2 + \ln\left(\frac{h-1}{h+1}\right) - \frac{h}{2} + 2 + \ln\left(\frac{-h-1}{-h+1}\right) \\ &= 4 + \ln\left(\frac{h-1}{h+1}\right) + \ln\left(\frac{h+1}{1-h}\right) \\ &= 2 \times 2 \end{aligned}$$

donc

$$\text{Le point } \Omega(0; 2) \text{ est un centre de symétrie de } \mathcal{C}_f.$$

- 3) (a) • Comme $1 = o_{x \rightarrow +\infty}(x)$, alors $\frac{x-1}{x+1} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$.

Par continuité de $\ln$, il s'ensuit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln(1) = 0$.

On en déduit enfin par quotient et sommes de limites que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- Par symétrie, il en découle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

- On a $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = 0$ d'où $\lim_{x \rightarrow 1} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty$ par composition de limites.

On en déduit par quotient et sommes de limites que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$.

- Par symétrie, il en découle que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$.

- (b) Ainsi, $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptotes les droites $\Delta_1 : x = 1$ et $\Delta_2 : x = -1$.

De plus, on a vu que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$. De même, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$

si bien que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{x}{2} + 2\right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{x}{2} + 2\right) \right] = 0$

et donc

$$\text{La droite } \Delta_3 : y = \frac{x}{2} + 2 \text{ est asymptote à } \mathcal{C}_f \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty.$$

- (c) Cette position dépend du signe de $f(x) - \left(\frac{x}{2} + 2\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$. Or, pour $x \in \mathcal{D}_f$,

$$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0 \iff \frac{x-1}{x+1} > 1 \iff \frac{x-1}{x+1} - 1 > 0 \iff \frac{-2}{x+1} > 0 \iff x+1 < 0$$

donc

$$\text{La courbe } \mathcal{C}_f \text{ est située au-dessus de la droite } \Delta_3 \text{ sur }]-\infty; -1[\text{ et en-dessous sur }]1; +\infty[.$$

- 4) La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ en tant que composée de fonctions usuelles dérivables sur leurs ensembles de définitions respectifs. Soyons malins :

Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$
$$f(x) = \frac{x}{2} + 2 + \ln|x-1| - \ln|x+1| \quad (\text{astuce diabolique !})$$

donc
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x+1 - (x-1)}{x^2-1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{x^2-1} \end{aligned}$$

Comme $x^2 - 1 > 0$ sur l'ensemble $\mathcal{D}_f$, il en découle que $f' > 0$.

Ainsi, f est strictement croissante sur chacun des intervalles $] -\infty ; -1 [$ et $] 1 ; +\infty [$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		+		+
$f(x)$		$+\infty$		$+\infty$
		$\nearrow$		$\nearrow$
	$-\infty$		$-\infty$	

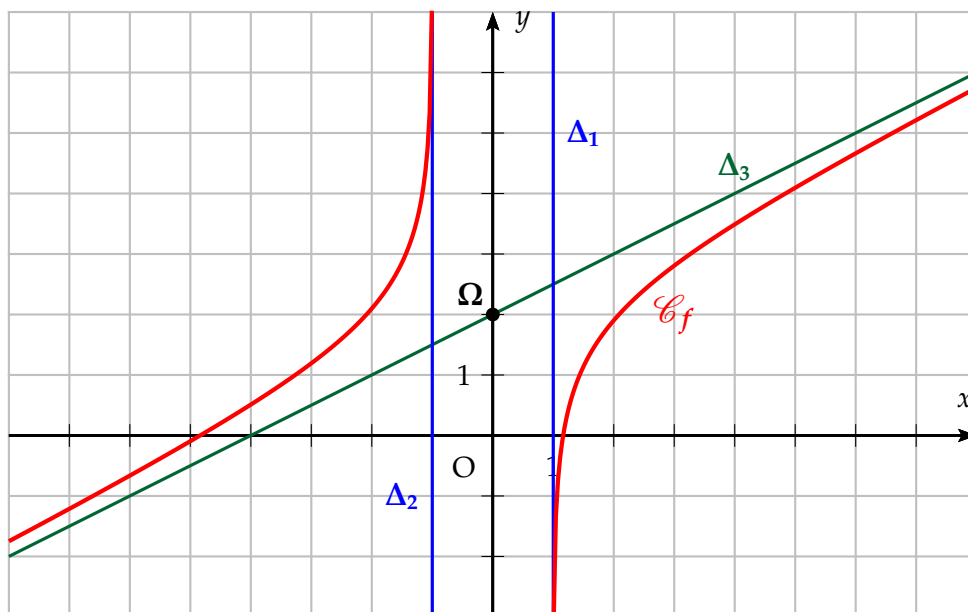
- 5) Appliquons le théorème de la bijection continue à la fonction f sur l'intervalle $] 1 ; +\infty [$.

- La fonction est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, donc continue sur $] 1 ; +\infty [$.
- La fonction f est strictement croissante sur $] 1 ; +\infty [$.

De ce fait, f est une bijection de $] 1 ; +\infty [$ sur $f(] 1 ; +\infty [) = \mathbb{R}$ (cf. tableau de variations).
En particulier, 0 admet un unique antécédent par f :

Il existe un unique réel $\alpha \in] 1 ; +\infty [$ tel que $f(\alpha) = 0$.

- 6) Et voici un très joli dessin.



Exercice 8

- 1) La fonction $f_1 : x \mapsto \cos(x)$ est décroissante sur $[0; \pi]$.

De plus, la fonction affine $f_2 : y \mapsto 1 - y$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

De ce fait, leur composée $f_3 = f_2 \circ f_1$ est croissante sur $[0; \pi]$.

En outre, $f_3(x) = 1 - \cos x \geq 0$ pour tout $x \in [0; \pi]$.

Enfin, la fonction $f_4 : z \mapsto \sqrt{z}$ est croissante sur $[0; +\infty[$.

Par conséquent, leur composée $f = f_4 \circ f_3$ est croissante sur $[0; \pi]$.

Son minimum est ainsi $f(0) = \sqrt{1-1} = 0$ et son maximum $f(\pi) = \sqrt{1-(-1)} = \sqrt{2}$.

- 2) Posons $u : x \mapsto 1 - \cos(x)$: comme $u(x) > 0$ sur l'intervalle $]0; \pi[$, la fonction $f = \sqrt{u}$ est dérivable en tant que composée de fonctions usuelles dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs. De plus,

$$\forall x \in]0; \pi[\quad f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{+\sin(x)}{2\sqrt{1-\cos(x)}} > 0$$

si bien que la fonction f est strictement croissante sur $[0; \pi]$. Voici son tableau de variations :

x	0	π
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	$\sqrt{2}$

Devoir Surveillé n°4 de MathématiquesSamedi 17 Janvier 2026 (*Durée : 3 h*)**Exercice 1**

Calculer les intégrales suivantes :

$$(a) \int_1^3 u^2 \ln(u) \, du \quad (b) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t) \, dt}{1 + \sin^2(t)} \quad (c) \int_2^4 \frac{u+3}{u^2-1} \, du \quad (d) \int_1^9 e^{\sqrt{x}} \, dx$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$$(a) \int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} \quad (b) \int_{\pi/3}^{\pi/4} \frac{\sin^3(x) \, dx}{\cos x} \quad (c) \int \frac{\sin^3 x \, dx}{1 + \cos^2 x} \quad (d) \int_0^1 \ln(1 + \ell) \, d\ell$$

Exercice 3Étudier les limites des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} \quad v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad w_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$$

Exercice 4Résoudre sur $\mathbb{R}$ les problèmes de Cauchy suivants :

$$(a) \begin{cases} y' + 2y = x e^x \\ y(1) = 2 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} y - y' = \frac{e^x}{1+x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} y'' + y' - 2y = 16x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -4 \end{cases}$$

Exercice 5

La fonction g est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{1}{20} y(10 - y)$.
On suppose en outre que $g(0) = 1$ et que g ne s'annule jamais.

- 1) Montrer que la fonction $f = \frac{1}{g}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (F) : $z' = -\frac{z}{2} + \frac{1}{20}$.
- 2) Résoudre l'équation (F) sur $\mathbb{R}$.
- 3) Déterminer l'expression de f puis celle de g .

Problème

On se propose dans ce problème d'étudier la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} - x$.

Rappel : on a $\ln(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h$.

Partie A – Premiers résultats

- 1) (a) Donner l'ensemble de définition de f .
(b) Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition.
- 2) (a) Étudier la parité de la fonction f .
(b) Qu'en déduit-on pour sa courbe $\mathcal{C}_f$?
- 3) (a) Montrer que $\ln(1+x^2) = 2 \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ pour tout $x > 0$.
(b) Calculer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$.
(c) En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote Δ en $-\infty$ et en $+\infty$.
(d) Déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ .

Partie B – Étude des variations

Soit g la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $g(t) = t \ln t + (t-1)(t-2)$.

- 4) Calculer $g'(t)$ et étudier son signe pour $t \in [1; +\infty[$.
- 5) En déduire le signe de g sur $[1; +\infty[$.
- 6) Calculer la dérivée f' de f et montrer que $f'(x) = \frac{g(1+x^2)}{-x^2(1+x^2)}$.
- 7) Dresser le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$.

Partie C – Prolongement en 0

On définit la fonction φ sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(x) = f(x)$ pour tout $x \neq 0$.

- 8) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \varphi(0)$.
- 9) Prouver que la fonction φ est dérivable en 0.

Exercice 1

1) IPP : comme $\left[\frac{u^3}{3} \ln(u)\right]' = u^2 \ln(u) + \frac{u^3}{3} \times \frac{1}{u} = u^2 \ln(u) + \frac{u^2}{3}$

alors $\left[\frac{u^3}{3} \ln(u)\right]_1^3 = \int_1^3 u^2 \ln(u) du + \int_1^3 \frac{u^2}{3} du$

donc $\boxed{\int_1^3 u^2 \ln(u) du = \left[\frac{u^3}{3} \ln(u)\right]_1^3 - \left[\frac{u^3}{9}\right]_1^3 = 9 \ln(3) - \frac{26}{9}}$

2) Changement de variable $\boxed{u = \sin t}$ sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Alors $du = \cos(t) dt$

d'où $\boxed{\int_{t=0}^{t=\pi/2} \frac{\cos(t) dt}{1 + \sin^2(t)} = \int_{u=0}^{u=1} \frac{du}{1 + u^2} = \left[\arctan u\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}}$

3) Le nombre $f(u) = \frac{u+3}{u^2-1} = \frac{u+3}{(u-1)(u+1)}$ s'écrit $g(u) = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{u+1}$ avec a et $b \in \mathbb{R}$.

En effet, $\forall u \geq 2 \quad g(u) = \frac{a(u+1) + b(u-1)}{u^2-1} = \frac{(a+b)u + (a-b)}{u^2-1}$

donc $f = g \iff \begin{cases} a+b=1 \\ a-b=3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a=4 \\ 2b=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$

Ainsi, $\forall u \geq 2 \quad \frac{u+3}{u^2-1} = \frac{2}{u-1} - \frac{1}{u+1}$

d'où
$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{u+3}{u^2-1} du &= 2 \int_2^4 \frac{du}{u-1} - \int_2^4 \frac{du}{u+1} \\ &= 2 \left[\ln(u-1) \right]_2^4 - \left[\ln(u+1) \right]_2^4 \\ &= 2(\ln 3 - \ln 1) - (\ln 5 - \ln 3) \end{aligned}$$

soit $\boxed{\int_2^4 \frac{u+3}{u^2-1} du = 3 \ln 3 - \ln 5 = \ln\left(\frac{27}{5}\right)}$

4) Changement de variable $\boxed{u = \sqrt{x}}$ sur l'intervalle $[1; 9]$. Alors $x = u^2$ et $dx = 2u du$

d'où $\int_{x=1}^{x=9} e^{\sqrt{x}} dx = \int_{u=1}^{u=3} e^u \times 2u du = \int_1^3 2u e^u du$

Cherchons une primitive de $f(u) = 2u e^u$ sous la forme $F(u) = (au + b) e^u$.

Alors $F'(u) = a e^u + (au + b) e^u = (au + (a + b)) e^u$

donc $F' = f \iff \begin{cases} a=2 \\ a+b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2 \\ b=-a=-2 \end{cases}$

On a ainsi $F(u) = (2u - 2) e^u$ de sorte que $\int_1^3 2u^3 e^u du = [(2u - 2) e^u]_1^3 = 4e^3$

soit $\boxed{\int_1^9 e^{\sqrt{x}} dx = 4e^3}$

Exercice 2

- (a) Effectuons le changement de variable $\boxed{u = \sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+$: alors $x = u^2$ et $dx = 2u du$.

De ce fait,
$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = \int \frac{2u du}{u^2 + u} = 2 \int \frac{du}{u + 1} = 2 \ln |u + 1|$$

soit

$$\boxed{\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = 2 \ln(1 + \sqrt{x})}$$

- (b) Effectuons le changement de variable $\boxed{u = \cos x}$ sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Il en découle que $\sin^2(x) = 1 - u^2$ et $du = -\sin(x) dx$

d'où
$$\frac{\sin^3(x) dx}{\cos x} = \frac{-\sin^2(x) \times (-\sin(x) dx)}{\cos x}$$

$$= \frac{(u^2 - 1) du}{u} = \left(u - \frac{1}{u}\right) du$$

De ce fait
$$\int_{x=\pi/3}^{x=\pi/4} \frac{\sin^3(x) dx}{\cos x} = \int_{u=1/2}^{u=\sqrt{2}/2} \left(u - \frac{1}{u}\right) du = \left[\frac{u^2}{2} - \ln u\right]_{1/2}^{\sqrt{2}/2}$$

$$= \frac{1}{4} - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{8} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \ln(\sqrt{2})$$

soit

$$\boxed{\int_{\pi/3}^{\pi/4} \frac{\sin^3(x) dx}{\cos x} = \frac{1}{8} - \frac{\ln 2}{2}}$$

- (c) Effectuons le changement de variables $\boxed{u = \cos x}$ sur $\mathbb{R}$.

