

Chapitre 6

Comparaison des fonctions au voisinage d'un point-Développements limités

Sommaire

6.1 Négligeabilité	120
6.1.1 Définition	120
6.1.2 Caractérisation	120
6.1.3 Règles de calcul	121
6.1.4 Croissances comparées	121
6.2 Equivalence	122
6.2.1 Définition	122
6.2.2 Caractérisation	122
6.2.3 Règles de calcul	123
6.2.4 Exemples de référence	124
6.3 Développements limités	125
6.3.1 Définition du développement limité à l'ordre n au voisinage d'un point	125
6.3.2 Cas $n = 0$	125
6.3.3 Cas $n = 1$: Développement limité d'ordre 1	126
6.3.4 Définition du développement limité à l'ordre 2 au voisinage d'un point	127
6.3.5 Formules de Taylor Young	127
6.3.6 Utilisation des DL	128
6.3.7 Opérations sur les DL	129
6.3.8 Etude local au voisinage de x_0 d'une fonction f	129

Ce chapitre fait suite au chapitre sur les limites de fonctions vues en première année. Nous avons vu combien il était parfois difficile ou long de calculer une limite. L'objet de ce chapitre est donc de donner de nouveaux outils pour améliorer la vitesse de vos calculs.

Les notions définies ici sont analogues aux définitions correspondantes pour les suites.

Dans tout ce chapitre, toutes les définitions et les études menées seront toujours réalisées au voisinage d'un point : il conviendra toujours de faire très attention à bien savoir en quel point on se situe, et à ne pas utiliser une propriété en 0 pour répondre à une question en $+\infty$ par exemple.

Compétences attendues. $\Leftrightarrow$ Savoir montrer qu'une fonction est négligeable devant une autre.
 $\Leftrightarrow$ Savoir trouver un équivalent à l'aide des opérations usuelles ou des équivalents classiques.
 $\Leftrightarrow$ Connaître les développements limités usuels
 $\Leftrightarrow$ Savoir calculer un développement limité.

- ⇒ Utiliser les développements limités pour trouver un équivalent ou une limite.
- ⇒ Utiliser les développements limités pour obtenir l'équation d'une tangente.
- ⇒ Utiliser les développements limités pour obtenir l'équation d'une asymptote.

Brook Taylor est un homme de science anglais, né à Edmonton, aujourd'hui un quartier de Londres, le 18 août 1685, et mort à Londres le 29 décembre 1731. Principalement connu comme mathématicien, il s'intéressa aussi à la musique, à la peinture et à la religion. En 1712, il fut admis à la Royal Society et il fit partie d'un comité pour départager Newton et Leibniz.

Taylor fit de nombreux séjours en France. Taylor correspondit avec Abraham de Moivre sur les probabilités.

Il ajouta aux mathématiques une nouvelle branche appelée « calcul de différences finies », inventa l'intégration par parties, et découvrit les séries appelées « développements de Taylor ». En plus de Taylor, James Gregory, Newton, Leibniz, Johann Bernoulli et de Moivre ont découvert indépendamment une variante du théorème qui porte aujourd'hui le nom de Taylor. Lagrange y vit le principe de base du calcul différentiel. Il remarqua que la formule de Taylor pouvait être arrêtée à l'ordre n en introduisant un terme dépendant de la dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$, il introduisit ainsi les développements limités.

Dans la suite, on supposera que les fonctions sont définies sur un intervalle I sauf peut-être en un point x_0 de I et continues. Ce point x_0 pourra désigner également $+\infty$ ou $-\infty$.

6.1 Négligeabilité

6.1.1 Définition

Définition 6.1 (Négligeabilité).

Soient f et g deux fonctions définies sur I et x_0 un point ou une borne de I .

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 et on écrit $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x))$

ou $f(x) = o(g(x))$, s'il existe une fonction ϵ définie au voisinage de x_0 , de limite 0 en x_0 telle que :

$$\forall x \in \text{voisinage de } x_0, f(x) = \epsilon(x)g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0.$$

Remarque.

