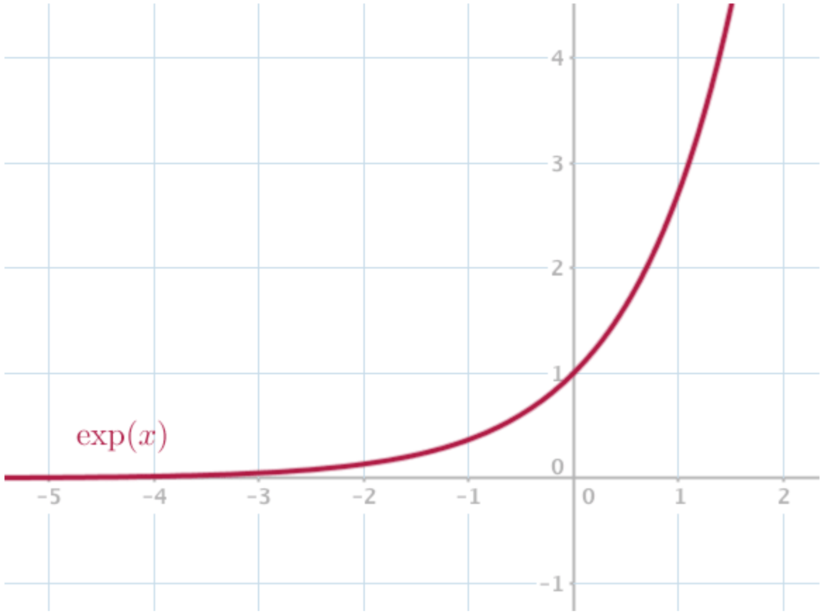
Exponentielle de base e – Fiche de cours

1. Définition

La fonction exponentielle est définie, dérivable et unique sur $\mathbb{R}$ tel que : $f=f'$ et $f(0)=1$; on utilise la notation $\exp(x)=e^x$



2. Etude de la fonction exponentielle

a. Propriétés de construction

$e^x>0$ $\quad e^0=1$ $\quad e^1=e\approx 2{,}718$

e^x est croissante sur $\mathbb{R}$

b. Résolution d'équations et d'inéquations

$e^x=e^a \Leftrightarrow x=a$ $\quad e^x<e^a \Leftrightarrow x<a$ $\quad e^x>e^a \Leftrightarrow x>a$

c. Dérivée et composition

- $\forall x\in\mathbb{R}\quad (e^x)'=e^x$
- $\forall x\in\mathbb{R}\quad (e^{u(x)})'=u'(x)\cdot e^{u(x)}$

d. Propriétés algébriques

$\forall x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}$

$$e^{x+y}=e^x\times e^y \qquad e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y} \qquad e^{-x}=\frac{1}{e^x} \qquad (e^x)^n=e^{n\cdot x}$$

e. Lien avec la fonction ln(x)

La réciproque de la fonction exponentielle est $\ln(x)$

$\forall x\in]0;+\infty[\quad e^{\ln}(x)=x$; $\forall x\in\mathbb{R}\quad \ln(e^x)=x$

f. Limites

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x=0 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n\cdot e^x=0$$

Exponentielle de base e – Exercices – Devoirs

Exercice 1 **corrigé disponible**

Écrire plus simplement les expressions suivantes en utilisant les propriétés algébriques de l'exponentielle :

$A = e^{-x+7} \times e^{-4x+6}$

$B = e^{(x+1)^2} \times e$

$C = \left(e^{x+1}\right)^2 \times e$

$D = \dfrac{e^{3x-4}}{e^{-3x+4}}$

$E = e^{-5} \times e^{-3x+4} \times e^2$

$F = \left(e^{-3}\right)^2 \times e^{2x+2} \times \dfrac{1}{e^4}$

Exercice 2 **corrigé disponible**

Calculer la dérivée et étudier les variations des fonctions suivantes :

$f(x) = (2x+1)e^x$

$g(x) = \dfrac{e^x - 1}{2e^x + 1}$

Exercice 3 **corrigé disponible**

Résoudre dans R les équations suivantes :

a. $e^x \times e^{-4} = (e^x)^4$

b. $e^{x^2} = e^{5x-6}$

Exercice 4 **corrigé disponible**

Résoudre dans R les inéquations suivantes :

a. $e^x > e^{1-x}$

b. $e^x - \dfrac{1}{e^x} > 0$

c. $(e^x + 1) \times \left(e^{2x} - 2\right) \geqslant 0$

Exercice 5 **corrigé disponible**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x)e^x + 1$.

a. Montrer que pour tout réel x de $\mathbb{R}$ on a : $f'(x) = -xe^x$

b. Donner le tableau de variations de f.

c. Donner une équation de T la tangente à C_f la courbe de f au point d'abscisse 1.