Alors $du = -\sin x dx$ et $-\sin^2 x = \cos^2 x - 1 = u^2 - 1$

d'où
$$\int \frac{\sin^3 x dx}{1 + \cos^2 x} = \int \frac{(-\sin^2 x)(-\sin x dx)}{1 + \cos^2 x} = \int \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} du$$

Par division euclidienne, $u^2 - 1 = u^2 + 1 - 2$

si bien que
$$\int \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} du = \int \left(1 - \frac{2}{u^2 + 1}\right) du = u - 2 \arctan u$$

d'où

$$\boxed{\int \frac{\sin^3 x dx}{1 + \cos^2 x} = \cos x - 2 \arctan(\cos x)}$$

- (d) Une dernière intégration par parties pour la route :

Notons
$$\left| \begin{array}{l} f'(\ell) = 1 \\ g(\ell) = \ln(1 + \ell) \end{array} \right| \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{l} f(\ell) = 1 + \ell \\ g'(\ell) = \frac{1}{1 + \ell} \end{array} \right|$$

Alors
$$\int_0^1 \ln(1 + \ell) d\ell = \left[(1 + \ell) \ln(1 + \ell)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(1 + \ell) d\ell}{1 + \ell} = 2 \ln(2) - \int_0^1 1 d\ell$$

soit

$$\boxed{\int_0^1 \ln(1 + \ell) d\ell = 2 \ln(2) - 1}$$

Exercice 3

Dans chaque cas, on va faire apparaître une somme de Riemann sur $[0; 1]$ et utiliser le fait que, si la fonction f est continue sur l'intervalle $[0; 1]$, alors

$$\boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt}$$

1) Définissons la fonction $f : t \mapsto t^2$ sur $[0; 1]$. Pour tout entier $n \geq 1$, on a alors

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

C'est bien une somme de Riemann associée à la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$. Cette fonction étant continue car polynomiale, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Autrement dit,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}}$$

2) Posons $g : t \mapsto \sin(\pi t)$ sur l'intervalle $[0; 1]$. Pour tout entier $n \geq 1$, on a alors

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right)$$

C'est bien une somme de Riemann associée à la fonction g sur l'intervalle $[0; 1]$. De plus, la fonction g est continue en tant que composée de fonctions usuelles continues sur $\mathbb{R}$, si bien que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel

$$\int_0^1 g(t) dt = \int_0^1 \sin(\pi t) dt = \left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi} \right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{2}{\pi}}$$

3) Définissons la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ sur $[0; 1]$. Pour tout entier $n \geq 1$, on a alors

$$w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h\left(\frac{k}{n}\right)$$

C'est bien une somme de Riemann associée à la fonction h sur l'intervalle $[0; 1]$. Comme h est continue en tant que quotient de polynômes, la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ainsi vers le réel

$$\int_0^1 h(t) dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \left[\arctan(t) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \frac{\pi}{4}}$$

Exercice 4

- (a) • L'équation homogène $y' + 2y = 0$ admet pour solutions toutes les fonctions de la forme $y_C : x \mapsto C e^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{C}$.

- Cherchons une solution particulière sous la forme $y_P(x) = (ax + b)e^x$. On a alors

$$y_P'(x) + 2y_P(x) = (ax + b)e^x + a e^x + 2(ax + b)e^x = (3ax + 3b + a)e^x$$

De ce fait, y_P est solution de (E) si, et seulement si, $\begin{cases} 3a = 1 \\ a + 3b = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 1/3 \\ b = -1/9 \end{cases}$.

Ainsi $y_P : x \mapsto \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)e^x$ est une solution de l'équation (E).

- On en déduit que les solutions de l'équation (E) sont toutes les fonctions

$$f_C : x \mapsto C e^{-2x} + \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)e^x \text{ avec } C \in \mathbb{C}$$

- Pour une telle fonction, on a $f_C(1) = 2 \iff C e^{-2} + \frac{2}{9}e = 2 \iff C = 2e^2 - \frac{2}{9}e^3$.

En conséquence, la solution de notre problème de Cauchy est la fonction

$$f : x \mapsto \left(2e^2 - \frac{2}{9}e^3\right)e^{-2x} + \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)e^x$$

- (b) • L'équation homogène $y - y' = 0$ admet pour solutions toutes les fonctions de la forme $y_C : x \mapsto C e^x$ avec $C \in \mathbb{C}$.

- Cherchons une solution particulière sous la forme $y_P(x) = C(x)e^x$. On a alors

$$y_P(x) - y_P'(x) = C(x)e^x - (C'(x)e^x + C(x)e^x) = -C'(x)e^x$$

De ce fait, y_P est solution de (E) si, et seulement si, $-C'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Ceci équivaut à $C(x) = -\arctan(x) + C^{\text{te}}$... et l'on peut prendre la constante égale à 0.

Ainsi $y_P : x \mapsto -\arctan(x)e^x$ est une solution de l'équation (E).

- On en déduit que les solutions de l'équation (E) sont toutes les fonctions

$$f_C : x \mapsto C e^x - \arctan(x)e^x \text{ avec } C \in \mathbb{C}$$

- Pour une telle fonction, on a $f_C(0) = 1 \iff C - 0 = 1 \iff C = 1$.

En conséquence, la solution de notre problème de Cauchy est la fonction

$$f : x \mapsto e^x - \arctan(x)e^x$$

- (c) • L'équation caractéristique associée est $r^2 + r - 2 = 0$.

Or $r^2 + r - 2 = 0 \iff (r+2)(r-1) = 0 \iff r = -2 \text{ ou } r = 1$

De ce fait, les solutions de l'équation homogène $y'' + y' - 2y = 0$ sont toutes les fonctions de la forme $g : x \mapsto \lambda e^{-2x} + \mu e^x$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

- Recherchons une solution particulière sous la forme $f_0 : x \mapsto ax + b$.

Alors $f_0'(x) = a$ et $f_0''(x) = 0$

donc $f_0''(x) + f_0'(x) - 2f_0(x) = -2ax + (a - 2b)$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. De ce fait, la fonction f_0 est solution de (E) si, et seulement si,

$$\begin{cases} -2a = 16 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -8 \\ b = a/2 = -4 \end{cases}$$

Ainsi, la fonction $f_0 : x \mapsto -8x - 4$ est une solution de l'équation (E).

- On en déduit que les solutions de l'équation (E) sont toutes les fonctions

$$f : x \mapsto \lambda e^{-2x} + \mu e^x - 8x - 4, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

- Pour une telle fonction, on a $f'(x) = -2\lambda e^{-2x} + \mu e^x - 8$ donc

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu - 4 = 0 \\ -2\lambda + \mu - 8 = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 4 \\ -2\lambda + \mu = 4 \end{cases}$$

En retranchant la seconde équation à la première, on obtient $3\lambda = 0$ soit $\lambda = 0$ d'où $\mu = 4$.

En conséquence, la solution de notre problème de Cauchy est la fonction

$$f : x \mapsto 4e^x - 8x - 4$$

Exercice 5

- La fonction g est dérivable et ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $f = \frac{1}{g}$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$f' = -\frac{g'}{g^2} = -\frac{1}{g^2} \times \frac{1}{20} g(10 - g) = -\frac{10 - g}{20g} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{g} + \frac{1}{20}$$

soit $f' = -\frac{f}{2} + \frac{1}{20}$, ce qui montre que la fonction f est solution de l'équation (F).

- Résolvons l'équation (F) : $z' + z/2 = 1/20$.

- L'équation homogène $z' + z/2 = 0$ admet pour solutions toutes les fonctions de la forme $z_C : x \mapsto C e^{-t/2}$ avec $C \in \mathbb{C}$.
- Cherchons une solution particulière sous la forme $z_P(x) = K$. On a alors

$$z_P'(x) + z_P(x)/2 = 0 + K/2 = K/2$$

De ce fait, z_P est solution de (F) si, et seulement si, $K/2 = 1/20$ soit $K = 1/10$.

Ainsi $z_P : x \mapsto 1/10$ est une solution de l'équation (F).

- On en déduit que les solutions de l'équation (F) sont toutes les fonctions

$$z : t \mapsto C e^{-t/2} + \frac{1}{10} \quad \text{avec } C \in \mathbb{C} \text{ une constante}$$

- La fonction f est une solution de (F), donc de la forme ci-dessus.

En outre, $f(0) = \frac{1}{g(0)} = 1 = C + \frac{1}{10}$ soit $C = \frac{9}{10}$ d'où $f : t \mapsto \frac{9e^{-t/2} + 1}{10}$.

Comme $g = \frac{1}{f}$, il en découle que $g : t \mapsto \frac{10}{9e^{-t/2} + 1}$.

Problème

- 1) (a) On a $1 + x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc le réel $\ln(1 + x^2)$ est bien défini.

Par contre, du fait de la présence du quotient, on a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

- (b) La fonction f est composée de fonctions usuelles dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs. De ce fait,

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

- 2) (a) Déjà, notons que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$f(-x) = \frac{\ln(1 + (-x)^2)}{-x} - (-x) = -\frac{\ln(1 + x^2)}{x} + x = -f(x)$$

donc

La fonction f est impaire.

- (b) Il en découle que sa courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

- 3) (a) Pour tout $x > 0$, on a

$$\ln(1 + x^2) = \ln\left(x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) = \ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 2 \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

- (b) si bien que
$$f(x) + x = \frac{\ln(1 + x^2)}{x} = 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x}$$

Or, on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ d'après les croissances comparées.

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$ par somme de limites

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \ln(1) = 0$ par continuité de $\ln$

et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0$ par quotient de limites.

On conclut par somme de limite que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = 0$.

- (c) Comme la fonction $x \mapsto f(x) + x$ est impaire (en tant que somme de fonctions impaires), il en découle également que $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = 0$

Ces deux calculs de limites prouvent que

La droite Δ d'équation $y = -x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

- (d) La position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ est donnée par le signe de $f(x) + x = \frac{\ln(1 + x^2)}{x}$.

Or, on a $1 + x^2 > 1$ si bien que $\ln(1 + x^2) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

De ce fait, le réel $f(x) + x$ est du signe de x sur $\mathbb{R}^*$.

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ sur $]0; +\infty[$ et en-dessous sur $] -\infty; 0[$.

- 4) La fonction g est dérivable comme composée de fonctions usuelles dérivables et

$$\forall t \geq 1 \quad g'(t) = \ln(t) + t \times \frac{1}{t} + t - 2 + t - 1 = \ln(t) + 2(t-1)$$

Or, pour $t \geq 1$, on a $\ln(t) \geq 0$ et $2(t-1) \geq 0$ d'où $\boxed{g'(t) \geq 0}$.

- 5) Il en découle que la fonction g est croissante sur $[1; +\infty[$.

Comme $g(1) = \ln(1) = 0$, $\boxed{g \geq 0 \text{ sur } [1; +\infty[}$.

- 6) La fonction f est dérivable comme composée de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned} \forall x \neq 0 \quad f'(x) &= \frac{\frac{2x}{1+x^2} \times x - \ln(1+x^2) \times 1}{x^2} - 1 \\ &= \frac{\frac{2x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2) - x^2}{x^2} \\ &= \frac{-2x^2 + (1+x^2) \ln(1+x^2) + x^2(1+x^2)}{-x^2(1+x^2)} \\ &= \frac{(1+x^2) \ln(1+x^2) + x^2(x^2-1)}{-x^2(1+x^2)} \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \frac{g(1+x^2)}{-x^2(1+x^2)}}$$

- 7) On sait que $g \geq 0$ sur $[1; +\infty[$ cf. question 2.(b).

Comme $1+x^2 \geq 1$, alors $g(1+x^2) \geq 0$ si bien que $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Ainsi, f est décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	
$f(x)$	0	$-\infty$

Calcul des limites

- Comme $\ln(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h$, alors $\frac{\ln(1+x^2)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{x} = x$ d'où $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = 0$.

On en déduit que $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0}$ par différence de limites.

- On a vu à la question 1.d. que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = 0$.

On en déduit par différence de limites que $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}$.

- 8) Par définition de φ , on a $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = \varphi(0)$, ce qu'il fallait démontrer.

- 9) Pour tout $x \neq 0$, on a $\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} - 1$.

Or $\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} = 1$ d'où $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = 0$ par différence de limites.

Ceci prouve que $\boxed{\varphi \text{ est dérivable en } 0}$ et que $\boxed{\varphi'(0) = 0}$.

Devoir Surveillé n°5 de MathématiquesSamedi 14 Février 2026 (*Durée : 3 h*)**Exercice 1**

Calculer les intégrales suivantes :

$$(a) \int \frac{dy}{2y - \sqrt{y}} \quad (b) \int_0^\pi \sin u (\cos u)^2 du \quad (c) \int \frac{e^x dx}{(1 + e^x)^4}$$

Exercice 2Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

- 1) (a) Justifier que I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) Calculer I_0 .
- 2) (a) Démontrer que $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) En déduire alors I_1 , puis I_2 et I_3 .
- 3) Utiliser les résultats précédents pour calculer $I = \int_0^1 (-x^3 + 2x^2 - x) e^{-x} dx$.
- 4) (a) Démontrer que $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 3On considère l'équation différentielle (E) : $x y'(x) - (2x+1)y(x) = 8x^2$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

- 1) Soit f une solution de (E). Montrer que la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est une solution de l'équation (F) : $y' = 2y + 8$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- 2) Soit h une solution de (F) sur $]0; +\infty[$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x h(x)$ est une solution de (E).
- 3) Résoudre (F) et en déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 4

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = v_n - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

- 1) Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4 .
- 2) Proposer alors une expression de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
- 3) Établir par récurrence que l'expression proposée convient pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Indication : ne développez surtout pas $(n+1)(n+2)$ lors des calculs ...

