

# Intégration sur un intervalle quelconque – TD<sub>2</sub>

## Intégrales convergentes et intégrabilité

### Exercice 1 :

Justifier que les intégrales suivantes existent et donner leurs valeurs.

1.  $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt.$

2.  $\int_0^{2\pi} \cos(t)^2 dt.$

3.  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$

4.  $\int_0^{\frac{1}{2}} \text{Arcsin}(t) dt.$

5.  $\int_1^e \frac{1}{t \times \sqrt{\ln(t)+1}} dt.$

6.  $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{3+\cos(t)^2} dt.$

7.  $\int_0^1 t^2 \times \sqrt{1-t^2} dt.$

8.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x)) dx.$

### Exercice 2 :

Déterminer la nature des intégrales suivantes et lorsqu'une intégrale converge, donner sa valeur :

1.  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+e^t) \times (1+e^{-t})} dt.$

2.  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt.$

3.  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} dx \quad (n \in \mathbb{Z}).$

4.  $\int_0^{+\infty} t^n \times e^{-t} dt \quad (n \in \mathbb{N}).$

5.  $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(x)}{1+x^2} dx$

6.  $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x \times (x+r)} dx \quad (a > 0, r > 0)$

7.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}} dx.$

8.  $\int_0^{+\infty} \cos(t) \times e^{-\lambda \times t} \quad (\lambda > 0).$

9.  $\int_0^{+\infty} \sin(t) \times e^{-\lambda \times t} \quad (\lambda > 0).$

10.  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt.$

### Exercice 3 :

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1.  $\int_1^{+\infty} (t-1) \times \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt.$

2.  $\int_1^{+\infty} \frac{t}{t^3+1} dt.$

3.  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$

4.  $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt.$

5.  $\int_0^{+\infty} \ln(t) \times e^{-t} dt.$

6.  $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} dt.$

7.  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{\frac{3}{2}}} dt.$

8.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a \times (t-1)^b} dt \quad ((a,b) \in \mathbb{R}^2).$

9.  $\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b} dt \quad ((a,b) \in \mathbb{R}^2).$

10.  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt.$

11.  $\int_0^1 \frac{1}{\sin(t)} dt.$

### Exercice 4 :

Soit  $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  fixé.

1. Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a \times t} - e^{-b \times t}}{t} dt$  converge (on ne demande pas de donner sa valeur). Dans la suite on note  $I$  sa valeur.

2. Déterminer les trois limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{a \times x}^{b \times x} \frac{e^{-t}-1}{t} dt$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{a \times x}^{b \times x} \frac{e^{-t}}{t} dt$  et  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_{a \times X}^{b \times X} \frac{e^{-t}}{t} dt$ .

3. En déduire la valeur de  $I$ .

**Exercice 5 :**

1. Montrer que la fonction  $x \mapsto \ln(\sin(x))$  est intégrable sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ .
2. On pose  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) \, dx$  et  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) \, dx$ .  
Montrer que  $I = J$ .
3. En déduire la valeur de  $I$ .

**Exercice 6 :**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} \, dt$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Justifier l'existence de  $I_n$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Exprimer  $I_{n+1}$  en fonction de  $n$  et de  $I_n$ .
3. En déduire la valeur de  $I_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 7 :**

1. Montrer que la fonction  $f : t \mapsto \frac{t-1}{t \times \ln(t)}$  est intégrable sur  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .
2. Montrer  $\int_x^{x^2} \frac{t-1}{t \times \ln(t)} \, dt \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0$ .
3. Montrer  $\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} \, dt \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \ln(2)$ .

**Exercice 8 :**

Soit  $F : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t-t^3}} \, dt$  la fonction définie sur  $]0, 1[$ .

Justifier que  $F$  est bien définie et déterminer la limite  $F$  en 0 et en 1.

**Exercice 9 :**

On considère la fonction  $F : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} \, dt$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $F$ .
2. Montrer que  $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\cos(x)}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ .
3. Montrer que la fonction  $g : t \mapsto \frac{\sin(t)-t}{t^2}$  est prolongeable par continuité sur  $[0, 1]$  et déterminer la limite de  $\int_x^1 \frac{\sin(t)}{t^2} \, dt + \ln(x)$  en 0.
4. En déduire un équivalent simple de  $F$  au voisinage de 0.

**Exercice 10 :**

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t) \times t^x} \, dt$ .
2. Calculer  $f(1)$ .
3. Montrer que, pour tout  $x > 0$ ,  $f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x}$ .
4. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
5. Donner un équivalent de  $f$  en  $+\infty$ .

**Exercice 11 :**

Soit  $I = \int_0^1 t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$ .

1. Trouver trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$ .
2. L'intégrale  $I$  converge-t-elle ?
3. Calculer  $I$ .

**Exercice 12 :**

Soit, pour  $n \geq 1$  :  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^4)^n}$ .

1. Démontrer l'existence de  $I_n$  et trouver sa limite quand  $n \rightarrow \infty$ <sup>1</sup>.
2. En posant  $u = \frac{1}{x}$ , montrer que  $I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4} du$ . Puis, en posant  $v = u - \frac{1}{u}$ , calculer  $I_1$ .
3. Calculer  $I_n$ .

## Intégrabilité (exercices théoriques)

**Exercice 13 :**

Soit  $f \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$  telle que  $f$  et  $f'$  sont intégrables sur  $[0, +\infty[$ .  
Montrer que  $f$  tend vers 0 en  $+\infty$ .

**Exercice 14 :**

Soit  $f \in \mathcal{C}_{pm}([0, +\infty[, \mathbb{R})$  une fonction décroissante.

1. On suppose que  $f$  est intégrable sur  $]0, 1]$ . Déterminer la limite de  $x \times f(x)$  quand  $x$  tend vers 0.
2. On suppose que  $f$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ . Déterminer la limite de  $x \times f(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 15 :**

Soit  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge et  $f$  possède une limite finie  $\ell$  en  $-\infty$ .  
Montrer que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+1) - f(t) dt$  converge et donner sa valeur.

## Changements de variable et intégrations par parties

**Exercice 16 :**

Soient  $p$  et  $q$  deux réels tels que  $p^2 < q$ . Calculer  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 2p \times t + q} dt$ .

**Exercice 17 :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $\int_0^1 (x \times \ln(x))^n dx$ .

**Exercice 18 :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $\int_0^{+\infty} x^n \times e^{-x} dx$ .

**Exercice 19 :**

Calculer  $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{(x+1)^2} dx$ .

1. À traiter après le cours sur les intégrales paramétrées.