

Analyse documentaire : Le sismomètre

Table des matières

1	Problématique	1
2	Fonction d'un sismomètre	1
3	Modélisation	2
3.1	Aspect temporel	2
3.2	Aspect fréquentiel : fonction de transfert	3
4	Choix des paramètres	4
5	Examen d'oscillogrammes tests	6
5.1	Caractéristiques de l'excitation $x(t)$	6
5.2	Réponse du sismomètre pour $\omega = 0,2\omega_0$	7
5.3	Réponse du sismomètre pour $\omega = \omega_0$	8
5.4	Réponse du sismomètre pour $\omega = 3\omega_0$	9
6	Bilan de cette étude et ouverture sur le traitement des signaux	9
7	Questions à traiter	10

1 Problématique

La surveillance des mouvements du sol dus à la sismicité sont importants, dans la mesure où ils permettent de détecter l'apparition de phénomènes dont les conséquences peuvent être tragiques (tremblements de terre, tsunamis...). La détection est parfois trop tardive pour permettre une alerte efficace, les enregistrements sont alors utilisés a posteriori pour mieux comprendre la nature de l'événement et tenter d'anticiper les prochains. L'appareil incontournable pour suivre les mouvements du sol est le sismomètre, on se propose ici d'en décrire le principe de fonctionnement comme illustration d'une application pratique de filtrage.

2 Fonction d'un sismomètre

Un sismomètre est un capteur qui permet la détection et l'enregistrement des mouvements, à une dimension, de la surface sur laquelle il repose. Comme on souhaite en général disposer de la mesure du mouvement à 2 ou 3 dimensions du sol, on place plusieurs sismomètres selon différents axes orthogonaux et on reconstitue, à partir de leurs enregistrements, le mouvement multidimensionnel effectif.

Remarque : Les sismomètres d'axe vertical ont une structure différente de celle des sismomètres sensibles aux mouvements horizontaux, cet aspect n'est pas détaillé ici.

La structure complète d'un sismomètre est complexe et les phénomènes mis en jeu dans son fonctionnement ne peuvent pas tous être décrits à ce stade. Faute d'éléments théoriques, nous nous contentons donc d'une description sommaire (Fig. 1). Un sismomètre est constitué d'un résonateur mécanique, à l'image de l'oscillateur constitué par un système masse-ressort ; l'excitation de cet oscillateur étant ici due aux mouvements du

sol. Les mouvements de la partie mobile engendrent un courant électrique dans un bobinage, ce qui a deux effets importants :

- amortir les oscillations mécaniques et éviter donc une prolongation excessive du mouvement après une excitation brève ;
- fournir un signal électrique qui peut être aisément amplifié, enregistré et transmis.

Remarque : L'aspect mécanique met en jeu des forces d'inertie qui ne relèvent pas de la partie Signal du programme. L'aspect électromécanique fait intervenir l'induction magnétique, présentée en fin de première année.