Exercice 5

On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} a_0 = 20 \\ a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{4} \end{cases} \text{ pour } n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = 60 \\ b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{4} \end{cases} \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

- 1) On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_n = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
 - (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Procéder de même avec la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) Exprimer enfin a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 1} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Démontrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7

- 1) (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Donner l'expression de $\binom{n}{k}$.

Rappeler les diverses propriétés permettant de dresser le triangle de Pascal.

- (b) Remplir le triangle de Pascal jusqu'à $n = 6$.
- 2) (a) Rappeler la formule du binôme de Newton.
- (b) En déduire le développement de $(1-x)^6$.

Exercice 8

- 1) Un sac contient 9 jetons numérotés de 1 à 9. Dans un premier temps, on tire 5 jetons dont 3 sont mis dans une urne A et 2 dans une urne B. On envisage trois procédures.

Procédure 1 : on tire 5 jetons dans le sac puis, parmi ceux-ci, on tire 3 jetons que l'on met dans l'urne A ; les 2 jetons restants sont alors placés dans l'urne B.

Procédure 2 : on tire 5 jetons dans le sac puis, parmi ceux-ci, on tire 2 jetons que l'on met dans l'urne B ; les 3 jetons restants sont alors placés dans l'urne A.

Procédure 3 : on tire 3 jetons dans le sac que l'on met dans l'urne A puis, parmi les jetons restant dans le sac, on tire 2 jetons que l'on met dans l'urne B.

- (a) Pour chacune des ces procédures, calculer le nombre de tirages possibles.
- (b) Qu'observe-t-on ? Que peut-on en déduire ?
- 2) Dans un second temps, on tire simultanément 6 jetons du sac.
- (a) Combien y a-t-il de tirages distincts possibles ?
- (b) On s'intéresse dans cette question aux jetons numérotés 1 et 2.
- (i) Combien y a-t-il de tirages contenant les jetons 1 et 2 ?
- (ii) Combien y a-t-il de tirages ne contenant ni le jeton 1, ni le jeton 2 ?
- (iii) Combien y a-t-il de tirages contenant seulement l'un des jetons 1 ou 2 ?
- (c) Quel est le lien entre les résultats des questions 2.(a) et 2.(b) ?

Exercice 9

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$1) \begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ 4x - 2y + 3z = 12 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2y - z = 1 \\ x + 3z = 10 \\ x + y + z = 7 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} mx + y = 2m - 1 \\ x + my = 2m^2 - 1 \end{cases} \quad (\text{ici, } m \text{ est un paramètre réel})$$

Exercice 1

- (a) Effectuons le changement de variable
- $u = \sqrt{y}$
- : alors
- $y = u^2$
- et
- $dy = 2u \, du$
- .

De ce fait
$$\int \frac{dy}{2y - \sqrt{y}} = \int \frac{2u \, du}{2u^2 - u} = \int \frac{2 \, du}{2u - 1} = \ln|2u - 1|$$

d'où

$$\boxed{\int \frac{dy}{2y - \sqrt{y}} = \ln|2\sqrt{y} - 1|}$$

- (b) Changement de variable
- $t = \cos u$
- : alors
- $(\cos u)^2 = t^2$
- et
- $dt = -\sin(u) \, du$
- .

De ce fait,
$$\int_{u=0}^{u=\pi} \sin u (\cos u)^2 \, du = \int_{t=1}^{t=-1} -t^2 \, dt = \int_{-1}^1 t^2 \, dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1$$

soit

$$\boxed{\int_0^\pi \sin u (\cos u)^2 \, du = \frac{2}{3}}$$

- (c) Effectuons le changement de variable
- $u = 1 + e^x$
- : ainsi
- $du = e^x \, dx$
- .

De ce fait,
$$\int \frac{e^x \, dx}{(1 + e^x)^4} = \int \frac{du}{u^4} = \int u^{-4} \, du = \frac{u^{-3}}{-3} = \frac{-1}{3u^3}$$

soit

$$\boxed{\int \frac{e^x \, dx}{(1 + e^x)^4} = \frac{-1}{3(1 + e^x)^3}}$$

Exercice 2

- 1) (a) Soit
- $n \in \mathbb{N}$
- . La fonction
- $f_n : x \mapsto x^n e^{-x}$
- est continue sur
- $[0; 1]$
- car c'est un quotient de fonctions usuelles continues. De ce fait,
- I_n
- existe pour tout
- $n \in \mathbb{N}$
- .

- (b) Le premier terme de cette suite se calcule tout simplement :

$$\boxed{I_0 = \int_0^1 e^{-x} \, dx = \left[-e^{-x} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}}$$

- 2) (a) Soit
- $n \in \mathbb{N}$
- . On a
- $(x^{n+1} e^{-x})' = (n+1)x^n e^{-x} - x^{n+1} e^{-x}$
- pour tout
- $x \in [0; 1]$

donc
$$\left[x^{n+1} e^{-x} \right]_0^1 = (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x} \, dx - \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} \, dx \quad \text{par intégration}$$

soit
$$e^{-1} - 0 = (n+1)I_n - I_{n+1}$$

d'où

$$\boxed{I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

(b) Alors
$$I_1 = -\frac{1}{e} + I_0 = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_1 = 1 - \frac{2}{e}}$$

et
$$I_2 = -\frac{1}{e} + 2I_1 = -\frac{1}{e} + 2 - \frac{4}{e} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_2 = 2 - \frac{5}{e}}$$

puis
$$I_3 = -\frac{1}{e} + 3I_2 = -\frac{1}{e} + 6 - \frac{15}{e} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_3 = 6 - \frac{16}{e}}$$

3) Trop facile : par linéarité de l'intégrale, il vient

$$I = \int_0^1 (-x^3 + 2x^2 - x) e^{-x} dx = - \int_0^1 x^3 e^{-x} dx + 2 \int_0^1 x^2 e^{-x} dx - \int_0^1 x e^{-x} dx$$

soit

$$I = -I_3 + 2I_2 - I_1 = -3 + \frac{8}{e}$$

4) (a) Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0; 1]$, on a $0 < e^{-x} \leq e^0 = 1$ donc $0 \leq f_n(x) \leq x^n$ puisque $x^n \geq 0$.

En intégrant, on en déduit que $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Bien entendu, on calcule facilement $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

De plus, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ par quotient de limites

On déduit alors du Théorème des Gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Exercice 3

1) Soit f une solution de (E) sur $]0; +\infty[$. Comme $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$, on a pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned} g'(x) - 2g(x) &= \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} - \frac{2f(x)}{x} = \frac{x f'(x) - f(x) - 2x f(x)}{x^2} \\ &= \frac{x f'(x) - (2x + 1) f(x)}{x^2} = \frac{8x^2}{x^2} = 8 \end{aligned}$$

si bien que

$$g \text{ est une solution de (F) sur }]0; +\infty[.$$

2) Soit h une solution de (F) sur $]0; +\infty[$. Comme $f : x \mapsto x h(x)$, on a pour tout $x > 0$

$$f'(x) = x h'(x) + h(x) = x(2h(x) + 8) + h(x) = (2x + 1)h(x) + 8x$$

d'où $x f'(x) - (2x + 1) f(x) = x(2x + 1)h(x) + 8x^2 - (2x + 1)x h(x) = 8x^2$

Ainsi

$$f \text{ est une solution de (E) sur }]0; +\infty[.$$

3) L'équation homogène $y' - 2y = 0$ a pour solutions les fonctions $y_C : x \mapsto C e^{2x}$ avec $C \in \mathbb{C}$.

Cherchons une solution particulière sous la forme $y_P(x) = K = C^{\text{te}}$. Alors $y_P'(x) - 2y_P(x) = -2K$ donc y_P solution si, et seulement si, $K = -4$. Autrement dit, $y_P : x \mapsto -4$. On en déduit que

$$\text{Les solutions de l'équation (F) sont les fonctions } g_C : x \mapsto C e^{2x} - 4 \text{ avec } C \in \mathbb{C}.$$

Or, d'après les questions 1) et 2), une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction

$g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est solution de (F). De ce fait, les solutions de (E) sont les produits des solutions de (F) par la fonction $x \mapsto x$. En conséquence,

$$\text{Les solutions de (E) sont les fonctions } f_C : x \mapsto C x e^{2x} - 4x \text{ avec } C \in \mathbb{C}.$$

Exercice 4

1) En appliquant la relation de récurrence, on obtient les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \bullet v_1 &= v_0 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} & \bullet v_3 &= v_2 - \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \\ \bullet v_2 &= v_1 - \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} & \bullet v_4 &= v_3 - \frac{1}{4 \times 5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

2) Conjecture : $v_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $v_n = \frac{1}{n+1}$ ».

❶ *Initialisation* : comme $v_0 = 1 = \frac{1}{0+1}$, la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

❷ *Hérédité* : soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que la proposition $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

D'après la proposition $\mathcal{P}(k)$, on a $v_k = \frac{1}{k+1}$

$$\text{d'où} \quad v_{k+1} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+2}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\text{et donc} \quad v_{k+1} = \frac{k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+2}$$

si bien que la proposition $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

❸ *Conclusion* : le principe de récurrence permet d'affirmer que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que

$$\boxed{v_n = \frac{1}{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$$

Exercice 5

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{4} + \frac{a_n + 2b_n}{4} = \frac{3(a_n + b_n)}{4} = \frac{3}{4} \times u_n$

Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

En outre $u_0 = a_0 + b_0 = 80$ donc $\boxed{u_n = 80 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{4} - \frac{2a_n + b_n}{4} = \frac{b_n - a_n}{4} = \frac{1}{4} \times v_n$

Ainsi la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

En outre $v_0 = b_0 - a_0 = 40$ donc $\boxed{v_n = 40 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

3) Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_n = a_n + b_n \\ v_n = b_n - a_n \end{cases} \iff \begin{cases} a_n = \frac{u_n - v_n}{2} \\ b_n = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

si bien que $\boxed{a_n = 40 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n - 20 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n}$ et $\boxed{b_n = 40 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 20 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n}$

Exercice 6

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leq u_n \leq 5$ ».

❶ *Initialisation* : comme $u_0 = 5 \in [0; 5]$, la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

❷ *Hérédité* : soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que la proposition $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

D'après la proposition $\mathcal{P}(k)$, on a $0 \leq u_k \leq 5$

d'où $0 \leq 3u_k \leq 15$

donc $1 \leq 3u_k + 1 \leq 16$

soit enfin $1 \leq \sqrt{3u_k + 1} \leq \sqrt{16} = 4$

par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi $0 \leq 1 \leq u_{k+1} \leq 4 \leq 5$, ce qui signifie que la proposition $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

❸ *Conclusion* : le principe de récurrence permet d'affirmer que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que

$$0 \leq u_n \leq 5 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Exercice 7

1) (a) D'après le merveilleux cours de mathématiques, $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$.

On a tout d'abord $\boxed{\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1}$ et $\boxed{\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n}$.

La première relation prouve que la première colonne et la diagonale ne contiennent que des 1.

La seconde permet de remplir la deuxième colonne et la parallèle à la diagonale.

Ensuite $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$ (symétrie) et $\boxed{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}}$ (relation de Pascal).

(b) On place les deux premières colonnes et la diagonale, puis on complète le triangle à l'aide de la relation de Pascal :

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \end{array}$$

2) (a) Pour tous les complexes a et b , on a $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$.

(b) Avec $n = 6$, $a = 1$ et $b = -x$, on obtient

$$\boxed{(1-x)^6 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1.}$$

Exercice 81) (a) **Procédure 1**

On choisit 5 jetons parmi les 9 contenus dans le sac, puis 3 jetons parmi ces 5.

Le nombre de tirages possibles est alors

$$\binom{9}{5} \times \binom{5}{3} = \frac{9!}{5!4!} \times \frac{5!}{3!2!} = \frac{9!}{4!3!2!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{6 \times 2} = 9 \times 7 \times 5 \times 4 = 1260$$

Procédure 2

On choisit 5 jetons parmi les 9 contenus dans le sac, puis 2 jetons parmi ces 5.

Le nombre de tirages possibles est alors

$$\binom{9}{5} \times \binom{5}{2} = \binom{9}{5} \times \binom{5}{3} = 1260 \quad \text{puisque} \quad \binom{5}{2} = \binom{5}{5-2} = \binom{5}{3}$$

Procédure 3

On choisit 3 jetons parmi les 9 contenus dans le sac, puis 2 jetons parmi les 6 restants.

Le nombre de tirages possibles est alors

$$\binom{9}{3} \times \binom{6}{2} = \frac{9!}{6!3!} \times \frac{6!}{2!4!} = \frac{9!}{4!3!2!} = 1260$$

- (b) On observe que le nombre de tirages possibles est le même pour chacune des procédures. Ceci signifie qu'au point de vue dénombrement, les trois procédures sont parfaitement équivalentes et pourront être utilisées indifféremment le cas échéant (cf. calculs de probabilités).

2) (a) On choisit 6 jetons parmi les 9 contenus dans le sac, le nombre de tirages est donc

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

- (b) (i) On obtient un tirage contenant les jetons 1 et 2 en prenant ces deux jetons, puis en ajoutant 4 jetons pris parmi les 7 autres : le nombre de tirages est donc

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35$$

- (ii) Un tirage ne contenant ni le jeton 1 ni le jeton 2 est obtenu en choisissant les 6 jetons parmi les 7 autres : le nombre de tirages possibles est donc

$$\binom{7}{6} = 7$$

- (iii) On obtient un tirage contenant le 1 et pas le 2 en prenant le jeton 1, puis en ajoutant 5 jetons pris parmi les 7 autres (le 2 étant exclu) : il y en a

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

De même, il y a 21 tirages contenant le 2 et pas le 1.

De ce fait, il y a 42 de tirages contenant seulement l'un des jetons 1 et 2.

(c) On vient en fait de dénombrer de deux façons les tirages de six jetons dans le sac :

- d'abord de manière directe ;
- puis de manière indirecte, en distinguant ceux qui contiennent ou pas 1 ou 2.

