

CHAPITRE 9

SUITES DE FONCTIONS

I	Convergence simple et convergence uniforme	3
II	Continuité de la limite d'une suite de fonctions	9
III	Interversion limite-intégrale	11
IV	Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions	14

Extrait du programme

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Modes de convergence d'une suite de fonctions

Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme.
La convergence uniforme entraîne la convergence simple.
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

b) Régularité de la limite d'une suite de fonctions

Continuité de la limite d'une suite de fonctions :
si une suite (f_n) de fonctions continues sur I converge uniformément vers f sur I , alors f est continue sur I .

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions :
si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a, b]$ alors :

$$\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions :
si une suite (f_n) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I converge simplement sur I vers une fonction f , et si la suite (f'_n) converge uniformément sur I vers une fonction g , alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Extension aux suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ et de convergence simple de $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leq j < k$.

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

I. Convergence simple et convergence uniforme



Définition 9.1 – Convergence simple

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur I et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

On dit que la suite (f_n) **converge simplement sur I vers f** lorsque : pour tout $x \in I$ **fixé**, on a $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$.

On dit alors que f est la **limite simple** de (f_n) .

Remarque 9.1 – Avec les quantificateurs

Dire que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers f signifie :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \underbrace{\exists N \in \mathbb{N}}_{N \text{ dépend de } x \text{ et } \varepsilon}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Remarque 9.2 – Rédaction

La convergence simple est une convergence « point par point ».

Pour montrer la convergence simple d'une suite de fonctions sur un intervalle I , on commence par fixer $x \in I$ (« Soit $x \in I$ »), puis on étudie la suite numérique $(f_n(x))$.

Exemple 9.1

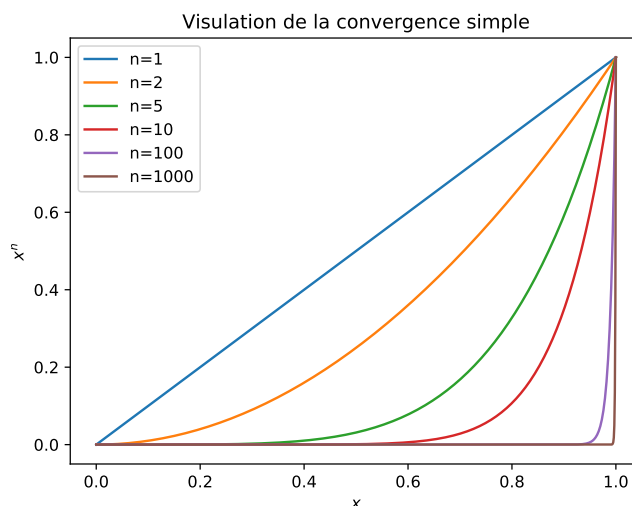
► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = x^n$.

Si $x \in [0, 1[$, alors $x^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Si $x = 1$, alors $x^n = 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction définie pour tout $x \in [0, 1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$



► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, on pose $f_n(x) = \text{Arctan}(x^n)$.

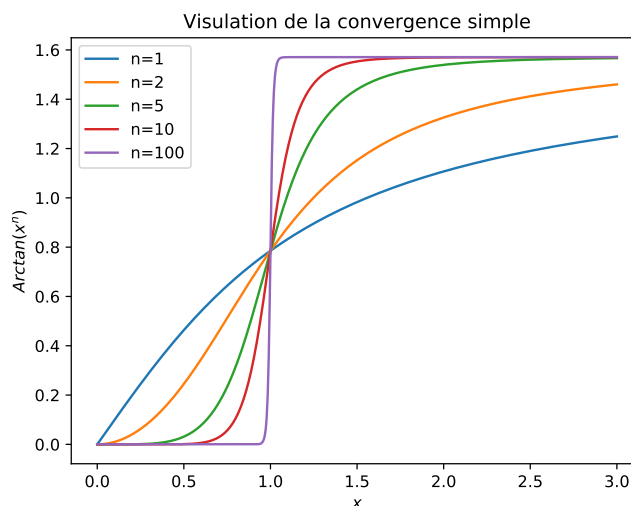
Si $x \in [0, 1[$, alors $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(0) = 0$.