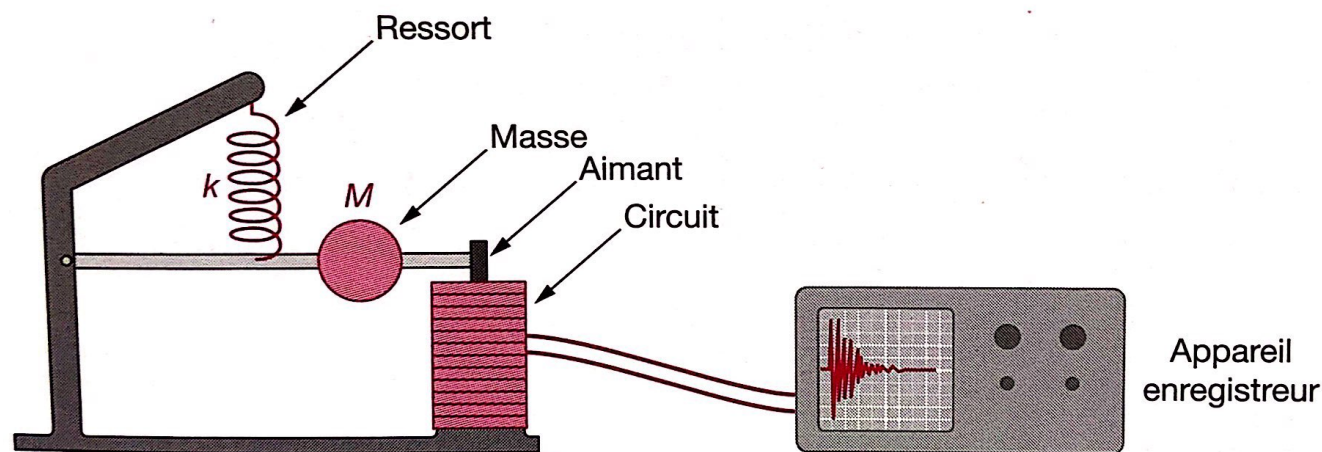


FIGURE 1 – Constitution du sismomètre

En résumé, la relation entre le mouvement de vibration du sol, décrit par une variable $x(t)$ fonction du temps et le signal électrique $s(t)$ récupéré en sortie traduit des phénomènes bien connus. Il est donc possible d'établir cette relation sous la forme d'une équation différentielle, c'est ce que l'on entreprend à présent.

3 Modélisation

Tous les phénomènes en jeu sont linéaires : l'équation différentielle est donc de type linéaire à coefficients constants, les valeurs de ceux-ci étant en effet liés aux différents paramètres du système (masse, constante de raideur...), qui ne varient pas dans le temps. **L'équation différentielle liant $x(t)$ à $s(t)$ est linéaire à coefficients constants : il s'agit d'une relation de filtrage.**

3.1 Aspect temporel

Le phénomène étant principalement dû à la mise en oscillation d'un ensemble mécanique, **l'équation qui le régit est du second ordre**. D'autre part, l'absence de vibration du sol, c'est-à-dire le cas où $x(t)$ ne varie pas, n'engendre aucune réponse du dispositif, **on peut donc exclure un comportement passe-bas**.

Remarque : On ne traite pas ici le cas des sismomètres asservis, dont certains types correspondent à des capteurs de position.

De la même manière, déplacer le sismomètre à vitesse constante n'engendre aucune détection : ce sont les accélérations qui provoquent une réponse. Dans le même ordre d'idée, un passager qui se déplace dans un train roulant à vitesse constante ne ressent aucun effet physiologique : cette propriété n'est autre que le principe

de relativité de Galilée.

Un sismomètre est un accéléromètre.

On en déduit que c'est la dérivée seconde du signal $x(t)$ qui sert d'excitation au système, ce qui se traduit par l'expression suivante :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s(t) = H_0 \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (1)$$

où ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur et ξ le coefficient d'amortissement sans dimension que l'on peut aussi exprimer en fonction du facteur de qualité Q :

$$\xi = \frac{1}{2Q} \quad (2)$$

Le coefficient sans dimension H_0 est sans grande importance, car il ne correspond qu'à un effet d'amplification.

Le traitement du signal reçu introduit de toute manière son propre gain : on adoptera dans la suite $H_0 = 1$, ce qui revient à effectuer une mise à l'échelle.

3.2 Aspect fréquentiel : fonction de transfert

Appliquant les principes relatifs au filtrage, on déduit de l'équation différentielle (1) la fonction de transfert et le diagramme de BODE (Fig. 2) correspondant qui a été tracé pour différentes valeurs de facteur de qualité

avec $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1 \text{ Hz}$.

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \cdot 2\xi \cdot \omega_0\omega} = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \cdot \frac{1}{Q} \cdot \omega_0\omega} \quad (3)$$

Le comportement du sismomètre est celui d'un filtre passe-haut du second ordre.

En posant $u = \frac{\omega}{\omega_0}$, l'étude de la fonction $H(u) = |\underline{H}| = \frac{u^2}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2}}$ permet de montrer qu'il

y a résonance seulement si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ et que la pulsation de résonance ω_r vaut alors :

$$\omega_r = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-2\xi^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}} \quad (4)$$

Si la résonance est aiguë (par exemple pour la courbe $Q = 10$), soit un amortissement faible tel que

$Q \gg 1 \Leftrightarrow \xi \ll 1$, alors $\omega_r \approx \omega_0$ et on obtient : $\underline{H}(j\omega_r) \approx \underline{H}(j\omega_0) = jQ$

On peut remarquer que plus Q diminue (plus ξ augmente), plus ω_r augmente (par exemple pour les courbes $Q = 4$ et $Q = 2$) et qu'il n'y a plus de résonance pour $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \xi \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ (par exemple pour les courbes $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $Q = 0.1$).