Dans les deux cas, on en trouve $84 = 35 + 7 + 21 + 21 \dots$ ce qui est plutôt rassurant !

Exercice 9

1) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ 4x - 2y + 3z = 12 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + y - z = -2 & (L_2) \\ -3y + 3z = 9 & (L_1 - 2L_2) \\ z = 2 & (L_3 - 2L_1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y - z = -2 \\ y - z = -3 \\ z = 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = 2 \\ y = z - 3 = -1 \\ x = -y + z - 2 = 1 \end{cases} \\ &\iff (x, y, z) = (1, -1, 2) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{S} = \{(1, -1, 2)\}$$

2) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2y - z = 1 \\ x + 3z = 10 \\ x + y + z = 7 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2y - z = 1 \\ -2y + 3z = 5 & (L_3 - L_1) \\ -y + z = 2 & (L_4 - L_1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y = 5 \\ y - z = -2 & (-L'_4) \\ z = 5 & (L'_2 + 2L'_4) \\ 2z = 6 & (L'_3 + L'_2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y = 5 \\ y - z = -2 \\ z = 5 \\ 0 = -4 & (L''_4 - 2L''_3) \end{cases} \end{aligned}$$

si bien que ce second système n'admet pas de solution : de ce fait,

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

3) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$(S) : \begin{cases} mx + y = 2m - 1 \\ x + my = 2m^2 - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} mx + y = 2m - 1 & (L_1) \\ (1 - m^2)x = m - 1 & (L_2 - m L_1) \end{cases}$$

On a maintenant besoin de diviser la seconde équation par $1 - m^2$, ce qui n'est possible que si $m \neq 1$ et $m \neq -1$. Il faut donc distinguer les différents cas.

Si $m = 1$

On a $(S) \iff \begin{cases} x + y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - y \\ y = y \end{cases} \text{ avec } y \in \mathbb{R}$

On obtient une infinité de solutions, paramétrées par y .

Dans ce cas,

$$\mathcal{S} = \{(1 - y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

Si $m = -1$

Alors $(S) \iff \begin{cases} -x + y = -3 \\ 0 = -2 \end{cases}$ donc le système n'a pas de solution : de ce fait,

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

Si $|m| \neq 1$

Comme $1 - m^2 = (1 - m)(1 + m)$, il en découle que

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} mx + y = 2m - 1 \\ x = \frac{m - 1}{(1 - m)(1 + m)} = -\frac{1}{1 + m} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{1 + m} \\ y = 2m - 1 - mx = 2m - 1 + \frac{m}{m + 1} = 2m - \frac{1}{m + 1} \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient une seule solution, qui dépend de m .

Ainsi,

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{1}{1 + m}, 2m - \frac{1}{1 + m} \right) \right\}$$

Devoir Surveillé n°6 de Mathématiques

Samedi 4 Avril 2026 (Durée : 3 h)

Exercice 1

Soit OPQR un carré. On appelle C le milieu du segment [OP] et l'on construit alors un carré OABC à l'extérieur du carré OPQR. On appelle enfin I l'intersection des droites (AP) et (BQ).

- 1) Faire un dessin rapide, en plaçant la droite (RA) horizontalement et en bas.

Indication : attention à l'ordre des sommets des carrés.

- 2) Montrer que les points I, C et R sont alignés.

Indication : déterminer les coordonnées des points A, B, C, P, Q et R dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$, puis établir des équations des droites (AP) et (BQ). En déduire les coordonnées de leur intersection I.

Exercice 2

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm.

- 1) Calculer $\cos \widehat{A}$. *Indication : partir de $BC^2 = (\overrightarrow{BC})^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$*
- 2) En déduire $\cos^2 \widehat{A}$ puis $\sin \widehat{A}$.
- 3) Déterminer l'aire du triangle ABC.

Exercice 3

Soit $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ un polynôme de degré trois.

- 1) Vérifier que -3 est racine de P.
- 2) Trouver un polynôme $Q(x)$ tel que l'on ait $P(x) = (x + 3)Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 3) Déterminer les racines de Q, puis factoriser P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

- 1) Soit I le milieu d'un segment [AB].

Démontrer que $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$ pour tout point M du plan.

Indication : partir de $MA^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2$...

- 2) **Application** : soit ABCD un rectangle de centre I.

Montrer que $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ pour tout point M du plan.

Exercice 5

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble de $\mathbb{R}^3$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

- 1) Identifier l'ensemble $\mathcal{D}$, en donnant un point et un vecteur directeur.

Exhiber un second point de $\mathcal{D}$.

- 2) Donner une représentation de la droite Δ parallèle à $\mathcal{D}$ et passant par $B(-4, 1, 5)$.

- 3) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant $\mathcal{D}$ et Δ .

- 4) Soit $\mathcal{D}'$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -5 + 5u \\ y = -4 + 8u \\ z = 10 + 9u \end{cases} \quad (u \in \mathbb{R}).$

Montrer que $\mathcal{D}' \perp \mathcal{P}$, puis que la droite $\mathcal{D}'$ coupe le plan $\mathcal{P}$ en un point de $\mathcal{D}$.

Exercice 6

On définit la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes par $\begin{cases} T_0 = 1, T_1 = X \\ T_{n+2} = 2X T_{n+1} - T_n \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

- 1) (a) Déterminer T_2 , T_3 et T_4 .

(b) Calculer les racines de ces trois polynômes.

- 2) Montrer par **récurrence double** sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$(a) \deg(T_n) = n \quad (b) T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) \text{ pour tout } \theta \in \mathbb{R}$$

- 3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Résoudre l'équation $\cos(n\theta) = 0$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

(b) En déduire les racines du polynôme T_n .

Exercice 7

- 1) (a) Donner les DL₂ en 0 de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$.
 (b) En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x - \tan x - 1}{x^2}$
- 2) (a) Donner les DL₂ en 0 de $\frac{1}{1+x^2}$ et $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 (b) En déduire les DL₃ en 0 de $\arctan x$ et $\arcsin x$.
 (c) Donner enfin un équivalent simple en 0 de $\arctan x - \arcsin x$.
- 3) (a) Soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition de a^b à l'aide de $\exp$ et $\ln$.
 (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-3x} \right)^{1/x}$ sans s'occuper de l'ensemble de définition de cette expression.

Exercice 8

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$ définie sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

- 1) (a) Étudier les limites de f en 0^+ et en $+\infty$. Interpréter les résultats obtenus.
 (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$. Que peut-on en déduire?
- 2) (a) Déterminer le DL₂ en 0 de la fonction $g : h \mapsto f(1+h)$.
Ceci nous donne un DL₂ de la fonction f au voisinage de 1, que l'on va utiliser afin de répondre aux deux questions suivantes.
 (b) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1 et donner $f(1)$.
 (c) Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = 1$, ainsi que sa position relative.

Exercice 9

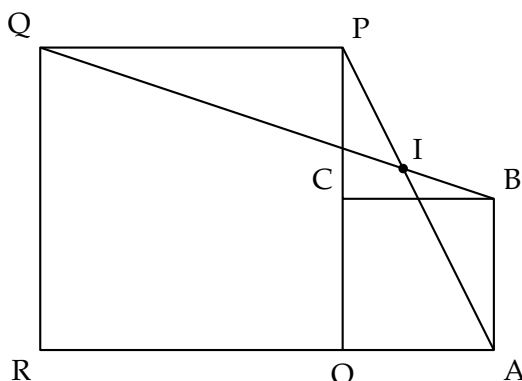
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor t \rfloor$ l'unique entier relatif vérifiant $\lfloor t \rfloor \leq t < \lfloor t \rfloor + 1$.

On définit alors sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x} \lfloor \pi x \rfloor\right)$.

- 1) Montrer que $t - 1 < \lfloor t \rfloor \leq t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \lfloor \pi x \rfloor$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 1

Plaçons la droite (RA) horizontalement pour raisonner facilement dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$.



Dans ce repère, on a : $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(1;1)$, $C(0;1)$, $P(0;2)$, $Q(-2;2)$ et $R(-2,0)$.

Équation de la droite (AP)

Pour $M(x; y) \in \mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AP} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff 2x - 2 + y = 0$$

Ainsi

La droite (AP) a pour équation $2x + y - 2 = 0$.

Équation de la droite (BQ)

Pour $M(x; y) \in \mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BQ} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

$$\det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BQ}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x-1 & -3 \\ y-1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x - 1 + 3y - 3 = 0$$

Ainsi,

La droite (BQ) a pour équation $x + 3y - 4 = 0$.

Coordonnées de I

Le point I étant l'intersection de ces deux droites, ses coordonnées sont les solutions du système formé par leurs deux équations. Or,

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 & (L_1) \\ x + 3y - 4 = 0 & (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} -5y + 6 = 0 & (L_1 - 2L_2) \\ -5x + 2 = 0 & (L_2 - 3L_1) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2/5 \\ y = 6/5 \end{cases}$$

Ainsi,

L'intersection des droites (AP) et (BQ) est le point $I(2/5; 6/5)$.

Alignement de R, C et I

On en déduit que $\overrightarrow{RC} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CI} \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{RC} = 5\overrightarrow{CI}$.

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{RC}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires, ce qui montre que

Les points I, C et R sont alignés.

Exercice 2

1) On a
$$\begin{aligned} BC^2 &= (\overrightarrow{BC})^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \\ &= (\overrightarrow{AC})^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB})^2 \\ &= AC^2 - 2AC \times AB \times \cos \widehat{A} + AB^2 \end{aligned}$$

d'où $36 = 25 - 40 \cos \widehat{A} + 16$ soit $40 \cos \widehat{A} = 41 - 36 = 5$ et $\cos \widehat{A} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$.

2) Par conséquent $\cos^2 \widehat{A} = \frac{1}{64}$.

On en déduit que $\sin^2 \widehat{A} = 1 - \cos^2 \widehat{A} = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$

De plus $\widehat{A} \in]0; \pi[$ donc $\sin \widehat{A} > 0$ et alors $\sin \widehat{A} = \sqrt{\sin^2 \widehat{A}} = \frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$.

3) On sait que l'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \widehat{A}$

soit $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$

Exercice 3

1) On a
$$\begin{aligned} P(-3) &= (-3)^3 + 5 \times (-3)^2 - 2 \times (-3) - 24 \\ &= -27 + 5 \times 9 + 6 - 24 \\ &= -27 + 45 + 6 - 24 = 0 \end{aligned}$$

2) Comme $P(-3) = 0$, alors $P(x)$ se factorise par $(x + 3)$ et s'écrit $P(x) = (x + 3)Q(x)$.
L'algorithme de Horner nous conduit à

$$Q(x) = x^2 + 2x - 8 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En effet :

	1	5	-2	-24
-3		-3	-6	24
	1	2	-8	0

3) Le polynôme du second degré Q a pour discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times (-8) = 36$.
Comme $\Delta > 0$, ce polynôme admet deux racines réelles distinctes, à savoir

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 - 6}{2} = -4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 + 6}{2} = 2$$

On en déduit que $Q(x) = (x + 4)(x - 2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, si bien que

$$P(x) = (x + 3)(x + 4)(x - 2) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Exercice 4

- 1) Comme I est le milieu du segment [AB], on a $\vec{AI} = \vec{IB} = \frac{1}{2} \vec{AB}$.

$$\begin{aligned} \text{De ce fait,} \quad MA^2 + MB^2 &= (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 \\ &= \left(\vec{MI} - \frac{1}{2} \vec{AB}\right)^2 + \left(\vec{MI} + \frac{1}{2} \vec{AB}\right)^2 \\ &= MI^2 - \vec{MI} \cdot \vec{AB} + \frac{AB^2}{4} + MI^2 + \vec{MI} \cdot \vec{AB} + \frac{AB^2}{4} \end{aligned}$$

soit

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} \text{ pour tout point M du plan.}$$

- 2) Comme ABCD est un rectangle de centre I, ses diagonales [AC] et [BD] sont de même longueur et ont pour milieu commun le point I. On déduit du résultat de la question précédente que

$$MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{AC^2}{2} = 2MI^2 + \frac{BD^2}{2} = MB^2 + MD^2$$

si bien que

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2 \text{ pour tout point M du plan.}$$

Exercice 5

- 1) C'est la droite passant par le point A(1, -1, 4) et dirigée par le vecteur $\vec{u}(2, 1, -2)$.

En prenant $t = 1$ (par exemple), on obtient le point supplémentaire C(3, 0, 2).

- 2) La droite Δ passe par le point B(-4, 1, 5) et elle est dirigée par le vecteur $\vec{u}(2, 1, -2)$.

$$\text{Elle admet ainsi pour représentation paramétrique } \begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 5 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

- 3) Le plan $\mathcal{P}$ passe par A et il est dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{AB}(-5, 2, 1)$.

Il admet ainsi pour vecteur normal tout vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ tel que $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$.

$$\text{Il faut donc que } \begin{cases} 2a + b - 2c = 0 \\ -5a + 2b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c + 2b - 5a = 0 \\ 5b - 8a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 8a/5 \\ c = 5a - 2b = 9a/5 \end{cases}$$

En prenant $a = 5$, on obtient le vecteur $\vec{n}(5, 8, 9)$.

De ce fait, $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $5x + 8y + 9z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

Enfin A $\in \mathcal{P}$ donc $5 - 8 + 36 + d = 0$ soit $d = -33$. Ainsi,

$$\text{Le plan } \mathcal{P} \text{ a pour équation cartésienne } 5x + 8y + 9z - 33 = 0$$

- 4) La droite $\mathcal{D}'$ est dirigée par $\vec{n}$, vecteur normal de $\mathcal{P}$, si bien que $\mathcal{D}' \perp \mathcal{P}$.

Par ailleurs, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{P}$ se coupent au point D(x, y, z) tel que

$$\begin{cases} x = -5 + 5u \\ y = -4 + 8u \\ z = 10 + 9u \\ 0 = 5x + 8y + 9z - 33 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = -5 + 5u \\ y = -4 + 8u \\ z = 10 + 9u \\ 0 = 170u \end{cases} \quad \text{donc} \quad D(-5, -4, 10)$$

Or $\vec{AD}(-6, -3, 6)$ soit $\vec{AD} = -3\vec{u}$: ceci montre que D appartient à $\mathcal{D}(A, \vec{u})$.