Exercice 6 **corrigé disponible**

a. Résoudre dans **R** l'équation $e^{-0{,}0434\,x} = 0{,}01$. On donnera la valeur exacte de la solution.

b. Un signal de puissance initiale $P(0) = 6{,}75$ mW parcourt une fibre optique. La puissance du signal, exprimée en mW, lorsque celui-ci a parcouru une distance de x kilomètres depuis l'entrée est donnée par $P(x) = 6{,}75\ e^{-0{,}0434\,x}$.

Quelle est la distance parcourue par le signal lorsque celui-ci aura perdu 99 % de sa puissance ? On arrondira le résultat obtenu au kilomètre.

Exercice 7

Déterminer les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} + e^{x} + 3x$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} + e^{x} + 5x^3$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} 10 - e^{-0,1x}$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x^2} + e^{x}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{e^{x}+3}$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} - x$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{15}{1-e^{1-x}}$ h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{xe^{x}+3}{e^{-3x}}$

Exercice 8

Une voiture électrique, dont l'accumulateur est totalement déchargé, est branchée à une borne de rechargement. L'énergie emmagasinée par l'accumulateur (en kilowattheure), notée E, peut être modélisée en fonction du temps t écoulé (en heure) par la fonction E définie pour $t \in [0; +\infty[$ par :

$$E(t) = 18(1 - e^{-0,45t}).$$

On admet que cette voiture a une énergie de stockage limitée à 18 kWh.

Déterminer l'instant t_0, arrondi à la minute, à partir duquel la moitié de cette énergie de stockage limite a été emmagasinée.

Exercice 9

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x} - 6x + 5$.

Exercice 10

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^x \times e^{-4} = (e^x)^4$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(e^x + 1) \times (e^{2x} - 2) \geqslant 0$.

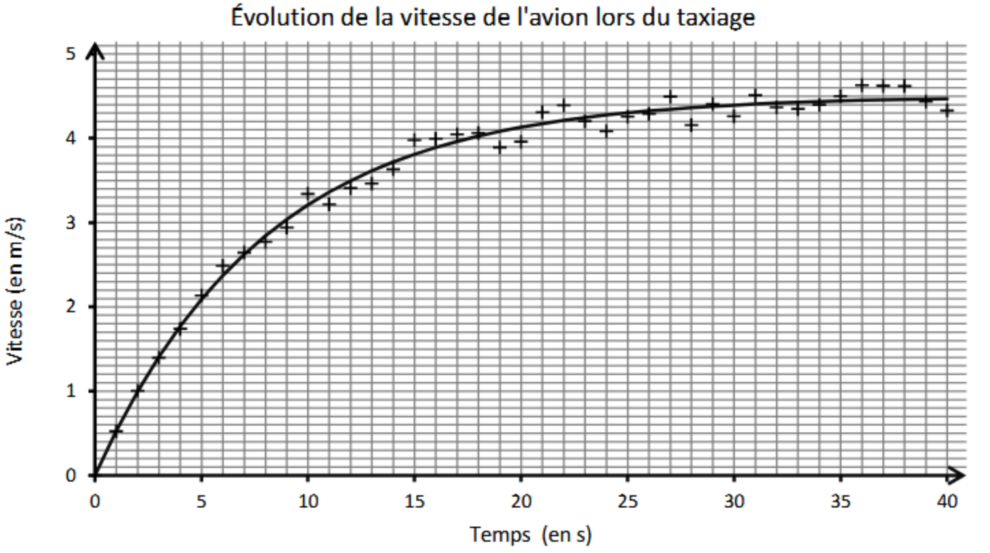
Exercice 11

Le taxiage est la période au cours de laquelle un avion se déplace au sol

La vitesse d'un avion est modélisée par $v(t) = A \cdot (1 - e^{-0,13 \cdot t})$

1. Calculer $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$

La représentation graphique de cette fonction est donnée sur le graphique ci-après. Elle modélise les valeurs expérimentales représentées par des croix sur ce graphique.