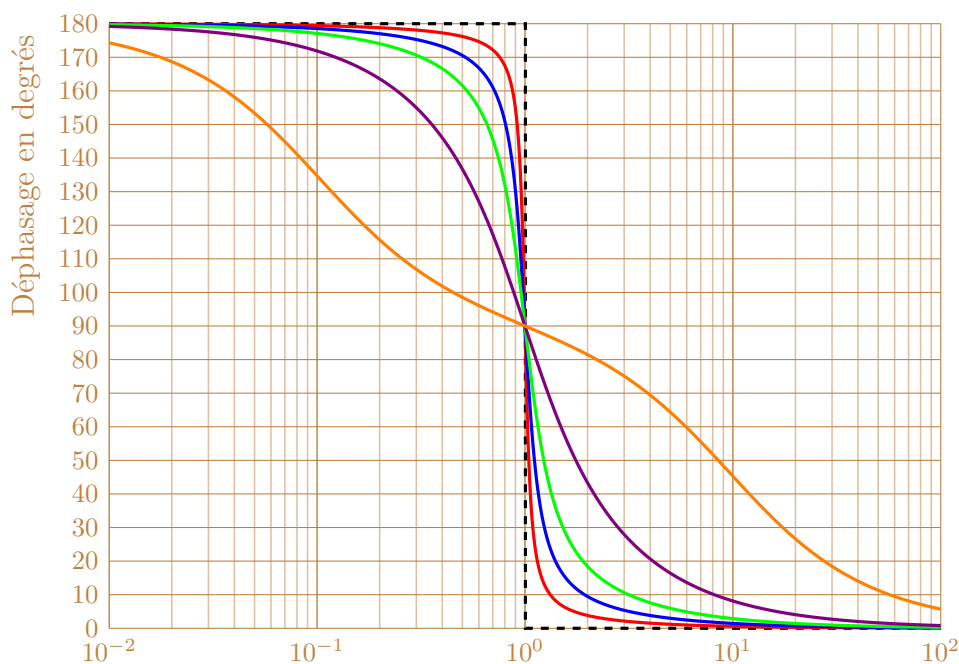
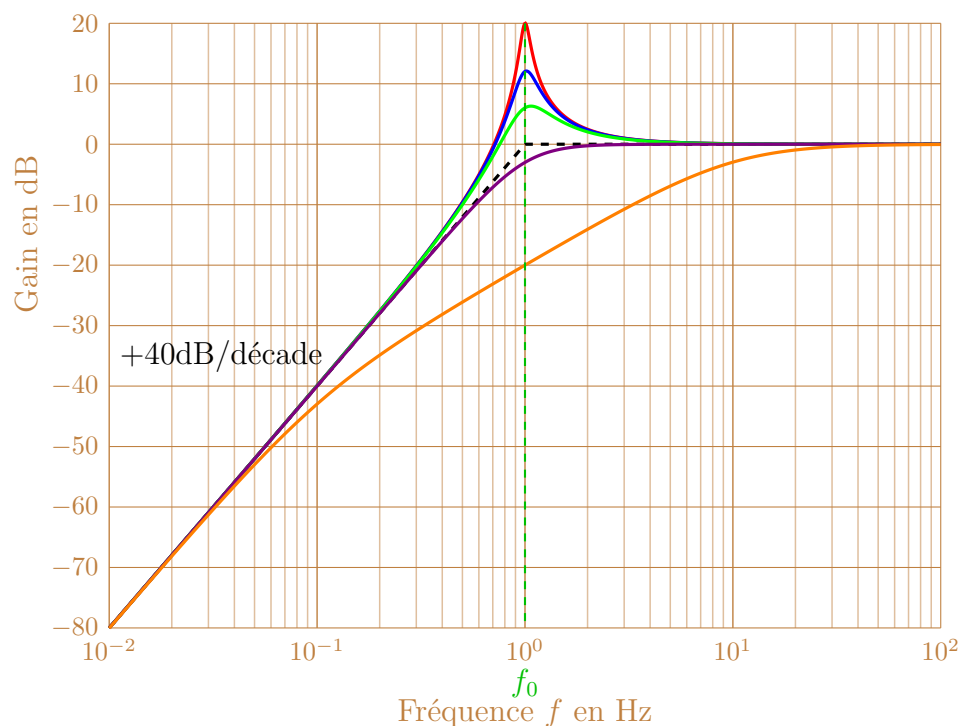