De ce fait,

$$\text{La droite } \mathcal{D}' \text{ coupe le plan } \mathcal{P} \text{ au point } D(-5, -4, 10) \text{ de } \mathcal{D}.$$

Exercice 6

1) (a) • $T_2 = 2X T_1 - T_0 = \underline{2X^2 - 1}$.

• $T_3 = 2X T_2 - T_1 = 4X^3 - 2X - X = \underline{4X^3 - 3X}$.

• $T_4 = 2X T_3 - T_2 = 8X^4 - 6X^2 - 2X^2 + 1 = \underline{8X^4 - 8X^2 + 1}$.

(b) • $T_2(x) = 0 \iff x^2 = 1/2 \iff x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \frac{\sqrt{2}}{2}$

• $T_3(x) = 0 \iff 4x(x^2 - \frac{3}{4}) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x^2 = \frac{3}{4} \iff x = 0, -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \frac{\sqrt{3}}{2}$.

• Pour étudier T_4 , posons $y = x^2$: alors $T_4(x) = 0 \iff 8y^2 - 8y + 1 = 0$.

Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 64 - 32 = 32 = 16 \times 2$.

Ses racines sont donc $y_1 = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{16} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$ et $y_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$.

Ainsi, $T_4(x) = 0 \iff x^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \text{ ou } \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$

$$\iff x = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \text{ ou } -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

2) (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $\deg(T_n) = n$ ».

• *Initialisation* : on a $\deg(T_0) = \deg(1) = 0$ et $\deg(T_1) = \deg(X) = 1$.

De ce fait, les propositions $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

• *Hérédité* : soit un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.

Par définition de notre suite de polynômes, on sait que $T_{n+2} = 2X T_{n+1} - T_n$.

Or $\deg(2X T_{n+1}) = \deg(T_{n+1}) + 1 = n + 2$ et $\deg(T_n) = n$ d'après $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$.

Comme $\deg(2X T_{n+1}) \neq \deg(T_n)$, alors $\deg(T_{n+2}) = \max \{\deg(2X T_{n+1}), \deg(T_n)\} = n + 2$ si bien que la proposition $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

• *Conclusion* : le principe de récurrence permet d'affirmer que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\boxed{\deg(T_n) = n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

(b) Fixons $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ ».

• *Initialisation* : on a $T_0(\cos \theta) = 1 = \cos(0 \times \theta)$ et $T_1(\cos \theta) = \cos \theta = \cos(1 \times \theta)$.

De ce fait, les propositions $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

• *Hérédité* : soit un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.

$$\begin{aligned} \text{Alors} \quad T_{n+2}(\cos \theta) &= 2 \cos \theta T_{n+1}(\cos \theta) - T_n(\cos \theta) \\ &= 2 \cos \theta \cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= 2 \cos \theta [\cos \theta \cos(n\theta) - \sin \theta \sin(n\theta)] - \cos(n\theta) \\ &= (2 \cos^2 \theta - 1) \times \cos(n\theta) - 2 \sin \theta \cos \theta \times \sin(n\theta) \end{aligned}$$

$$\text{Or} \quad 2 \cos^2 \theta - 1 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta) \quad \text{et} \quad 2 \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta)$$

$$\text{donc} \quad T_{n+2}(\cos \theta) = \cos(2\theta) \times \cos(n\theta) - \sin(2\theta) \times \sin(n\theta) = \cos((n+2)\theta)$$

si bien que la proposition $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

• *Conclusion* : le principe de récurrence permet d'affirmer que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci étant vrai pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a donc

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)}$$

- 3) (a) On a : $\cos(n\theta) = 0 \iff n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi,

$$\cos(n\theta) = 0 \iff \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

- (b) Les solutions dans $[0; \pi]$ de $\cos(n\theta) = 0$ sont donc $\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{2n}$.

Comme $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$, les nombres $\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right), \dots, \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)$ sont alors des racines du polynôme T_n .

Or ces n nombres sont distincts car $\cos$ est strictement monotone sur $[0; \pi]$.

En outre, le polynôme T_n étant de degré n , il a plus n racines. En conséquence,

$$\text{Les racines de } T_n \text{ sont les nombres } \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right), \dots, \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right).$$

Exercice 7

- 1) (a) D'après le cours, on a $\sin x = x + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ et $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$

Par division selon les puissances croissantes, on obtient $\tan x = x + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$

- (b) Ainsi $\frac{\sin x + \cos x - \tan x - 1}{x^2} = \frac{x + 1 - x^2/2 - x - 1 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2} + o_{x \rightarrow 0}(1)$

si bien que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x - \tan x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

- 2) (a) On utilise la relation $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + o_{u \rightarrow 0}(u)$ pour $\alpha = -1$ et $\alpha = 1/2$:

$$(1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \quad \text{et} \quad (1-x^2)^{-1/2} = 1 + x^2/2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

- (b) En intégrant ces deux DL, on en déduit aisément que

$$\arctan(x) = x - x^3/3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \quad \text{et} \quad \arcsin(x) = x + x^3/6 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

- (c) Enfin $\arctan x - \arcsin x = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) = -\frac{x^3}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$

d'où

$$\arctan x - \arcsin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$$

- 3) (a) Pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on pose $a^b = e^{b \ln a}$.

(b) Pour $x \neq 0$ et suffisamment proche de 0, on a

$$\left(\frac{1+x}{1-3x}\right)^{1/x} = \exp\left[\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-3x}\right)\right] = \exp\left[\frac{\ln(1+x) - \ln(1-3x)}{x}\right]$$

Or, $\ln(1+x) = x + o_{x \rightarrow 0}(x)$ et $\ln(1-3x) = -3x + o_{x \rightarrow 0}(x)$

si bien que $\ln(1+x) - \ln(1-3x) = 4x + o_{x \rightarrow 0}(x) \sim_{x \rightarrow 0} 4x$

et donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-3x)}{x} = 4$

On en déduit par continuité de $\exp$ sur $\mathbb{R}$ que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-3x}\right)^{1/x} = e^4$.

Exercice 8

1) (a) On a $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ d'après les croissances comparées.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1) = -1$ par somme, alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ par quotient de limites.

Ainsi, on peut prolonger par continuité la fonction f en 0 en posant $f(0) = 0$.

Comme $1 = o_{x \rightarrow +\infty}(x^2)$ alors $x^2 - 1 \sim_{x \rightarrow +\infty} x^2$ d'où $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ d'après les croissances comparées donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

De ce fait, la courbe de f admet l'axe (Ox) pour asymptote en $+\infty$.

(b) Pour $x \in]0; 1[$, on a $\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$ où $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1) = -1$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ par quotient de limites.

Le quotient étudié étant le taux d'accroissement de f en 0, on en déduit que

f n'est pas dérivable en 0 et $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale en $O(0, 0)$.

2) (a) Pour $h \neq 0$, on a $f(1+h) = \frac{(1+h) \ln(1+h)}{(1+h)^2 - 1} = \frac{(1+h) \ln(1+h)}{2h + h^2}$

On sait que $\ln(1+h) = h - h^2/2 + h^3/3 + o_{h \rightarrow 0}(h^3)$

si bien que
$$\begin{aligned} (1+h) \ln(1+h) &= h - h^2/2 + h^3/3 + h^2 - h^3/2 + o_{h \rightarrow 0}(h^3) \\ &= h + h^2/2 - h^3/6 + o_{h \rightarrow 0}(h^3) \end{aligned}$$

Ainsi
$$g(h) = \frac{h + h^2/2 - h^3/6 + o_{h \rightarrow 0}(h^3)}{2h + h^2} = \frac{1 + h/2 - h^2/6 + o_{h \rightarrow 0}(h^2)}{2 + h}$$

En effectuant une division selon les puissances croissantes, on obtient

$$f(1+h) = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12} + o_{h \rightarrow 0}(h^2)$$

Remarque : on peut aussi conclure par produit de DL en notant que

$$\frac{1}{2+h} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+h/2} = \frac{1}{2} \times \left(1 - h/2 + h^2/4 + o_{h \rightarrow 0}(h^2)\right)$$

(b) En posant $h = x - 1$, on obtient le DL_2 de f en 1 :

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{12} + o_{x \rightarrow 1}((x-1)^2)$$

On déduit de ce DL que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$ par somme de limites.

Ainsi,

$$f \text{ se prolonge par continuité en } 1 \text{ en posant } f(1) = \frac{1}{2}.$$

(c) De plus, ce DL_2 en 1 nous donne la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = 1$ ainsi que sa position par rapport à $\mathcal{C}_f$. En effet :

- $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{12} + o_{x \rightarrow 1}((x-1)^2)$ donc la tangente a pour équation $y = \frac{1}{2}$
- la différence $f(x) - \frac{1}{2} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -\frac{(x-1)^2}{12}$ est négative au voisinage de 1.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ pour tangente en $x = 1$.
Elle est en outre située en-dessous de cette droite au voisinage de $x = 1$.

Exercice 9

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor t \rfloor \leq t < \lfloor t \rfloor + 1$$

d'où

$$\lfloor t \rfloor - 1 \leq t - 1 < \lfloor t \rfloor$$

Ainsi

$$\lfloor t \rfloor \leq t \quad \text{et} \quad t - 1 < \lfloor t \rfloor$$

si bien que

$$t - 1 < \lfloor t \rfloor \leq t \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

2) En particulier, on a pour tout $x > 0$

$$\pi x - 1 < \lfloor \pi x \rfloor \leq \pi x$$

donc

$$\pi - \frac{1}{x} < \frac{1}{x} \lfloor \pi x \rfloor \leq \pi$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\pi - \frac{1}{x}\right) = \pi$ par somme de limites.

On déduit alors du Théorème des Gendarmes que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \lfloor \pi x \rfloor = \pi.$$

Enfin, $\lim_{h \rightarrow \pi} \sin(h) = \sin(\pi) = 0$ (fonction usuelle continue en π).

On en déduit alors par composition de limites que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Concours Blanc de MathématiquesMai 2026 (*Durée : 3 heures*)**Exercice 1**

On désire résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(1 + e^x) y'' + 2e^x y' + (2e^x + 1) y = x e^x \quad (\text{E})$$

Pour cela, on considère une fonction y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $z : x \mapsto (1 + e^x) y(x)$.

- 1) Exprimer z' et z'' en fonction de y , y' et y'' .
- 2) Démontrer que la fonction y est solution de l'équation (E) si, et seulement si, la fonction z est solution de l'équation différentielle

$$z'' + z = x e^x \quad (\text{F})$$

- 3) Résoudre l'équation (F).
- 4) Déterminer enfin les solutions de l'équation (E).

Exercice 2

- 1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Montrer que

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \quad \text{et} \quad n \binom{n-1}{k-1} = k \binom{n}{k}$$

- 2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Donner le développement de $(a + b)^n$.
- 3) *Applications*

- (a) Exprimer $(2 - x)^5$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

$$(a) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad (b) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \quad (c) \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}$$

Exercice 3

Soit ABCD un carré. On place P sur [AB] et Q sur [BC] de sorte que $BP = BQ = BC/3$. On appelle enfin H le projeté orthogonal de B sur la droite (PC).

- 1) Faire un dessin rapide.
- 2) On se place dans le repère $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.
 - (a) Donner les coordonnées des points A, B, C, D, P et Q.
 - (b) Calculer les coordonnées de H, en observant que $(BH) \perp (PC)$ et que $H \in (PC)$.
- 3) Montrer que les droites (QH) et (HD) sont perpendiculaires.

Exercice 4

On définit sur l'intervalle $[0; +\infty[$ la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x+1}$.

- 1) Étudier les variations de la fonction f sur son ensemble de définition.
- 2) On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Montrer par récurrence que $1 \leq u_{n+1} < u_n \leq 2$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
 - (b) Que peut-on alors dire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
 - (c) Justifier que cette suite converge, puis déterminer sa limite.

Exercice 5

Inverser les matrices suivantes, en utilisant la méthode de votre choix :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

Calculer les limites suivantes à l'aide de développements limités d'ordres finement choisis :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 \cos(x) + e^x - 3 - \ln(1+x)}{x^3} \right] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \sqrt{1+9x^2} + x \sqrt{1+x^2} - 2x \sqrt{1+4x^2} \right]$$

Exercice 7

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.

- 1) (a) Montrer à l'aide d'études de fonctions que $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$.
- (b) En déduire que $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Indication : appliquer la relation précédente à une valeur de x bien choisie.

- 2) (a) Montrer que $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Indication : on pourra sommer la relation précédente.

- (b) En déduire que $\ln(n+1) \leq u_n \leq 1 + \ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- (c) Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- 3) Pour tout $n \geq 1$, on pose $v_n = u_n - \ln(n+1)$.

- (a) Étudier le sens de variation de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en pensant à utiliser la question 1.(b).
- (b) Établir que $v_n \leq 1 + \ln(n) - \ln(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en utilisant la question 2.(b).
- (c) Prouver que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Culture générale : la limite γ de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ s'appelle la **constante d'Euler-MacLaurin**.

Exercice 1

- 1) Comme y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction z l'est aussi en tant que produit de fonctions deux fois dérivables. De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$z'(x) = (1 + e^x) y'(x) + e^x y(x)$$

et

$$z''(x) = (1 + e^x) y''(x) + 2e^x y'(x) + e^x y(x)$$

- 2) De ce fait,

y est solution de l'équation **(E)**

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, (1 + e^x) y''(x) + 2e^x y'(x) + (2e^x + 1) y(x) = x e^x$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, [(1 + e^x) y''(x) + 2e^x y'(x) + e^x y(x)] + (e^x + 1) y(x) = x e^x$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, z''(x) + z(x) = x e^x$$

$$\iff z \text{ est solution de l'équation (F)}$$

- 3) • Équation homogène : elle s'écrit $z'' + z = 0$.
- L'équation caractéristique associée est $r^2 + 1 = 0$.
 - Elle admet deux racines complexes conjuguées, i et $-i$.

