

Mathématiques – CCINP/E3A – DS₆

Les résultats doivent être justifiés et encadrés (ou soulignés).

Numérotez chaque page de votre devoir.

La calculatrice est interdite.

Exercice 1 : Série entière (E3A 2020 PC)

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+2}.$$

Q1. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_n \leq 1$.

Q2. On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Q3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$.

Q4. Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

Q5. On pose, lorsque cela est possible, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$, produit de Cauchy réel des deux série

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n \text{ et } \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}.$$

Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} w_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel n , une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n) .

Q6. En déduire que l'on a pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

Q7. Démontrer alors que pour tout $x \in [0, 1[$, $\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

Q8. En déduire, pour tout $x \in [0, 1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

On utilisera sans le redémontrer que l'on a : $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

Q9. Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Problème 1 : Théorème de Borel (CCINP 2019 PSI)

Objectifs

Dans la **partie I**, on considère deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et on s'interroge sur l'existence d'un développement en série entière dans un voisinage de 0 pour ces fonctions. Dans la **partie II**, indépendante de la **partie I**, on démontre le théorème de Borel en construisant, pour toute suite réelle $(b_p)_{p \in \mathbb{N}}$, une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait : $f^{(p)}(0) = b_p$.

Partie I – Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)} dt.$$

Q10. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_p = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt$.

Q11. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de Γ_p et déterminer une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p .

Q12. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de Γ_p .

Q13. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(x)$.

Q14. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geq 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$.

La fonction f est-elle développable en série entière en 0 ?

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k(1-ikx)}.$$

Q15. Montrer que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $g^{(p)}(x)$.

Q16. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $|g^{(p)}(0)| \geq p^{2p} e^{-p}$.

Q17. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geq 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p$.

La fonction g est-elle développable en série entière en 0 ?

Partie II – Le théorème de Borel

Q18. Déterminer deux nombres complexes a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x-i} + \frac{b}{x+i}.$$

Q19. On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) = \frac{1}{x-i}$.

Montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}.$$

Q20. Déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la dérivée p -ième de la fonction φ_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Q21. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}| \leq 2(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}}$.

En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\left| \varphi_1^{(p)}(x) \right| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

Q22. Pour tout réel α , notons φ_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{1 + \alpha^2 x^2}.$$

Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$|\alpha| \cdot \left| \varphi_\alpha^{(p)}(x) \right| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

On considère une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{a_n x^n}{1 + n! a_n^2 x^2}.$$

Q23. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\alpha_n = \sqrt{n!} a_n$. Montrer que pour tout entier $p \geq 0$, tout entier $n \geq p$ et tout réel x , on a :

$$u_n^{(p)}(x) = a_n \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x).$$

Q24. En déduire que pour tout entier $n \geq 0$ et tout entier $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a : $u_n^{(p)}(0) = 0$, et déterminer $u_n^{(n)}(0)$.

Q25. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, tout entier $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et tout réel x , on a :

$$\left| u_n^{(p)}(x) \right| \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n.$$

Q26. En déduire que la fonction $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est bien définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Q27. Montrer que $U(0) = a_0$ et que pour tout entier $p \geq 1$, on a : $U^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p! a_p$.

Q28. Dédurre de ce qui précède que pour toute suite réelle $(b_p)_{p \in \mathbb{N}}$, il existe une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait : $f^{(p)}(0) = b_p$.

Ce résultat est appelé théorème de Borel. Il a été démontré par Peano et Borel à la fin du XIX^e siècle.

Problème 2 : Étude de séries de pile ou de face (CCINP 2022 PC)

Présentation générale

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $1/2$ et face avec la probabilité $1/2$). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'évènement [le k -ième lancer de la pièce donne pile] et par F_k l'évènement [le k -ième lancer de la pièce donne face].

On appelle série une succession de lancers amenant le même côté de la pièce. La série n° 1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n° 2 commence au lancer suivant la fin de la série n° 1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.

Voici deux exemples pour illustrer la définition des séries donnée ci-dessus :

$$\textbf{Exemple 1 : } \underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{Série n° 1}} \cap \underbrace{F_3}_{\text{Série n° 2}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{Série n° 3}} \cap F_8 \cap \dots$$

$$\textbf{Exemple 2 : } \underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{\text{Série n° 1}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7 \cap P_8}_{\text{Série n° 2}} \cap \underbrace{\left(\bigcap_{k=9}^{+\infty} F_k \right)}_{\text{Série n° 3}}.$$

Partie I - Étude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la variable aléatoire L_1 de la manière suivante :

- si la série n° 1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si on obtient que des piles ou que des faces), on pose $L_1 = 0$;
- sinon, on désigne par L_1 la longueur de la série n° 1.

Ainsi, si l'évènement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_1 = 2$ tandis que si l'évènement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a $L_1 = 3$.

I.1 - Calcul de la somme d'une série entière

Q29. Rappeler (sans le démontrer) le rayon de convergence et la somme de la série entière :

$$\sum_{k \geq 0} x^k.$$

Q30. En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{k \geq 0} kx^k$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.

I.2 - Étude de L_1

Dans cette partie, on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

Q31. Exprimer l'évènement $(L_1 = k)$ en fonction des évènements P_i et F_i pour $i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$.

Q32. Montrer que $\mathbb{P}(L_1 = k) = 2^{-k}$.

Q33. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(L_1 = 0)$.

Q34. Démontrer que la variable aléatoire L_1 admet une espérance, puis déterminer sa valeur. Que représente ce nombre par rapport au problème étudié dans cet exercice ?

Partie II - Étude du nombre de séries

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'évènement de l'exemple 1 dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1, \quad N_3 = 2, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et} \quad N_8 = 4.$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 - Généralités

Q35. Déterminer les lois de N_1 et N_2 .

Q36. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

II.2 - Relation de récurrence pour la loi de N_n

Dans cette sous-partie, on détermine une relation de récurrence entre la loi de N_{n+1} et la loi de N_n .

Q37. Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Justifier que l'on a l'égalité d'évènements :

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1},$$

puis en déduire que :

$$\mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n).$$

Dans la suite, on admet que l'on a pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ les relations :

$$\mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}((N_n = k) \cap F_n),$$

$$\mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}((N_n = k-1) \cap P_n),$$

$$\mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}((N_n = k-1) \cap F_n).$$

Q38. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements :

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ la relation :

$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(N_n = k-1).$$

II.3 - Fonction génératrice, loi et espérance de N_n

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire N_m , dont on rappelle la définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_m(x) = \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(N_m = k) x^k.$$

En particulier, on déduit des résultats précédents (on ne demande pas de le vérifier) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_1(x) = x.$$

Q39. Dédire de **Q38.** que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} G_n(x).$$

Q40. Déterminer une expression explicite de $G_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Q41. Rappeler l'expression de l'espérance de N_n en fonction de sa fonction génératrice G_n . En déduire l'espérance de la variable aléatoire N_n .

Q42. Déterminer la loi de la variable aléatoire N_n à partir de l'expression de G_n .