Si $x = 1$, alors $f_n(x) = \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$.

Si $x > 1$, alors $x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et par composition des limites, on a : $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$.

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ \frac{\pi}{4} & \text{si } x = 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$



Remarque 9.3

Dans les exemples précédents, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$); pourtant, la fonction limite f n'est pas continue.

Si une suite de fonctions continues (f_n) converge **simplement** vers une fonction f , alors on ne peut rien dire quant à la continuité (dérivabilité, caractère $\mathcal{C}^k$) de f .



Exercice 9.1

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur I qui converge simplement vers $f : I \rightarrow \mathbb{K}$.

1. On suppose les fonctions f_n croissantes sur I . Montrer que f est croissante sur I .
2. On suppose les fonctions f_n strictement croissantes sur I . Que dire de la monotonie de f ?
3. On suppose les fonctions f_n positives sur I . Montrer que f est positive sur I .

Résolution

1. Soit $(x, y) \in I^2$ avec $x \leq y$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante donc, $f_n(x) \leq f_n(y)$.
En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, il vient $f(x) \leq f(y)$.
Donc, f est croissante.
2. Comme précédemment, la fonction f est croissante.
Les inégalités strictes deviennent larges en passant à la limite, on ne peut donc pas conclure que f est strictement croissante. Dans les exemples précédents, les fonctions f_n sont strictement croissantes et la fonction limite f est non strictement croissante.
3. Soit $x \in I$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \geq 0$.
En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, il vient $f(x) \geq 0$.

Donc, f est positive.



Définition 9.2 – Convergence uniforme

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur I et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

On dit que la suite (f_n) **converge uniformément sur I vers f** lorsque :

- ▶ À partir d'un certain rang, la fonction $f_n - f$ est bornée sur I .
- ▶ $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On dit alors que f est la **limite uniforme** de (f_n) .

Remarque 9.4 – Norme de la convergence uniforme

L'ensemble $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ désigne l'ensemble des fonctions bornées définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On a montré dans le chapitre ESPACES VECTORIELS NORMÉS que l'application définie pour tout $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$ est une norme sur $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ (pour préciser l'intervalle, on note aussi $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$).

Si toutes les fonctions (f_n) et f sont bornées, alors (f_n) converge uniformément sur I vers f si, et seulement si,

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On dit alors que $\|\cdot\|_\infty$ est la norme de la convergence uniforme.

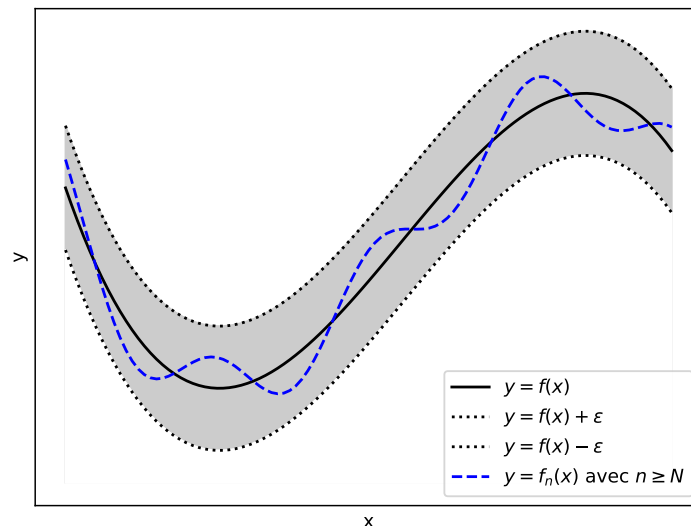
Remarque 9.5 – Avec les quantificateurs

Dire que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers f signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \underbrace{\exists N \in \mathbb{N}}_{N \text{ ne dépend que de } \varepsilon}, \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

La seule différence entre la convergence simple et la convergence uniforme est la position du quantificateur « $\forall x \in I$ ». L'entier N ne dépend pas de x (il est **uniforme** en x).