FIGURE 2 – Diagramme de BODE d'un filtre passe-haut d'ordre 2

4 Choix des paramètres

Le concepteur du sismomètre doit définir les valeurs à donner aux deux paramètres ω_0 et Q . Il adopte alors deux critères liés au domaine d'application :

- la bande passante doit correspondre à la gamme de fréquence des vibrations sismiques à détecter. En

corollaire, les perturbations d'un autre type doivent si possible être éliminées par filtrage ;

- le comportement du sismographe ne doit pas privilégier de fréquence : il ne doit donc pas y avoir de résonance.

Le second critère fixe la valeur du facteur de qualité : on adopte en pratique un **amortissement optimal** qui correspond à :

$$\xi_{\text{opt}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad Q_{\text{opt}} = \frac{1}{2\xi_{\text{opt}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Pour ce qui concerne la bande passante, le sismologue doit tenir compte de l'environnement qui est le sien. Les constructeurs proposent de ce fait une large gamme de sismomètres, dont les propriétés caractéristiques varient sensiblement.

En vue d'illustrer la démarche, on raisonne ici sur un exemple : la surveillance sismique d'un site nucléaire situé en bord de mer. La catastrophe de Fukushima a montré combien les catastrophes géophysiques pouvaient avoir des conséquences redoutables lorsqu'elles affectaient des sites hébergeant des centrales nucléaires.

Diverses causes vont contribuer à mettre en oscillations le sol et vont de ce fait intervenir dans le fonctionnement des sismomètres. Certaines sont des parasites que le concepteur souhaite ne pas détecter, d'autres sont vues comme signal porteur d'information utile. Chacune doit donc être définie par ses propriétés spectrales, afin de permettre un choix judicieux de la bande passante du capteur. Citons quelques-unes de ces causes, sans prétendre toutefois à l'exhaustivité :

- les phénomènes de marée, dus à l'attraction de la Lune et du Soleil, interviennent de manière périodique (une demi-journée ou une journée selon la localisation à la surface du globe) ;
- la houle, qui est un train régulier de vagues formées au large, est également un phénomène périodique auquel vont être sensibles les sismomètres verticaux. En effet, bien que n'existant qu'à la surface de l'eau, ces vagues exercent une action par gravité sur le fond marin ; les sismomètres ultrasensibles détectent alors une oscillation dont la périodicité va de quelques secondes à quelques dizaines de secondes ;
- d'autres phénomènes périodiques plus insolites se révèlent dans ces expériences de sismologie extrêmement sensible : citons pêle-mêle l'oscillation propre de la Terre, d'une période de 53 minutes et l'oscillation propre de certaines baies ou lacs fermés (mouvements de seiches) de quelques dizaines de minutes de période ;
- à proximité d'une installation industrielle, les perturbations liées aux activités humaines interviennent de manière importante, qu'il s'agisse de la circulation de véhicules, de travaux de terrassement lors de constructions. Ces causes ont un spectre étendu, de caractéristiques variables, ce qui rend parfois délicate leur identification. Plus simplement, dans le cadre du fonctionnement d'une centrale électrique, la rotation des alternateurs (machines convertissant l'énergie mécanique en énergie électrique) s'effectue à vitesse constante. À raison de 3 000 tours par minute par exemple, une fréquence de 50 Hz apparaît, que vont détecter les dispositifs très sensibles situés à proximité.

Un diagramme spectral permet de situer quelques-uns des domaines fréquentiels liés à ces diverses causes (Fig. 3).