2. Conjecturer la valeur de A à l'aide du graphique.

La vitesse de l'avion, exprimée en m·s^{-1}, est modélisée par la fonction v définie sur $[0 ; +\infty[$ par $v(t) = 4{,}5 \times (1 - e^{-0{,}13t})$. On admet que v est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et on note v' la dérivée de v.

3. Montrer que $v'(t) = 0{,}585 \times e^{-0{,}13t}$. En déduire l'accélération initiale de l'avion.

Exercice 12

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = e^{x+1} + \dfrac{1}{x^2}$.

Déterminer les limites suivantes :

i. $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ ii. $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ iii. $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$

Exercice 13

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équation est inéquation suivantes :

a. $e^{x+1} = e^{2x-3}$

b. $e^{x+1} > 12.$

2. Donner la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = e^{x^2+1} + x^2.$

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $e^{2x} = e^{-3}$ b. $e^{x^2} = 4$ c. $e^{x^2} = 3e^{x} - 2$

Exercice 15

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4x+2) \cdot e^{2x}$

1. Déterminer les limites de f en +∞ et –∞.

2a. Calculer l'expression de la dérivée f ' de la fonction f

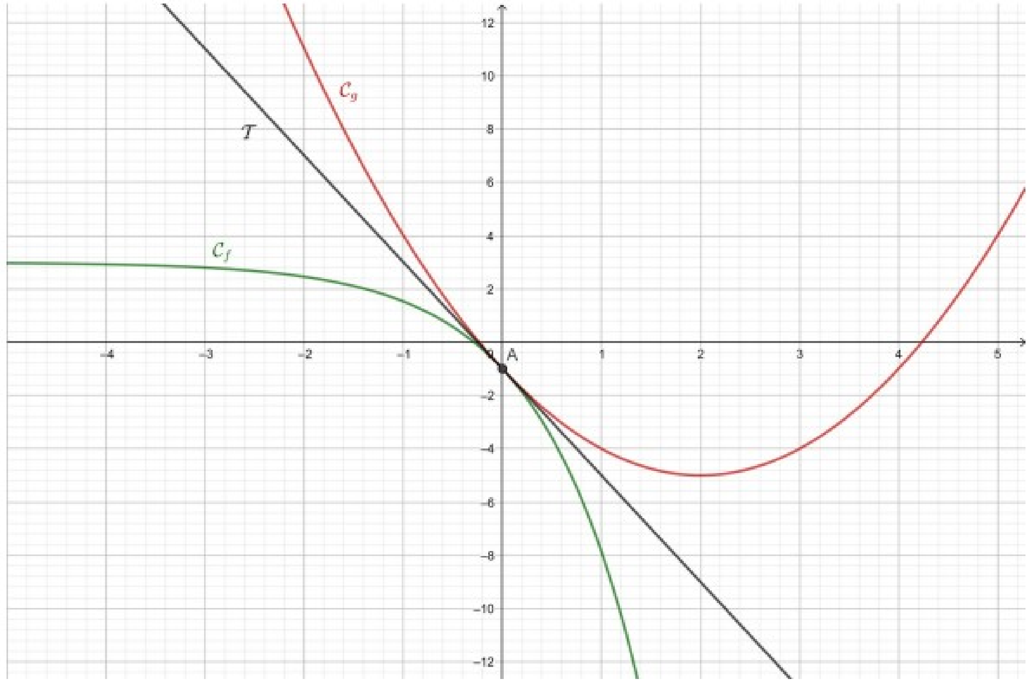
2b. Étudier le signe de f ' et construire le tableau de variations complet de la fonction f

Exercice 16

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a + b \cdot e^{x}$, où a et b sont deux nombres réels.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 4x - 1$

On note C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g, tracées dans le repère orthogonal ci-après



1. On admet que les deux courbes C_f et C_g ont un unique point en commun, noté A d'abscisse 0.

Calculer g (0), puis en déduire que a + b = −1.

2. On admet que les deux courbes Cf et Cg ont la même tangente T au point A.

a. Donner, pour tout réel x, une expression de g' (x) puis calculer g' (0).

b. En déduire la valeur de b, puis celle de a.

Exercice 17

1. Ecrire plus simplement l'expression suivante : $a(x) = \ln\sqrt{e} \times \dfrac{e^{4x}}{e^{6x}} \times \left(e^{3x}\right)^2 \times e^{-3x}$

2. Déterminer la fonction dérivée de $f(x) = e^{x^2+3x} + \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}-1}$

3. Calculer les limites suivantes : **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - 1 + \dfrac{e^{x}}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} 5 + xe^{-x}$