De plus, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ est équivalent à $f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq \varepsilon + f(x)$. Le graphe de f_n avec $n \geq N$, est donc dans un cylindre de rayon ε placé autour du graphe de f .



Théorème 9.1 – La convergence uniforme implique la convergence simple

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur I et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

Si la suite (f_n) converge uniformément sur I vers f , alors la suite (f_n) converge simplement sur I vers f .

Démonstration

Soit $x \in I$ fixé.

On sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, la fonction $f_n - f$ est bornée sur I .

Or, pour tout $n \geq N$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$ et $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Par théorème d'encadrement, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$. Ceci est vrai pour tout $x \in I$.

Donc, la suite (f_n) converge simplement sur I vers f . □

Proposition 9.1

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur I et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

On suppose qu'il existe (u_n) une suite numérique telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et, à partir d'un certain rang,

$$\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq u_n.$$

Alors (f_n) converge uniformément sur I vers f .

Démonstration

On sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, pour tout $x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| \leq u_n$.

Donc, pour tout $n \geq N$, la fonction $|f_n - f|$ est majorée par u_n . D'où, par la définition de borne supérieure :

$$\forall n \geq N, \|f_n - f\|_\infty \leq u_n.$$

Or $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc par théorème d'encadrement, $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. □

Méthode 9.1 – Rédaction : étude de la convergence uniforme

1. Pour étudier la convergence uniforme sur I d'une suite de fonctions (f_n) , on commence par étudier sa convergence simple.

Pour cela, on fixe $x \in I$ et on étudie la convergence de la suite numérique $(f_n(x))$.

Dans le cas où, pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))$ converge, il y a convergence simple et on note f la limite simple de la suite de fonctions (f_n) . C'est uniquement à ce moment qu'on se pose la question de la convergence uniforme.

2. Pour déterminer si la suite (f_n) converge uniformément ou non, on cherche une majoration du type :

$$\text{pour tout } x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq u_n$$

vraie pour tout n assez grand et où (u_n) est une suite de réels **ne dépendant pas** de x telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Pour cela, on peut majorer directement ou réaliser l'étude de la fonction $|f_n - f|$.

Exemple 9.2 – Convergence uniforme

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.

Étude de la convergence simple

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par continuité de la fonction $\sqrt{\cdot}$, on a : $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} = |x|$.

Donc, la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1[$ vers la fonction valeur absolue notée f .

Étude de la convergence uniforme

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right| = \left| \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \right| = \frac{1}{n} \times \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}}.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Le majorant obtenu ne dépend pas de x .

Donc, par définition de la borne supérieure, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, par théorème d'encadrement, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction valeur absolue.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $f_n(x) = \cos\left(x + \frac{1}{n}\right)$.

Étude de la convergence simple

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Par continuité de la fonction $\cos$, on a : $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \cos(x)$.

Donc, la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction cosinus notée f .

Étude de la convergence uniforme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $\cos$ est dérivable sur $\left[x, x + \frac{1}{n}\right]$, continue sur $\left[x, x + \frac{1}{n}\right]$. De plus, pour tout $u \in \left[x, x + \frac{1}{n}\right]$, $|\cos'(u)| = |\sin(u)| \leq 1$.

Donc, par l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - f(x)| = \left| \cos\left(x + \frac{1}{n}\right) - \cos(x) \right| \leq 1 \times \left| x + \frac{1}{n} - x \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Par définition de la borne supérieure, on a $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$.

D'où, par théorème d'encadrement, $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f .

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1]$, on note $f_n(x) = x^n \times \ln(x)$.