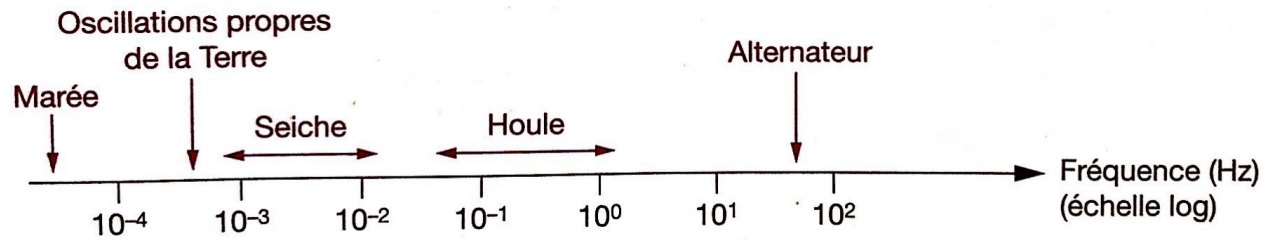


FIGURE 3 – Constitution du sismomètre

La surveillance sismique est bien entendu réalisée par la détection de vibrations éventuelles du sol, qui relèvent de la sismologie proprement dite. L'étude géophysique définit diverses ondes se propageant soit à la surface du sol, soit dans le volume de la croûte terrestre. Certaines engendrent des vibrations verticales, d'autres horizontales. Selon le modèle approprié, le sismologue peut définir dans quel intervalle spectral se situe l'information utile, il définit alors la bande passante des sismomètres à utiliser. Le diagramme de la figure 3 le renseigne sur les causes parasites qui vont entacher la mesure d'un bruit : il restera à discriminer signal et parasite.

Dans le cas où les sismomètres ont une période caractéristique de l'ordre de la seconde, c'est-à-dire que la fréquence de coupure f_c est de l'ordre du hertz, on conçoit que la houle va être détectée par le capteur, de même que l'oscillation à 50 Hz des machines. En revanche, il est probable que les phénomènes de marées ou l'oscillation propre de la Terre pourront être facilement éliminés.

Remarque : Le comportement envisagé ici est celui d'un filtre passe-haut, comme justifié ci-dessus.

5 Examen d'oscillogrammes tests

5.1 Caractéristiques de l'excitation $x(t)$

On poursuit l'étude par l'examen d'un oscillogramme correspondant à un signal test usuel dans le domaine de la sismologie : le train d'onde. Le signal $x(t)$ correspondant possède les caractéristiques suivantes :

- il est nul aux instants négatifs ;
- puis oscille à la pulsation $\omega = 2\pi f$ à partir de $t = 0$.

Pour éviter une discontinuité en $t = 0$, peu réaliste dans le cadre de phénomènes sismiques, on adopte au final l'expression :

$$x(t) = X_m \sin(\omega t)$$

Nous allons comparer dans la suite de ce paragraphe les réponses simulées pour $Q_{\text{opt}} = \frac{1}{2\xi_{\text{opt}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et différentes pulsations d'excitation, on a choisi arbitrairement pour cela $X_m = 1 \text{ cm}$.