La relation $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x))$ signifie que f appartient à l'ensemble des fonctions négligeables devant g au voisinage de x_0 .

Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x))$ et si $g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(h(x))$, il ne faut pas conclure que $f = h$!!! Et cela même au voisinage de x_0 !

6.1.2 Caractérisation

Théorème 6.1 (Caractérisation).

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 et on écrit $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x))$ ou $f(x) = o(g(x))$ si :

$$g(x) \neq 0 \text{ dans un voisinage de } x_0 \text{ (sauf peut-être en } x_0) \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Exemples 6.1.

A retenir :

- Au voisinage de 0 : $x^2 = o(x)$ car $\frac{x^2}{x} = x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Plus généralement, si $n > p$, entiers naturels alors $x^n = o(x^p)$.

- Au voisinage de $\pm\infty$: $x = o(x^2)$ car $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$.

Plus généralement, si $n > p$ alors $x^p = o(x^n)$.

EXERCICE 6.1.

1. Soient $f(x) = x^2 - 3x + 2$ et $g(x) = x^3$, montrer que $f(x) = o(g(x))$.
2. Montrer que $e^{-\sqrt{x}} = o(\frac{1}{x^2})$.

6.1.3 Règles de calcul

Propriété 6.2 ([Premières règles de calcul](#)).

- $f(x) = o(1)$ ssi $f(x) \rightarrow 0$.
- Si $f(x) = o(g(x))$ et $g(x) = o(h(x))$ alors $f(x) = o(h(x))$ (transitivité)
- Soient α, β deux réels et si $f_1(x) = o(g(x))$ et $f_2(x) = o(g(x))$, alors $\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = o(g(x))$ (combinaisons linéaires)
- Si $f_1(x) = o(g_1(x))$ et $f_2(x) = o(g_2(x))$, alors $f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x))$ (produit)
- Si $f(x) = o(g(x))$ alors $|f(x)| = o(|g(x)|)$ (valeur absolue)
- Si $f = o(g(x))$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = b$

6.1.4 Croissances comparées

Propriétés 6.3 ([de référence : croissances comparées](#)).

1. En $+\infty$

- $\ln(x) = o(x)$ car $\frac{\ln(x)}{x} \rightarrow 0$.
Plus généralement, $\forall \alpha > 0$ $\ln(x) = o(x^\alpha)$.
- $\forall \beta > \alpha > 0$, $x^\alpha = o(x^\beta)$.
- $x = o(e^x)$ car $\frac{x}{e^x} \rightarrow 0$.
Plus généralement, $\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0$, $x^\alpha = o(e^{\beta x})$

2. En 0

- $\ln(x) = o(\frac{1}{x})$ car $\frac{\ln(x)}{1/x} = x \ln x \rightarrow 0$. Plus généralement, $\forall \alpha > 0$, $\ln(x) = o(\frac{1}{x^\alpha})$.

EXERCICE 6.2.

1. Comparer $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \ln(x)$ au voisinage de $+\infty$.
2. Comparer $f(x) = x^3$ et $g(x) = e^x$ au voisinage de $+\infty$.
3. Comparer $f(x) = (\ln(x))^3$ et $g(x) = x^{1/4}$ au voisinage de $+\infty$.
4. Comparer $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x^{-3/2}$ au voisinage de 0.
5. Comparer $f(x) = x^4 - x^2 + 2$ et $g(x) = e^{x+1}$ au voisinage de $+\infty$.
6. Montrer que $x^{3/2} = o(e^{x^2})$ au voisinage de $+\infty$.

6.2 Equivalence**6.2.1 Définition****Définition 6.2** ([🔗 Equivalence](#)).

Soient f et g deux fonctions définies sur I et x_0 un point ou une borne de I .

On dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0 et on écrit $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$

ou $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$, s'il existe une fonction ϵ définie au voisinage de x_0 , de limite 0 en x_0 telle que :

$$\forall x \in \text{voisinage de } x_0, f(x) = (1 + \epsilon(x))g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0.$$
6.2.2 Caractérisation**Théorème 6.4** ([🔗 Caractérisation](#)).