Étude de la convergence simple

Soit $x \in]0, 1]$.

Si $x = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Si $x \in]0, 1[$, alors $x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, la suite (f_n) converge simplement sur $]0, 1]$ vers la fonction nulle notée f .

Étude de la convergence uniforme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Étudions les variations de la fonction $h_n = |f_n - f| : x \mapsto -x^n \times \ln(x)$.

La fonction h_n est dérivable sur $]0, 1]$ comme produit de fonctions dérivables et, pour tout $x \in]0, 1]$,

$$h'_n(x) = -(n \times \ln(x) + 1) \times x^{n-1}.$$

On en déduit que $h'_n(x)$ est du signe opposé de $n \times \ln(x) + 1$. Or,

$$n \times \ln(x) + 1 \leq 0 \iff \ln(x) \leq -\frac{1}{n} \iff x \leq e^{-\frac{1}{n}}.$$

On en déduit que h_n est croissante sur $]0, e^{-\frac{1}{n}}]$ et décroissante sur $[e^{-\frac{1}{n}}, 1]$.

D'où, pour tout $x \in]0, 1]$, $h_n(x) \leq h_n(e^{-\frac{1}{n}})$.

$$\text{De plus, } h_n(e^{-\frac{1}{n}}) = -e^{-1} \times \frac{-1}{n} = \frac{1}{e \times n}.$$

Donc, pour tout $x \in]0, 1]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{e \times n}$. Le majorant obtenu ne dépend pas de x .

Ainsi, par définition de la borne supérieure, on a $\sup_{x \in]0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{e \times n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, par théorème d'encadrement, (f_n) converge uniformément sur $]0, 1]$ vers la fonction valeur absolue.

💡 Exemple 9.3 – Non convergence uniforme

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1[$, on note $f_n(x) = x^n$.

Étude de la convergence simple

Soit $x \in [0, 1[$.

On sait alors que $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1[$ vers la fonction nulle notée f .

Étude de la convergence uniforme

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x \in [0, 1[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1[} |x^n - 0| = 1$.

La suite $\left(\|f_n(x) - f(x)\|_{[0, 1[}^\infty\right)$ ne tend pas vers 0. Donc, (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $f_n(x) = \frac{n^2 \times x^2 - (\sin(n \times x))^2}{x^2 + n^2}$

Étude de la convergence simple

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x = 0$, alors $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Supposons $x \neq 0$ maintenant. Par opérations sur les limites, on a :

$$f_n(x) = \frac{x^2 - \frac{(\sin(n \times x))^2}{n^2}}{1 + \frac{x^2}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x^2.$$

Ainsi,

Donc, la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : x \mapsto x^2$.

Étude de la convergence uniforme

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(n \times \pi) - f(n \times \pi)| = \frac{n^2 \times \pi^4}{1 + \pi^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc, la suite $\left(\|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}}^\infty\right)$ ne tend pas vers 0. Donc, (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

II. Continuité de la limite d'une suite de fonctions

Théorème 9.2 – Continuité de la limite d'une suite de fonctions

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur I et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

Si,

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I ,

(ii) (f_n) converge uniformément sur I vers f ,

Alors, la fonction f est continue sur I .

Démonstration

Soit $a \in I$.

Soit $\varepsilon > 0$. La suite de fonction (f_n) converge uniformément sur I vers f :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Prenons $n = N$. Par inégalité triangulaire, on a : pour tout $x \in I$,

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \leq 2\varepsilon + |f_N(a) - f(a)|$$

Or, f_N est continue sur I , donc est continue en a :

$$\exists \eta > 0, \forall x \in [a - \eta, a + \eta] \cap I, |f_N(x) - f_N(a)| \leq \varepsilon.$$

D'où,

$$\forall x \in [a - \eta, a + \eta] \cap I, |f(x) - f(a)| \leq 3\varepsilon.$$

On a montré que : $\exists \eta > 0, \forall x \in [a - \eta, a + \eta] \cap I, |f(x) - f(a)| \leq 3\varepsilon$.