5.2 Réponse du sismomètre pour $\omega = 0,2\omega_0$

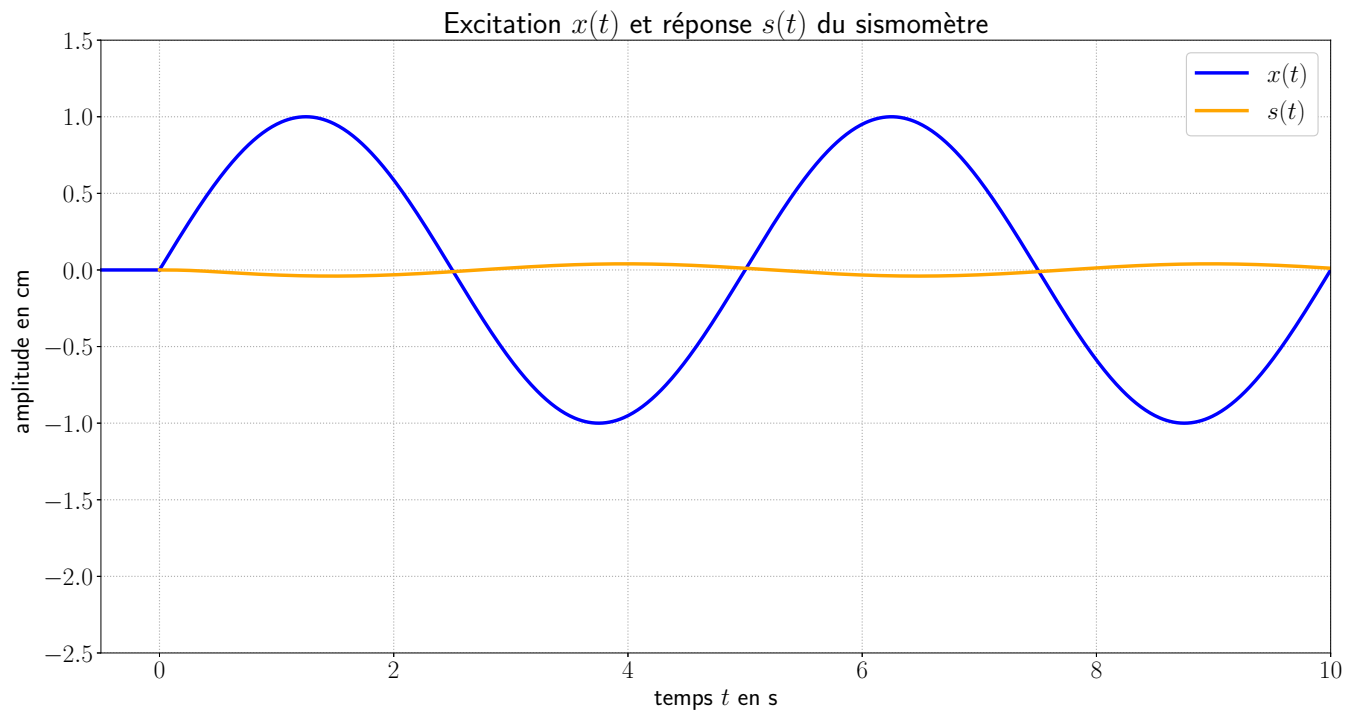


FIGURE 4 – Cas où $\omega = 0,2\omega_0$

La réponse présente une amplitude très faible : le signal est en dehors de la bande passante.