Les solutions de l'équation homogène sont alors toutes les fonctions

$$g : x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{C} \text{ deux constantes}$$

• Solution particulière

Posons $z_0(x) = (ax + b) e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$z_0'(x) = (ax + a + b) e^x \quad \text{et} \quad z_0''(x) = (ax + 2a + b) e^x$$

donc

$$z_0''(x) + z_0(x) = (2ax + 2a + 2b) e^x$$

$$\text{si bien que} \quad z_0 \text{ est solution de (F)} \iff \begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2 \end{cases}$$

Ainsi $z_0 : x \mapsto (x/2 - 1/2) e^x$ est solution de l'équation différentielle.

• Ensemble des solutions

Les solutions de l'équation **(F)** sont donc toutes les fonctions

$$z : x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{x-1}{2} e^x \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{C} \text{ deux constantes.}$$

- 4) D'après la question 2), on obtient l'ensemble des solutions de l'équation **(E)** en divisant les expressions de celles de **(F)** par $1 + e^x$. De ce fait, les solutions de l'équation **(E)** sont toutes les fonctions

$$y : x \mapsto \frac{\lambda \cos x + \mu \sin x}{1 + e^x} + \frac{(x-1)e^x}{2 + 2e^x} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{C} \text{ deux constantes.}$$

Exercice 2

1) La première relation nécessite quelques calculs : pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{kn!}{k(k-1)! \times (n+1-k)!} + \frac{(n+1-k)n!}{k! \times (n+1-k)(n-k)!} \\ &= \frac{(k+n+1-k)n!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)n!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k} \quad \text{comme promis} \end{aligned}$$

Pour la seconde relation, par contre, les calculs sont assez simples :

$$\begin{aligned} n \binom{n-1}{k-1} &= \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{kn!}{k(k-1)! \times (n-k)!} = \frac{kn!}{k!(n-k)!} = k \binom{n}{k} \end{aligned}$$

2) D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

3) *Applications*

(a) Grâce au triangle de Pascal (voir ci-contre), on obtient

$$(2-x)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} 2^k (-x)^{5-k}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \times (-x)^5 + 5 \times 2 \times (-x)^4 + 10 \times 2^2 \times (-x)^3 \\ &\quad + 10 \times 2^3 \times (-x)^2 + 5 \times 2^4 \times (-x) + 2^5 \end{aligned}$$

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

soit

$$(2-x)^5 = -x^5 + 10x^4 - 40x^3 + 80x^2 - 80x + 32$$

(b) D'après la formule du binôme de Newton, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ pour tous a et $b \in \mathbb{C}$.

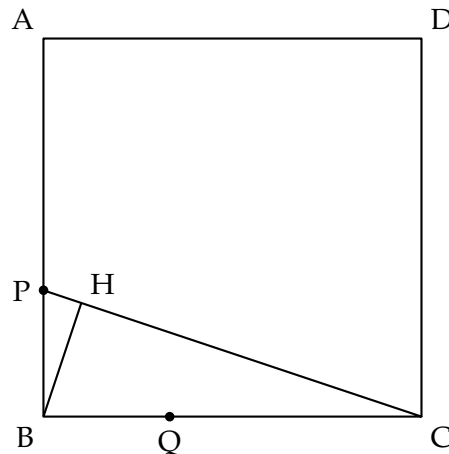
En particulier, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = \boxed{2^n}$

De même, $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n = \boxed{0}$ (car $n > 0$)

et $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = (2+1)^n = \boxed{3^n}$

Exercice 3

- 1) Plaçons le point B en bas à gauche pour raisonner facilement dans le repère $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.



- 2) (a) Dans le repère choisi, on a : $B(0;0)$, $C(1;0)$, $D(1;1)$, $A(0;1)$, $Q(1/3;0)$ et $P(0;1/3)$.

(b) Équation de la droite (PC)

Pour $M(x; y) \in \mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{PM} \begin{pmatrix} x \\ y - 1/3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PC} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ donc

$$\det(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PC}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x & 1 \\ y - 1/3 & -1/3 \end{vmatrix} = 0 \iff -x/3 - y + 1/3 = 0$$

Ainsi, la droite (PC) a pour équation $x + 3y - 1 = 0$.

Équation de la droite (BH)

Elle admet $\overrightarrow{PC}$ pour vecteur normal, donc elle a une équation de la forme $x - y/3 + c = 0$.
De plus, elle passe par $B(0;0)$ donc $c = 0$.

Ainsi, la droite (BH) a pour équation $3x - y = 0$.

Coordonnées de H

Le point H étant l'intersection de ces deux droites, ses coordonnées sont les solutions du système formé par leurs équations. Or,

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x \\ x + 9x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1/10 \\ y = 3/10 \end{cases}$$

Ainsi, le projeté orthogonal de B sur (PC) est $H(1/10; 3/10)$.

3) Perpendicularité de (QH) et (HD)

On en déduit que $\overrightarrow{QH} \begin{pmatrix} 1/10 - 1/3 \\ 3/10 - 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/30 \\ 9/30 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HD} \begin{pmatrix} 9/10 \\ 7/10 \end{pmatrix}$ d'où

$$\overrightarrow{QH} \cdot \overrightarrow{HD} = -\frac{7}{30} \times \frac{9}{10} + \frac{9}{30} \times \frac{7}{10} = \frac{-63 + 63}{300} = 0$$

Ainsi $\overrightarrow{QH} \perp \overrightarrow{HD}$ et donc les droites (QH) et (HD) sont perpendiculaires.

Exercice 4

- 1) La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition en tant que quotient de fonctions polynomiales, et l'on a

$$\forall x \geq 0 \quad f'(x) = \frac{2 \times (x+1) - (2x+1) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

si bien que

La fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

- 2) (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $1 \leq u_{n+1} < u_n \leq 2$ ».

- *Initialisation* : on a $u_0 = 2$ et $u_1 = f(u_0) = f(2) = 5/3$ donc $1 \leq u_1 < u_0 \leq 2$.
Ainsi, la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé ; on suppose que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
On a alors $1 \leq u_{n+1} < u_n \leq 2$ d'après la proposition $\mathcal{P}(n)$
d'où $f(1) \leq f(u_{n+1}) < f(u_n) \leq f(2)$ par stricte croissance de f
soit $1 \leq 3/2 \leq u_{n+2} < u_{n+1} \leq 5/3 \leq 2$
Ainsi, la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion* : le principe de récurrence permet d'affirmer que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que

$$1 \leq u_{n+1} < u_n \leq 2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- (b) Ce résultat signifie que

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et bornée.

- (c) Cette suite étant décroissante et minorée, elle converge donc vers un réel ℓ .

Déterminons maintenant la valeur exacte de cette limite.

- On sait que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $1 \leq \ell \leq 2$ par passage à la limite.
- De plus, $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où f est continue car dérivable.
On obtient alors par passage à la limite $\ell = f(\ell)$.
- Enfin, pour $\ell \in [1; 2]$,

$$\begin{aligned} \ell = f(\ell) &\iff \ell = \frac{2\ell + 1}{\ell + 1} \\ &\iff \ell^2 - \ell - 1 = 0 \end{aligned}$$

Cette équation du second degré admet pour discriminant $\Delta = 5$ et pour racines $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Comme $\ell \in [1; 2]$, on en déduit que $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Ainsi

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Exercice 5

1) Pour $X(x, y, z)$ et $Y(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$AX = Y \iff \begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ x + z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ -y + z = c - a \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ 2z = b + c - a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = a - y = a/2 - b/2 + c/2 \\ y = b - z = a/2 + b/2 - c/2 \\ z = -a/2 + b/2 + c/2 \end{cases}$$

donc

$$A \text{ est inversible et } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) De même,

$$BX = Y \iff \begin{cases} x + 2y + 4z = a \\ x + z = b \\ x - y + 4z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = b \\ -y + 3z = c - b \\ 3y = a - c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = b - z = -a/9 + 4b/3 - 2c/9 \\ y = a/3 - c/3 \\ z = (y + c - b)/3 = a/9 - b/3 + 2c/9 \end{cases}$$

donc

$$B \text{ est inversible et } B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/9 & 4/3 & -2/9 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1/9 & -1/3 & 2/9 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 12 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Enfin,

$$CX = Y \iff \begin{cases} x + y + 2z = a \\ -2x - 2y - z = b \\ y + 2z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 2z = a \\ y + 2z = c \\ 3z = b + 2a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = a - c \\ y = c - 2z = -4a/3 - 2b/3 + c \\ z = 2a/3 + b/3 \end{cases}$$

donc

$$C \text{ est inversible et } C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4/3 & -2/3 & 1 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

1) On a $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$ donc $2\cos(x) = 2 - x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$.

De plus $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$ et $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$

Ainsi

$$2\cos(x) + e^x - 3 - \ln(1+x)$$

$$= 2 - x^2 + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - 3 - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

$$= \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) = -\frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos(x) + e^x - 3 - \ln(1+x)}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

2) On sait que $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + o_{u \rightarrow 0}(u)$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, on a de ce fait pour tout $x > 0$

$$x\sqrt{1+9x^2} = x \times 3x \sqrt{1 + \frac{1}{9x^2}} = 3x^2 \left(1 + \frac{1}{18x^2} + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) \right) = 3x^2 + \frac{1}{6} + o_{x \rightarrow +\infty}(1)$$

$$x\sqrt{1+x^2} = x \times x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = x^2 \left(1 + \frac{1}{2x^2} + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) \right) = x^2 + \frac{1}{2} + o_{x \rightarrow +\infty}(1)$$

$$2x\sqrt{1+4x^2} = 2x \times 2x \sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}} = 4x^2 \left(1 + \frac{1}{8x^2} + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) \right) = 4x^2 + \frac{1}{2} + o_{x \rightarrow +\infty}(1)$$

d'où
$$x\sqrt{1+9x^2} + x\sqrt{1+x^2} - 2x\sqrt{1+4x^2} = \frac{1}{6} + o_{x \rightarrow +\infty}(1)$$

soit
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x\sqrt{1+9x^2} + x\sqrt{1+x^2} - 2x\sqrt{1+4x^2} \right] = \frac{1}{6} \quad \text{par somme}$$

Exercice 7

- 1) (a) • La fonction $f : x \mapsto \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ en tant que composée de fonctions usuelles et

$$\forall x \geq 0 \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} \geq 0$$

De ce fait, la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$. Or, $f(0) = \ln(1) - 0 = 0$.

Il s'ensuit que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, soit

$$\boxed{\ln(1+x) \geq \frac{x}{x+1} \text{ pour tout } x \geq 0}$$

- De même, la fonction $g : x \mapsto x - \ln(x+1)$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et

$$\forall x \geq 0 \quad g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x+1-1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$$

Par conséquent, la fonction g est croissante sur $[0; +\infty[$.

De plus $g(0) = 0 - \ln(1) = 0$, donc $g(x) \geq 0$ soit

$$\boxed{\ln(1+x) \leq x \text{ pour tout } x \geq 0}$$

- On déduit de ces deux inégalités que

$$\boxed{\forall x \geq 0 \quad \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x}$$

- (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'inégalité ci-dessus appliquée au réel $x = \frac{1}{k}$ nous conduit à

$$\frac{1/k}{1+1/k} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

soit

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

d'où

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}}$$

- 2) (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrivons l'inégalité ci-dessus pour k allant de 1 jusqu'à n et sommons membres à membres les inégalités obtenues :

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2} & \leq & \ln(2) - \ln(1) \leq 1 \\ \frac{1}{3} & \leq & \ln(3) - \ln(2) \leq \frac{1}{2} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \leq & \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n} \end{array}$$

- Membres de gauche : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} = u_{n+1} - 1$
- Membres du centre : $\ln(2) - 0 + \ln(3) - \ln(2) + \dots + \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(n+1)$
C'est une simple somme télescopique.
- Membres de droite : $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = u_n$

Ainsi, l'addition des n inégalités obtenues nous mène à

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n}$$

- (b) On en déduit que $u_{n+1} \leq 1 + \ln(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme $u_1 = 1 = 1 + \ln(1)$, on peut écrire que $u_n \leq 1 + \ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

De ce fait,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln(n+1) \leq u_n \leq 1 + \ln(n)}$$

- (c) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ par composition de limites.

On déduit du théorème de minoration que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- 3) (a) Pour tout $n \geq 1$
- $$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - \ln(n+2) - u_n + \ln(n+1) \\ &= u_{n+1} - u_n + \ln(n+1) - \ln(n+2) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n+2) \end{aligned}$$

Or, $\ln(n+2) - \ln(n+1) \leq \frac{1}{n+1}$ soit $\frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n+2) \geq 0$ (question 1.b).

En conséquence,

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

- (b) D'après la question 2.b, on a $u_n \leq 1 + \ln(n)$ si bien que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \leq 1 + \ln(n) - \ln(n+1)}$$

- (c) Par croissance de $\ln$, on a $\ln(n) \leq \ln(n+1)$ si bien que $v_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par 1. Comme elle est en outre croissante, alors

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est convergente.}}$$

Devoir Surveillé n°8 de MathématiquesSamedi 30 Mai 2026 (*Durée : 3 h*)**Exercice 1**

On définit sur $] -1 ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$ la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$.

- 1) Donner le DL₂ de $\ln(1+x)$ en 0.
- 2) Prouver que f admet en 0 un prolongement par continuité.
On l'appellera encore f et l'on donnera la valeur de $f(0)$.
- 3) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, préciser la valeur de $f'(0)$.
- 4) (a) Déterminer l'expression de $f'(x)$ sur $] -1 ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$.
(b) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $] -1 ; +\infty [$?