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc, f est continue en a . Ceci est vrai pour tout $a \in I$.

Ainsi, f est continue sur I . □

Remarque 9.6 – La continuité est une notion locale

Il se peut que parfois une suite de fonctions ne converge pas uniformément sur I mais converge uniformément sur tout segment inclus dans I : c'est-à-dire, pour tout segment $[a, b] \subset I$, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f .

Si les fonctions f_n sont continues sur I , le théorème précédent assure que f est continue sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I . Donc, f est continue sur I .

Exemple 9.4 – Convergence uniforme sur tout segment

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = x^n$.

On a déjà vu que la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle (notée f) mais ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Cependant, étant donné $[a, b] \subset [0, 1]$, avec $a < b$, on a, $\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = b^n$.

Or, $b \in [0, 1]$, donc $\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, la suite de fonctions converge uniformément sur tout segment inclus dans $[0, 1]$ vers f .

Méthode 9.2 – Montrer la non convergence uniforme

Par contraposée, on peut utiliser ce résultat pour montrer que la convergence d'une suite de fonctions n'est pas uniforme.

En effet, supposons que la suite de fonctions **continues** (f_n) converge simplement sur I vers f une fonction qui n'est pas continue sur I .

Par l'absurde, si la convergence de (f_n) sur I est uniforme, par le théorème précédent, la fonction limite f est continue. Ce qui n'est pas.

💡 **Exemple 9.5**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = e^{x + \frac{1}{n}} + x^n$.

Si $x \in [0, 1[$, alors $x^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, puis par continuité de la fonction exponentielle, $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^x$.

Si $x = 1$, alors $x^n = 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$, puis par continuité de la fonction exponentielle, $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^x + 1$.

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction définie pour tout $x \in [0, 1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in [0, 1[\\ e^x + 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Les fonctions f_n sont continues sur $[0, 1]$ mais f ne l'est pas. Donc, il ne peut pas y avoir convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[0, 1]$.

III. Intersion limite-intégrale

Théorème 9.3 – Intersion limite-intégrale

Soit $a < b$ deux réels.

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur $[a, b]$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

Si,

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a, b]$,

(ii) (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f ,

Alors, la fonction f est continue sur $[a, b]$ et : $\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$.

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt.$$

Démonstration

La fonction f est continue comme limite uniforme de fonctions continues.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt.$$

Or, les fonctions $f_n - f$ sont continues sur le segment $[a, b]$, donc sont bornées sur $[a, b]$ (théorème des bornes atteintes). D'où, par croissance de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty dt \leq (b - a) \times \|f_n - f\|_\infty.$$

Or, la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f , donc $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

D'où, par théorème d'encadrement, $\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$. □

Exemple 9.6

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on note $f_n(x) = x^n$.

On a vu que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ vers la fonction nulle.

De plus, on a bien $\int_0^{\frac{1}{2}} t^n dt = \frac{1}{(n+1) \times 2^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 = \int_0^{\frac{1}{2}} 0 dt$.

Remarque 9.7

Ce théorème est à mettre en parallèle avec les résultats du chapitre INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES.

Remarque 9.8 – Montrer la non convergence uniforme

Par contraposée, on peut utiliser ce résultat pour montrer que la convergence d'une suite de fonctions n'est pas uniforme.

Exemple 9.7

► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on note

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 \times x \times (1 - n \times x) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left]\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Soit $x \in [0, 1]$.