5.3 Réponse du sismomètre pour $\omega = \omega_0$

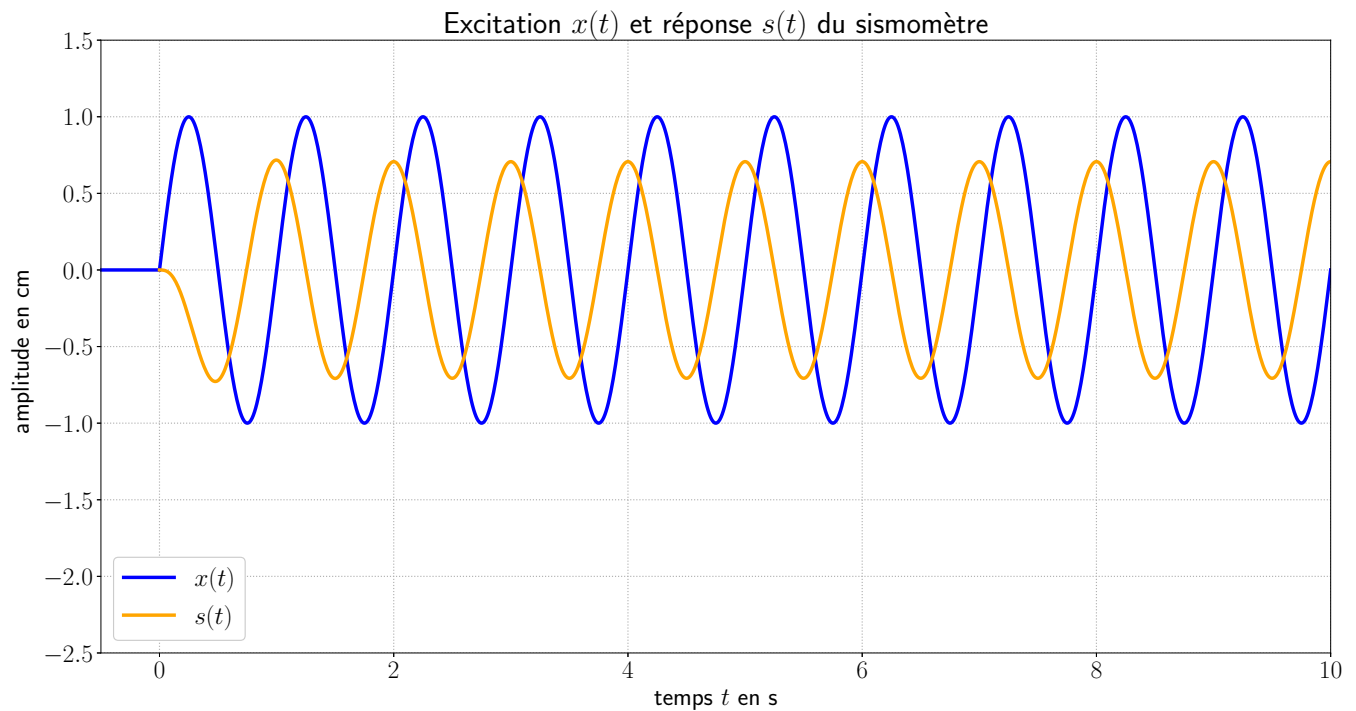


FIGURE 5 – Cas où $\omega = \omega_0$

On constate qu'après un bref régime transitoire, le signal de sortie oscille avec la même pulsation que l'excitation, mais en quadrature avance de phase. Cette propriété est bien conforme aux prévisions, car la fonction de transfert est alors imaginaire : $\underline{H}(j\omega_0) = jQ_{\text{opt}} = \frac{j}{\sqrt{2}}$.

Remarque : La tangente à l'origine de la réponse est horizontale, ce qui confirme le second ordre de la fonction de transfert.