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 < a < 1$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n(2 - u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1) (a) Montrer par récurrence que $0 < u_n < 1$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
On pourra s'intéresser à la fonction $f : x \mapsto 2x - x^2$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
(c) Que peut-on en déduire ?
- 2) On suppose maintenant que $a = \frac{1}{8}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = 1 - u_n$.
(a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
(b) En déduire l'expression de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
Pas la peine de rédiger la récurrence, je vous en fais cadeau cette fois-ci.
(c) Déterminer la limite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis celle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 3

On considère $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0\}$.

- 1) Justifier que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et en donner des bases.
- 2) Déterminer $E \cap F$.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit sur $[0; 1]$ la fonction $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$.

- 1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; 1]$. On la note α_n .
- 2) Déterminer les signes de $f_n(0)$ et $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$. Que peut-on en déduire sur α_n ?
- 3) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.
- 4) Comparer $f_{n+1}(\alpha_n)$ à $f_{n+1}(\alpha_{n+1})$. En déduire le sens de variation de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Problème 1

Le but de ce problème est d'étudier les couples $(x; y)$ d'éléments distincts de l'intervalle $]0; +\infty[$ solutions de l'équation (E) : $x^y = y^x$ et, en particulier, les couples d'entiers.

- 1) Montrer que l'équation (E) est équivalente à $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$.
- 2) On définit sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction $h : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$. Soit $\mathcal{C}$ sa courbe.
 - (a) Déterminer les limites de la fonction h en $+\infty$ et en 0.
 - (b) Dresser le tableau de variations de la fonction h .
 - (c) Préciser l'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
 - (d) Donner l'allure de $\mathcal{C}$ (on prendra $e = 3$ et $e^{-1} = 1/3$).
- 3) Soit λ un élément de l'intervalle $]0; \frac{1}{e}[$. Prouver l'existence d'un unique nombre réel $a \in]1; e[$ et d'un unique nombre réel $b \in]e; +\infty[$ tels que $h(a) = h(b) = \lambda$.
- 4) On considère la fonction s qui, à tout nombre réel a de l'intervalle $]1; e[$, associe l'unique nombre réel b de l'intervalle $]e; +\infty[$ tel que $h(a) = h(b)$.

Par lecture graphique et sans justification, répondre aux questions suivantes :

 - (a) Quelle est la limite de $s(a)$ quand a tend vers 1 par valeurs supérieures ?
 - (b) Quelle est la limite de $s(a)$ quand a tend vers e par valeurs inférieures ?
 - (c) Déterminer les variations de la fonction s , et dresser son tableau de variations.
- 5) Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de l'équation (E).

Problème 2

Ce problème comporte trois parties qui s'enchaînent. Certains résultats indispensables sont fournis gentiment dans l'énoncé : n'oubliez surtout pas de vous en servir ! Vous pourrez également utiliser si nécessaire les approximations suivantes : $e \simeq 2,7$ et $1/e \simeq 0,4$.

On s'intéresse à la fonction $g : x \mapsto \frac{x - \ln x}{2}$ définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie I – étude d'une fonction auxiliaire

Considérons tout d'abord la fonction $f : x \mapsto \ln x + x$ définie sur $]0; +\infty[$.

- 1) Dresser le tableau complet de variations de f .
- 2) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$.
- 3) Vérifier que $\frac{1}{e} \leq \alpha \leq 1$.

Indication : on pensera à utiliser le sens de variation de f .

Partie II – étude de l'équation $g(x) = x$

- 1) Montrer que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$ sur $]0; +\infty[$.
- 2) (a) Dresser le tableau de variations de g sur l'intervalle $I = \left[\frac{1}{e}; 1\right]$.
(b) Prouver que : $\forall x \in I, g(x) \in I$.
- 3) (a) Montrer que : $\forall x \in I, |g'(x)| \leq \frac{e-1}{2}$.
(b) En déduire que : $\forall x \in I, |g(x) - \alpha| \leq \frac{e-1}{2} |x - \alpha|$.

Partie III – étude d'une suite récurrente

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.
- 2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{e-1}{2} |u_n - \alpha|$.
- 3) (a) Établir alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{e-1}{2}\right)^n$.
(b) Que peut-on en déduire ?

Exercice 1

1) D'après le cours,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2).$$

2) Ainsi,

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

donc, par somme de limites,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

De ce fait,

On peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

3) En outre

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1 - \frac{x}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x) - 1}{x} = -\frac{1}{2} + o_{x \rightarrow 0}(1)$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2}$$

Par conséquent,

$$f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = -\frac{1}{2}.$$

4) (a) La fonction f est dérivable sur $I =]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ en tant que composée de fonctions usuelles dérivables et l'on a

$$\forall x \in I \quad f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$$

(b) Sur l'ensemble I , la fonction f' est continue en tant que composée de fonctions usuelles continues. Il ne reste plus qu'à examiner la continuité de f' en 0.

On a
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

donc
$$\frac{x}{1+x} = x - x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

De plus
$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

d'où
$$\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) = -x^2/2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

On en déduit que $f'(x) = -1/2 + o_{x \rightarrow 0}(1)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -1/2 = f'(0)$.

Ainsi

La fonction f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1 ; +\infty [$.

Exercice 2

1) (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $0 < u_n < 1$ ».

- *Initialisation* : on a $u_0 = a \in]0; 1[$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie, soit $0 < u_n < 1$. Définissons la fonction $f : x \mapsto 2x - x^2$ sur l'intervalle $[0; 1]$. Elle est dérivable et $f'(x) = 2 - 2x = 2(1 - x) > 0$ sur $]0; 1[$ donc f est strictement croissante sur $[0; 1]$. De ce fait, la relation $0 < u_n < 1$ implique $f(0) < f(u_n) < f(1)$ soit $0 < u_{n+1} < 1$. Ceci signifie que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion* : le principe de récurrence permet d'affirmer que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, si bien que

$$0 < u_n < 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Remarque : on peut aussi s'en sortir sans passer par les variations de la fonction f , en notant que la relation de récurrence s'écrit aussi

$$u_{n+1} = 2u_n - u_n^2 = 1 - (u_n - 1)^2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n(2 - u_n) - u_n = u_n(1 - u_n)$.

Or, on vient de montrer que $0 < u_n < 1$ si bien que $u_n(1 - u_n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De ce fait,

$$\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement croissante}$$

(c) Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée d'après les questions précédentes, on en déduit qu'elle converge vers un réel $\ell \geq u_0 = a$.

De plus, $0 < u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit, par passage à la limite, $0 \leq \ell \leq 1$.

Enfin, $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit par passage à la limite $\ell = \ell(2 - \ell)$ d'où $\ell(1 - \ell) = 0$ d'où $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. Comme $\ell \geq a > 0$, il s'ensuit que $\ell = 1$.

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

2) (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1 - u_{n+1} = 1 - u_n(2 - u_n) \\ &= 1 - 2u_n + u_n^2 = (1 - u_n)^2 \end{aligned}$$

soit

$$v_{n+1} = v_n^2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

(b) Déjà, $v_0 = 1 - u_0 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. Ainsi $v_1 = \left(\frac{7}{8}\right)^2$, $v_2 = v_1^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^4$, $v_3 = \left(\frac{7}{8}\right)^8$, et par une récurrence immédiate

$$v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

(c) Comme $0 < \frac{7}{8} < 1$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ par composition de limites.

Or $u_n = 1 - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, si bien que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Exercice 3**1) Montrer que E est un sous-ev de $\mathbb{R}^3$**

Par définition de l'ensemble E, on a

$$\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E \iff x + 2y - z = 0 \iff z = x + 2y \iff \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x + 2y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $E = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ est un sous-ev de $\mathbb{R}^3$ de base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Montrer que F est un sous-ev de $\mathbb{R}^3$

Par définition de l'ensemble F, on a

$$\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \iff 2x + y + z = 0 \iff z = -2x - y \iff \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2x - y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $F = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ est un sous-ev de $\mathbb{R}^3$ de base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

2) Comme E et F sont deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$, leur intersection est une droite vectorielle :

$$\begin{aligned} \vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E \cap F &\iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \quad (L_2) - 2(L_1) \\ &\iff \begin{cases} x = -2y + z = -z \\ y = z \end{cases} \iff \vec{v} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De ce fait, $E \cap F = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est un sous-ev de $\mathbb{R}^3$ de base $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercice 4

Notons que $n \geq 1$ dans cet exercice.

1) Appliquons le théorème de la Bijection à la fonction f_n sur l'intervalle $[0; 1]$.

- La fonction f_n est polynomiale, donc f_n est continue sur $[0; 1]$.
- De même, elle est dérivable sur $[0; 1]$ et $f_n'(x) = 5x^4 + n \geq n \geq 1 > 0$.
Ceci prouve que f_n est strictement croissante sur $[0; 1]$.
- Enfin, $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1 + n - 1 = n$ donc $f_n(0) < 0 < f_n(1)$.

On déduit alors du Théorème de la Bijection qu'

$$\boxed{\text{Il existe un unique réel } \alpha_n \in [0; 1] \text{ tel que } f_n(\alpha_n) = 0.}$$

2) On a $f_n(0) = -1$ et $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^5 + n \times \frac{1}{n} - 1 = \left(\frac{1}{n}\right)^5$. De ce fait,

$$\boxed{f_n(0) < 0 < f_n\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Ainsi, $f_n(0) < f_n(\alpha_n) < f_n\left(\frac{1}{n}\right)$. Comme f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 < \alpha_n < \frac{1}{n}}$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < \alpha_n < \frac{1}{n}$ d'après la question précédente.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. On déduit alors du théorème des gendarmes que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0.}$$

4) Par définition des fonctions f_n , on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_{n+1}(x) = f_n(x) + x$$

En particulier, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_{n+1}(\alpha_n) = f_n(\alpha_n) + \alpha_n = \alpha_n > 0$$

si bien que

$$f_{n+1}(\alpha_n) > f_{n+1}(\alpha_{n+1})$$

d'où

$$\alpha_n > \alpha_{n+1}$$

par stricte croissance de f_{n+1}

Ainsi,

$$\boxed{\text{La suite } (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est strictement décroissante}}$$

Problème 1

1) Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, on a

$$(E) \iff x^y = y^x \iff \ln(x^y) = \ln(y^x) \iff y \ln x = x \ln y$$

si bien que

$$(E) \iff \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$$

2) (a) D'après les croissances comparées, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

On sait que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$.

On en déduit par produit de limites que $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$.

(b) La fonction h est dérivable comme quotient de fonctions usuelles dérivables et

$$\forall x > 0 \quad h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Comme $x^2 > 0$, alors $h'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$. De ce fait

$$h'(x) > 0 \iff 1 - \ln x > 0 \iff \ln x < 1 \iff 0 < x < e$$

par croissance de la fonction $\ln$.

x	0	e	$+\infty$
$h'(x)$		+	-
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{1}{e} \searrow$	0

Notons que $h(e) = \frac{1}{e}$ est le maximum de la fonction h .

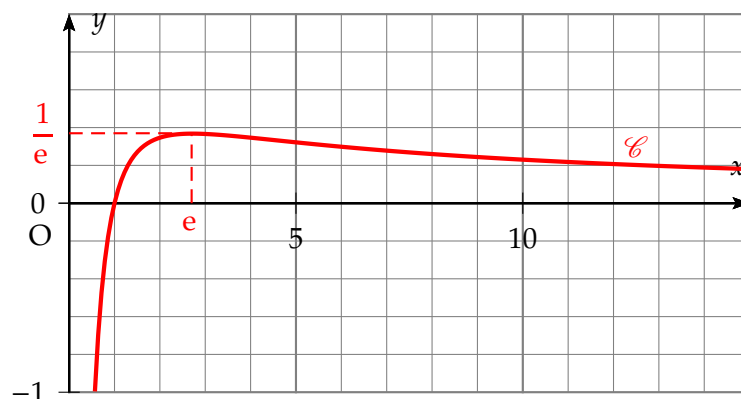
(c) La courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses au point $A(a; 0)$ tel que $h(a) = 0$.

Or $h(a) = 0 \iff \ln a = 0 \iff a = 1$

Ainsi

La courbe $\mathcal{C}$ et l'axe (Ox) se coupent en $A(1; 0)$.

(d) Voici l'allure de la courbe :



3) Soit $\lambda \in]0; \frac{1}{e}[$.

- La fonction h est continue, car dérivable, sur $]1; e[$.
- Elle est de plus strictement croissante sur cet intervalle.
- Enfin $h(1) = 0$ et $h(e) = \frac{1}{e}$, donc $\lambda \in]h(1); h(e)[$.

On déduit alors du théorème de la bijection qu'

Il existe un unique nombre réel $a \in]1; e[$ tel que $h(a) = \lambda$.

De même :

- La fonction h est continue, car dérivable, sur $]e; +\infty[$.
- Elle est de plus strictement croissante sur cet intervalle.
- Enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ et $h(e) = \frac{1}{e}$, donc $\lambda \in]\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x); h(e)[$.

On déduit alors du théorème de la bijection qu'

Il existe un unique nombre réel $b \in]e; +\infty[$ tel que $h(b) = \lambda$.

4) Pour visualiser le comportement de s , il suffit de faire apparaître graphiquement $s(a)$ pour tout $a \in]1; e[$. Pour cela, on trace la droite d'équation $y = h(a)$: ses intersections avec la courbe $\mathcal{C}$ ont pour abscisses respectives a et $s(a)$.

(a) On observe que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} s(a) = +\infty$.

(b) On observe que $\lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x < e}} s(a) = e$.

(c) On observe que la fonction s est strictement décroissante sur l'intervalle $]1; e[$.

5) Soit $(x; y)$ un couple d'entiers distincts solution de (E), avec $x < y$.

- D'après la question 1, on a $h(x) = h(y)$.
- D'après le tableau de variations de h , on a nécessairement $1 < x < e < y$.
- Le seul entier de l'intervalle $]1; e[$ étant 2, on a forcément $x = 2$.
- On sait alors d'après la question 3 qu'il existe un unique réel $y > e$ tel que $h(2) = h(y)$ soit $2^y = y^2$. Comme $y = 4$ convient, c'est la seule valeur possible de y .
- Ainsi $(x; y) = (2; 4)$ nécessairement.