Si $x = 0$, on a $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On suppose maintenant $x \neq 0$. Pour n assez grand, on a $x \in \left]\frac{1}{n}, 1\right]$, donc $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

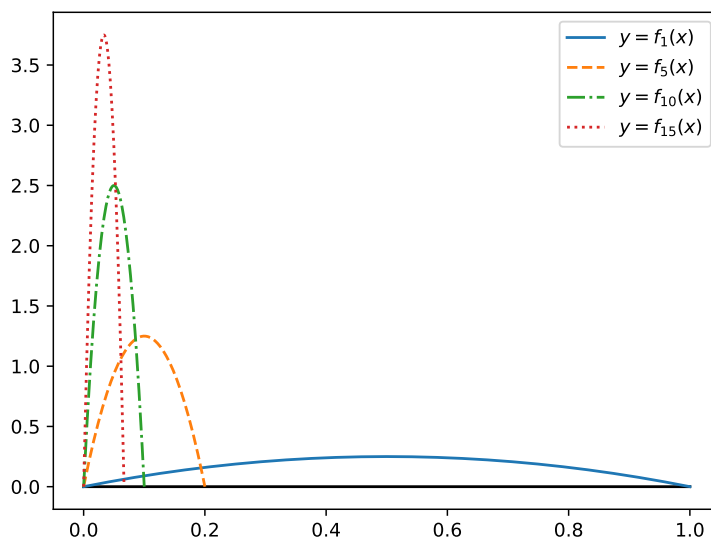
Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge sur $[0, 1]$ simplement vers la fonction nulle notée f .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 \times t \times (1 - n \times t) dt = n^2 \left[\frac{t^2}{2} - n \times \frac{t^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{6} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6}.$$

Or, $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 0 dt = 0 \neq \frac{1}{6}.$

Donc, la suite de fonction (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.



► Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on note $f_n(x) = (n+1) \times (\cos(x))^n \times \sin(x)$.

Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Si $x = 0$, on a $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos(x) \in [0, 1]$, donc, par croissances comparées, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

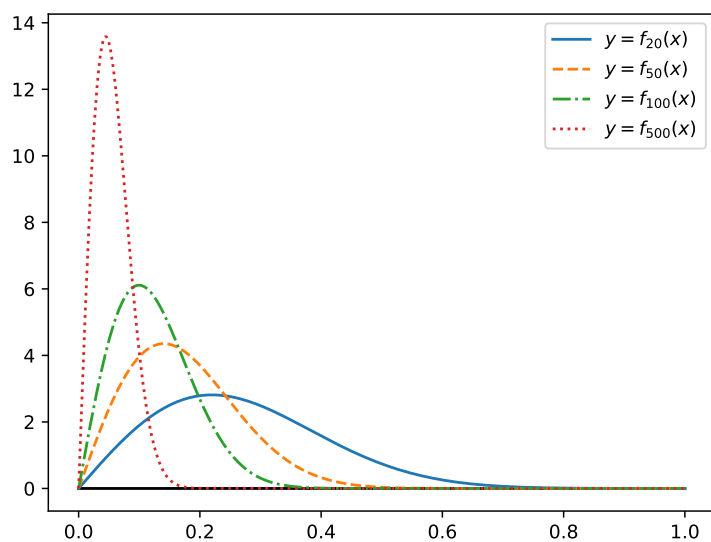
Donc, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction nulle notée f .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt = \left[-(\cos(x))^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Or, $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 0 dt = 0 \neq 1.$

Donc, la suite de fonction (f_n) ne converge pas uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



IV. Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions

🔧 Théorème 9.4 – Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur I et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions.
Si,

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- (ii) (f_n) converge simplement sur I vers f ,
- (iii) (f'_n) converge uniformément sur I vers g ,

Alors, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.

Autrement dit,

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{d}{dx}f_n(x)\right).$$

Démonstration

Soit $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , donc, par le théorème fondamental de l'analyse, pour tout $x \in I$, $f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt$.

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers f , donc, $f_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$ et, pour tout $x \in I$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.

De plus, la suite de fonctions continues (f'_n) converge uniformément sur I vers g , donc en particulier converge uniformément sur le segment d'extrémités a et x .

Donc, par le théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions, la fonction g est continue sur I et, par le théorème d'interversion limite-intégrale, on a : $\int_a^x f'_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^x g(t) dt$.