5.4 Réponse du sismomètre pour $\omega = 3\omega_0$

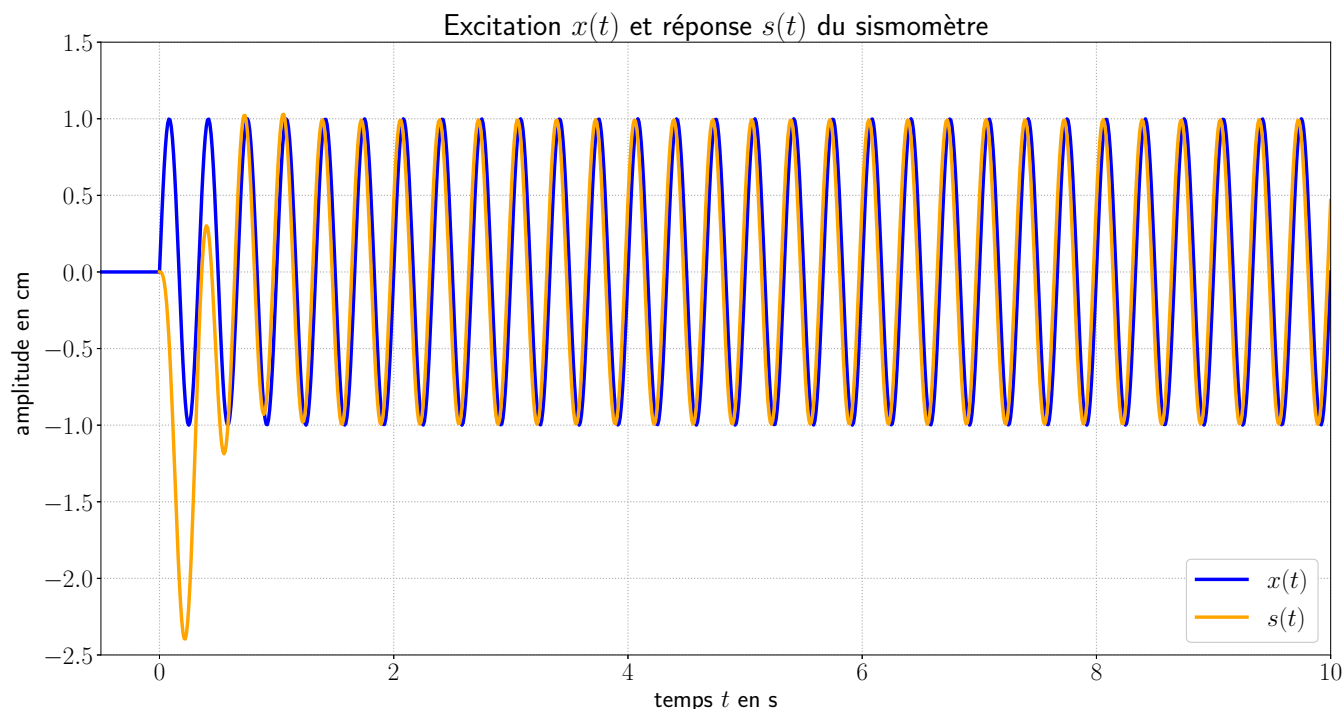


FIGURE 6 – Cas où $\omega = 3\omega_0$

La fréquence d'excitation est dans la bande passante : en effet, après amortissement du régime transitoire, le signal reflète quasi fidèlement l'oscillation d'excitation. Le très léger déphasage tient à ce que ω n'est pas très supérieur à ω_0 : le rapport 3 est choisi sciemment, de manière à pouvoir distinguer les deux tracés. On note par ailleurs que, du fait du caractère passe-haut, le système réagit fortement à l'apparition de la première oscillation : le début de la réponse est excessif, puis l'amortissement dû au choix du facteur d'amortissement $\xi_{\text{opt}} \approx 0,7$ permet d'atteindre le régime établi, d'amplitude appropriée.

6 Bilan de cette étude et ouverture sur le traitement des signaux

En conclusion de cette étude, on constate que les connaissances acquises dans le domaine du filtrage permettent, devant un problème inconnu a priori :

- d'établir la forme de l'équation entrée-sortie ;
- d'en dégager les propriétés essentielles en vue de fixer les paramètres pertinents ;
- d'interpréter des oscillogrammes correspondant à des signaux tests usuels.

L'étude simple conduite ici n'est qu'une première approche : exploiter les enregistrements expérimentaux fait l'objet de théories évoluées, relevant du traitement du signal. Sans entrer dans le détail, on conçoit aisément que le problème qui consiste à déterminer le signal d'entrée, à partir de la connaissance du signal de sortie donné par un capteur connu, est mathématiquement un problème soluble. On parle de problème inverse, par opposition au problème direct qui consiste à déterminer la sortie en connaissant l'entrée.

Les outils théoriques utiles dans la résolution de problèmes inverses sont déjà nombreux, mais des progrès sont encore accomplis aujourd'hui, tant le champ d'investigation est vaste. Dès lors que l'on veut s'affranchir des perturbations aléatoires, des aspects non linéaires du capteur... la complexité théorique croît rapidement. On ne peut qu'inciter les étudiants-lecteurs qui aiment les problèmes riches, mêlant mathématiques, physique et informatique, à se lancer dans des études de théorie et traitement de signal, qui leur ouvriront de très nombreuses perspectives !

7 Questions à traiter

7.1 Retrouver l'expression de la fonction de transfert (3) en partant de l'équation différentielle (1) liant $x(t)$ à $s(t)$.

7.2 Pourquoi doit-on éviter d'avoir un phénomène de résonance ? A partir de la formule (4), expliquer pourquoi ω_r augmente quand ξ augmente, tant que $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

7.3 Compte-tenu du facteur d'amortissement optimal choisi, montrer que la pulsation du coupure à -3 dB, notée ω_c , est telle que $\omega_c = \omega_0$.

7.4 Pour un sismomètre de fréquence de coupure $f_c = f_0 = 10$ Hz, quels sont les phénomènes physiques capables de parasiter le sismomètre ?

7.5 Retrouver, en justifiant, l'expression de toutes les asymptotes tracées en pointillés sur le diagramme de BODE (Fig. 2).

7.6 Pour $f = 0,2 f_0$, le diagramme de BODE (Fig. 2) est-il en accord avec les courbes de la figure 4 ? Le signal $s(t)$ est-il en avance ou en retard par rapport à $x(t)$?

7.7 Pour $f = f_0$, le diagramme de BODE (Fig. 2) est-il en accord avec les courbes de la figure 5 ? Le signal $s(t)$ est-il en avance ou en retard par rapport à $x(t)$?

7.8 Pour $f = 3f_0$, le diagramme de BODE (Fig. 2) est-il en accord avec les courbes de la figure 6 ? Le signal $s(t)$ est-il en avance ou en retard par rapport à $x(t)$?