Comme ce couple est bien solution de (E), on en déduit alors que

Le seul couple d'entiers distincts solution de l'équation (E) est $(2; 4)$.

Problème 2

Partie I – étude d'une fonction auxiliaire

1) La fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ en tant somme de fonctions usuelles strictement croissantes. De plus, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par sommes de limites.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

↗

- 2) ❶ la fonction f est continue (somme de fonctions continues) sur $]0; +\infty[$.
 ❷ f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
 ❸ $0 \in \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$

On déduit alors du théorème de la bijection que

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \in]0; +\infty[.}$$

- 3) Comme $\frac{1}{e} < 1$, on a $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 < 0$. De plus, $f(1) = 1 + \ln(1) = 1 > 0$.

Ainsi $f\left(\frac{1}{e}\right) < f(\alpha) < f(1)$ d'où $\boxed{\frac{1}{e} < \alpha < 1}$ par stricte croissance de f .

Partie II – étude de l'équation $g(x) = x$

- 1) Pour tout $x > 0$, on a
- $$\begin{aligned} g(x) = x &\iff \frac{x - \ln x}{2} = x \\ &\iff x - \ln x = 2x \\ &\iff 0 = x + \ln x = f(x) \\ &\iff x = \alpha \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\alpha \text{ est l'unique solution de l'équation } g(x) = x.}$$

- 2) (a) La fonction g est dérivable sur I (somme de fonctions usuelles dérivables) et

$$\forall x \in I \quad g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} = \frac{x-1}{2x} \leq 0$$

La fonction g est ainsi décroissante sur I .

De plus, elle admet pour minimum $g(1) = \frac{1}{2}$ et pour

maximum $g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e} + \frac{1}{2}$.

x	$\frac{1}{e}$	1
$g'(x)$		$-$
$g(x)$	$\frac{1}{2e} + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- (b) Soit $x \in I$. D'après le tableau de variation, on a $g(1) \leq g(x) \leq g\left(\frac{1}{e}\right)$.

Or, $g(1) = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{e}$ car $e < 2$ et $g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e} + \frac{1}{2} < 1$ car $\frac{1}{2e} \simeq 0,2$.

On a de ce fait $\frac{1}{e} \leq g(1) \leq g(x) \leq g\left(\frac{1}{e}\right) \leq 1$.

Par conséquent,

$$\boxed{\forall x \in I, \quad g(x) \in I}$$

- 3) (a) Pour tout $x \in I$, on a $\frac{1}{e} \leq x \leq 1$
 donc $1 \leq \frac{1}{x} \leq e$ (par décroissance de la fonction inverse)
 et $-\frac{e}{2} \leq -\frac{1}{2x} \leq -\frac{1}{2}$
 si bien que $\frac{1-e}{2} \leq g'(x) \leq 0$ (comme $g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x}$)

Ainsi

$$\boxed{\forall x \in I, \quad |g'(x)| \leq \frac{e-1}{2}}$$

(b) On déduit alors de l'inégalité des accroissements finis que

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad |g(x) - g(y)| \leq \frac{e-1}{2} |x - y|$$

En particulier pour $y = \alpha$, comme $\alpha \in I$ (question I.3) et que $g(\alpha) = \alpha$, on obtient

$$\boxed{\forall x \in I, |g(x) - \alpha| \leq \frac{e-1}{2} |x - \alpha|}$$

Partie III – étude d'une suite récurrente

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \in I$ ».

- *Initialisation* : $u_0 = 1 \in I = \left[\frac{1}{e}; 1\right]$ donc la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé ; on suppose que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Ainsi, $u_n \in I$: il découle alors de la question II.2.b que $u_{n+1} = g(u_n) \in I$.
De ce fait, la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion* : d'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I}$$

2) On vient de montrer que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: on peut donc appliquer le résultat de la question II.3.b à $x = u_n$. Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad |g(u_n) - \alpha| = |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{e-1}{2} |u_n - \alpha|}$$

3) (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{e-1}{2}\right)^n$ ».

- *Initialisation* : on a $u_0 = 1$ et $\alpha \in I = \left[\frac{1}{e}; 1\right]$ donc $|u_0 - \alpha| \leq 1 - \frac{1}{e} \leq 1$.
De ce fait, la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé ; on suppose que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
On a donc $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{e-1}{2}\right)^n$.
Il découle alors de la question précédente que

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{e-1}{2} |u_n - \alpha| \leq \frac{e-1}{2} \times \left(\frac{e-1}{2}\right)^n = \left(\frac{e-1}{2}\right)^{n+1}$$

De ce fait, la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion* : d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{e-1}{2}\right)^n}$$

(b) Comme $0 < \frac{e-1}{2} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e-1}{2}\right)^n = 0$.

On déduit alors du théorème des gendarmes que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha.}$$

Devoir Surveillé n°9 de Mathématiques

Samedi 20 Juin 2026 (Durée : 2 h)

Exercice

Soient un espace vectoriel E , et deux endomorphismes u et $v \in \mathcal{L}(E)$.

Démontrer que $u \circ v = 0 \iff \text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u)$.

Problème

Ce problème comporte trois parties qui s'enchaînent. Certains résultats indispensables sont fournis dans l'énoncé. N'oubliez surtout pas de les utiliser pour la suite !

Partie I – Étude d'un endomorphisme

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et l'application f définie sur E par

$$\forall (x, y, z) \in E \quad f(x, y, z) = (x - 2y - 4z, 2y, -x - 2y - 2z)$$

On note $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ la base canonique de E .

- 1) Montrer que f est un endomorphisme de E .
- 2) Justifier que la matrice de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.
- 3) L'application f est-elle bijective ? injective ? surjective ?
- 4) (a) Écrire la matrice de $f + 3 \text{Id}_E$.
(b) En déduire $F = \text{Ker}(f + 3 \text{Id}_E)$. On en donnera une base ainsi que la dimension.
- 5) Procéder de même avec $G = \text{Ker}(f - 2 \text{Id}_E)$.
- 6) Montrer que la réunion des bases de F et de G ainsi obtenues est une base de E .

Partie II – Matrice de f dans une nouvelle base

Soient $\mathbf{e}_1(1, 0, 1)$, $\mathbf{e}_2(-2, 1, 0)$ et $\mathbf{e}_3(-4, 0, 1)$. On note $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

- 1) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de l'espace vectoriel E .
- 2) Déterminer la matrice D de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$.
- 3) On définit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(a) Calculer P^{-1} .
(b) Vérifier que $D = P^{-1} A P$.

Partie III – Calcul de A^n

- 1) Exprimer A en fonction de D et P .
- 2) Pour $n \geq 0$, exprimer A^n en fonction de D , P et n .
On démontrera le résultat par récurrence.
- 3) (a) Exprimer les coefficients de A^n en fonction $n \in \mathbb{N}$.
(b) Vérifier la cohérence des résultats pour $n = 0$ et $n = 1$.

Exercice

- **Implication directe** : on suppose que $u \circ v = 0$.

On va montrer que $\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u)$.

Soit $y \in \text{Im}(v)$: il existe alors $x \in E$ tel que $y = v(x)$.

De ce fait, $u(y) = u(v(x)) = u \circ v(x) = 0$ comme $u \circ v = 0$, si bien que $y \in \text{Ker}(u)$.

Ceci étant vrai pour tout $y \in \text{Im}(v)$, on en déduit que $\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u)$.

- **Implication réciproque** : on suppose que $\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u)$.

On va montrer que $u \circ v = 0$.

Soit $x \in E$: alors $v(x) \in \text{Im}(v)$ d'où $v(x) \in \text{Ker}(u)$ puisque $\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u)$.

Il en découle que $u(v(x)) = u \circ v(x) = 0$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on en déduit que $u \circ v = 0$.

Problème

Partie I – Étude d'un endomorphisme

- 1) Pour tout $\vec{u}(x, y, z) \in E$, on a $f(\vec{u}) = (x - 2y - 4z, 2y, -x - 2y - 2z) \in E$.

Montrons que f est linéaire : pour tous $\vec{u}(x, y, z), \vec{v}(x', y', z') \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\ &= (\lambda x + \mu x' - 2(\lambda y + \mu y') - 4(\lambda z + \mu z'), 2(\lambda y + \mu y'), \\ &\quad -(\lambda x + \mu x') - 2(\lambda y + \mu y') - 2(\lambda z + \mu z')) \\ &= (\lambda(x - 2y - 4z) + \mu(x' - 2y' - 4z'), \lambda(2y) + \mu(2y'), \\ &\quad \lambda(-x - 2y - 2z) + \mu(-x' - 2y' - 2z')) \\ &= \lambda(x - 2y - 4z, 2y, -x - 2y - 2z) + \mu(x' - 2y' - 4z', 2y', -x' - 2y' - 2z') \\ &= \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}) \end{aligned}$$

ce qui montre que

f est un endomorphisme de E .

- 2) Calculons les images par f des éléments de $\mathcal{B}$:

- $f(1, 0, 0) = (1, 0, -1)$.
- $f(0, 1, 0) = (-2, 2, -2)$.
- $f(0, 0, 1) = (-4, 0, -2)$.

De ce fait,

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

- 3) Pour répondre à cette question, le plus simple est de déterminer le rang de A .

Pour cela, on effectue les opérations élémentaires $C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1$ puis $C_3 \leftarrow C_3 + 4C_1$:

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & -6 \end{pmatrix} = 3$$

Comme $\text{rg}(f) = 3 = \dim(E)$, on en déduit que

L'application f est bijective : c'est un **automorphisme de E** .

4) (a) La matrice de l'endomorphisme $f + 3 \text{Id}_E$ est $A + 3 I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de E. Alors :

$$\begin{aligned} \vec{u} \in F = \text{Ker}(f + 3 \text{Id}_E) &\iff (f + 3 \text{Id}_E)(\vec{u}) = \vec{0} \\ &\iff \begin{cases} 4x - 2y - 4z = 0 \\ 5y = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases} \\ &\iff \vec{u} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$F = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ est un ss-ev de E de dimension 1 et de base } \mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

La famille $\mathcal{B}_1$ est bien évidemment libre car elle est formée d'un vecteur non nul.

5) La matrice de l'endomorphisme $f - 2 \text{Id}_E$ est $A - 2 I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de E. Alors :

$$\begin{aligned} \vec{u} \in G = \text{Ker}(f - 2 \text{Id}_E) &\iff (f - 2 \text{Id}_E)(\vec{u}) = \vec{0} \\ &\iff x + 2y + 4z = 0 \\ &\iff x = -2y - 4z \\ &\iff \vec{u} = \begin{pmatrix} -2y - 4z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

si bien que

$$G = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ est un ss-ev de E de dimension 2 et de base } \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

La famille $\mathcal{B}_2$ est libre car elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires.

6) Considérons la famille $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{(1, 0, 1), (-2, 1, 0), (-4, 0, 1)\}$. C'est une famille de 3 vecteurs dans un espace E de dimension 3 : il suffit donc de vérifier qu'elle est de rang 3 pour montrer que c'est une base de E. Or,

$$\text{rg}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

en effectuant $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$. De ce fait,

La réunion des bases de F et de G est bien une base de E.

Partie II – Matrice de f dans une nouvelle base

1) Quel hasard ! On vient justement de démontrer le résultat voulu ! Ainsi,

La famille $\mathcal{B}'$ est une base de E .

2) Il suffit pour cela de calculer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ des images par f des éléments de $\mathcal{B}'$. On peut aller un poil plus vite en utilisant les résultats de la partie I.

- Le vecteur $\mathbf{e}_1(1, 0, 1)$ appartient à $\text{Ker}(f + 3 \text{Id}_E)$ d'après la question I.4).
De ce fait, $f(\mathbf{e}_1) + 3\mathbf{e}_1 = 0$ soit $f(\mathbf{e}_1) = -3\mathbf{e}_1 = -3\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$.
- Les vecteurs $\mathbf{e}_2(-2, 1, 0)$ et $\mathbf{e}_3(-4, 0, 1)$ sont dans $\text{Ker}(f - 2 \text{Id}_E)$ d'après la question I.5).
On a donc $f(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_2 = 0\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$ et $f(\mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_3 = 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$.

Ainsi,

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3) (a) On utilise la méthode d'inversion rapide, en travaillant sur les lignes :

$$\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/5 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/5 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Par conséquent,

$$P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) C'est un simple produit matriciel :

$$5P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5D$$

si bien que

$$P^{-1}AP = D$$

Partie III – Calcul de A^n

1) D'après la question précédente, $D = P^{-1} A P$ donc $A = P D P^{-1}$.

2) Pour $n \geq 0$, on pose $\mathcal{P}(n) : \ll A^n = P D^n P^{-1} \gg$.

• *Initialisation* : on a $P D^0 P^{-1} = I_3 = A^0$ donc la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Alors

$$A^n = P D^n P^{-1}$$

De ce fait,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= P D^n P^{-1} \times P D P^{-1} \\ &= P D^n \times D P^{-1} \\ &= P D^{n+1} P^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi, la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• *Conclusion* : on déduit du principe de récurrence que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = P D^n P^{-1}$$

3) (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a d'après ce qui précède

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^n & 2 \cdot (-3)^n & 4 \cdot (-3)^n \\ 0 & 5 \cdot 2^n & 0 \\ -2^n & -2 \cdot 2^n & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

soit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \cdot 2^n + (-3)^n & 2[(-3)^n - 2^n] & 4[(-3)^n - 2^n] \\ 0 & 5 \cdot 2^n & 0 \\ (-3)^n - 2^n & 2[(-3)^n - 2^n] & 4 \cdot (-3)^n + 2^n \end{pmatrix}$$

(b) On a bien $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = I_3$ pour $n = 0$ et $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -10 & -20 \\ 0 & 10 & 0 \\ -5 & -10 & -10 \end{pmatrix} = A$ pour $n = 1$.