Ainsi, faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation $f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt$, il vient :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$$

Or, g est continue sur I , donc la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, en dérivant la relation précédente, on a $f' = g$. □

🔍 Remarque 9.9 – La dérivabilité est une notion locale

L'hypothèse (iii) peut être remplacée par : « (f'_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers g ». En effet, par le théorème, on peut conclure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment inclus dans I donc sur I .

🔍 Remarque 9.10 – Conséquence du théorème de dérivabilité d'une limite d'une suite de fonctions

Sous les hypothèses du théorème précédent, on peut également montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers f .

Soit $[a, b] \subset I$. La fonction $f'_n - f'$ est continue sur le segment $[a, b]$, donc est bornée sur ce segment (théorème des bornes atteintes). On note $\alpha_n = \sup_{x \in [a, b]} |f'_n(x) - f'(x)|$.

La suite de fonctions (f'_n) converge uniformément sur I vers f' , donc converge uniformément sur $[a, b]$. Autrement dit, $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

De plus, pour tout $x \in I$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt - f(a) - \int_a^x f'(t) dt \right| \leq |f_n(a) - f(a)| + \int_a^x |f'_n(t) - f'(t)| dt \leq |f_n(a) - f(a)| + \alpha_n \times (b - a).$$

Le majorant obtenu ne dépend pas de x , donc par définition de la borne supérieure,

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(a) - f(a)| + \alpha_n \times (b - a).$$

Or, (f_n) converge simplement sur I vers f , donc $f_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$.

Ainsi, par théorème d'encadrement $\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. D'où, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f et ceci est vrai pour tout segment $[a, b] \subset I$.

💡 Exemple 9.8

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $f_n(x) = \sin\left(x + \frac{1}{n}\right)$.

Par continuité de la fonction $\sin$, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f = \sin$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a montré que la suite de fonctions (f'_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $g = \cos$.

On est dans le cadre d'application du théorème de dérivation de la limite d'une suite de fonction, et on vérifie bien que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f' = g$.

⚙️ Théorème 9.5 – Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur I et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $g_1 : I \rightarrow \mathbb{K}, \dots, g_k : I \rightarrow \mathbb{K}$ des fonctions.

Si,

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ,
- (ii) (f_n) converge simplement sur I vers f ,
- (iii) Pour tout $j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, $(f_n^{(j)})$ converge simplement sur I vers g_j ,
- (iv) $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers g_k ,

Alors, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $f^{(j)} = g_j$.

Démonstration

On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{H}_k$: « Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur I et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $g_1 : I \rightarrow \mathbb{K}, \dots, g_k : I \rightarrow \mathbb{K}$ des fonctions. Sous les hypothèses (i), (ii), (iii) et (iv), la fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $f^{(j)} = g_j$. »

Initialisation. $k = 1$. C'est le théorème de dérivation de la limite d'une suite de fonctions.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{H}_k$ et on montre $\mathcal{H}_{k+1}$.

On applique le théorème de dérivation à la suite de fonctions $(f_n^{(k)})$ qui vérifie les hypothèses du théorème de dérivation : la fonction g_k est de classe $\mathcal{C}^1$, $g'_k = g_{k+1}$.

De plus, d'après la remarque 9.10, la suite de fonction $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers g_k .

Par hypothèse de récurrence, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $f^{(j)} = g_j$.

Or, g_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , donc f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I et $f^{(k+1)} = (f^{(k)})' = g'_k = g_{k+1}$. Donc, $\mathcal{H}_{k+1}$, ce qui achève la récurrence. $\square$

⚙️ Théorème 9.6 – Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur I et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

Si,

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ,
- (ii) (f_n) converge simplement sur I vers f ,
- (iii) Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $(f_n^{(j)})$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers une fonction $g_j : I \rightarrow \mathbb{K}$,

Alors, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $f^{(j)} = g_j$.

Démonstration

Conséquence immédiate du corollaire précédent.

□