Soient f, g deux fonctions définies sur I sauf peut-être en x_0 .

On dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0 et on écrit $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ ou $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ si :

$$g(x) \neq 0 \text{ dans un voisinage de } x_0 \text{ (sauf peut-être en } x_0) \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Théorème 6.5.

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \Leftrightarrow f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} g(x) + o(g(x))$$

"Pour trouver un équivalent, on commence par supprimer les termes qui sont négligeables devant les autres".

Exemple 6.2.

$x^2 + x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ car $x^2 = o(x)$. Ce que l'on peut vérifier avec la caractérisation : $\frac{x^2 + x}{x} = x + 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

$$\frac{x^2 + 1}{x^5} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^3} \quad \text{car} \quad \frac{\frac{x^2 + 1}{x^5}}{\frac{1}{x^3}} = \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1. \text{ De même en } -\infty.$$

(Pour "deviner" l'équivalent : $1 = o(x^2)$ en $+\infty$ d'où $x^2 + 1 \sim x^2$ et par quotient $\frac{x^2 + 1}{x^5} \sim \frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3}$)...

$$\frac{x^2 + 1}{x^5} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^5} \quad \text{car} \quad \frac{\frac{x^2 + 1}{x^5}}{\frac{1}{x^5}} = x^2 + 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

Propriété 6.6 (🔗 Règle).

Un polynôme en x est équivalent en $\pm\infty$ à son monôme de plus haut degré, puisque tous les autres termes sont négligeables par rapport à lui.

Remarque. Attention, c'est le contraire en 0 Il est équivalent à son monôme de plus bas degré!

Exemple 6.3.

$$7x^{13} - 50000x^{10} + 10^{10} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 7x^{13} \quad \text{car} \quad \frac{7x^{13} + 50000x^{10} + 10^{10}}{7x^{13}} = 1 + \frac{50000}{7}x^{-10} + \frac{10^{10}}{7}x^{-13} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

$$5x^5 - 10x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -10x^2 \quad \text{car} \quad \frac{5x^5 - 10x^2}{-10x^2} = \frac{-1}{2}x^3 + 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

6.2.3 Règles de calcul**Propriété 6.7** (🔗 Premières règles de calcul).

Soient $f, g, h, f_1, f_2, g_1, g_2$ des fonctions définies au voisinage de x_0 .

- Soit l un nombre **non-nul**. Alors $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} l$ ssi $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$
- $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f(x)$
- Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ alors $g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f(x)$ (symétrie)
- Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} h(x)$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} h(x)$ (transitivité)
- Si $f_1(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_1(x)$ et si $f_2(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_2(x)$ alors $f_1(x)f_2(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_1(x)g_2(x)$ (produit)
- Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ et si $g(x)$ et $f(x) \neq 0$ au voisinage de x_0 alors $\frac{1}{f(x)} \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \frac{1}{g(x)}$ (inverse)
- Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, (f(x))^n \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} (g(x))^n$ (puissance)
- Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ alors $|f(x)| \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} |g(x)|$.

Attention : la somme et la composition ne préservent pas l'équivalence, contrairement au produit ou quotient.

Exemple 6.4. 1. $f_1(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_2(x) \not\Rightarrow f_1(x) + f_2(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_1(x) + g_2(x)$.

Contre-Exemple : $\begin{cases} x^2 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 \\ -x^2 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x^2 \end{cases} \text{ mais } (x^2 + x) + (-x^2 + x) = 2x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 0 = (x^2) + (-x^2).$

2. $f_1(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f_2(x) \not\Rightarrow \phi \circ f_1(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \phi \circ f_2(x)$.

Contre-Exemple :

$$x^2 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 \text{ mais } e^{x^2+x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\not\sim} e^{x^2} \text{ car } \frac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}} = e^{x^2+x-x^2} = e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \neq 1$$

Remarques.

1. Attention à ne pas écrire que $f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} 0$!

2. Quand on donne un équivalent, on écrit qu'un seul terme! Ce n'est pas faux d'écrire :

$$e^x + x^3 + x^2 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x + x^3 \text{ mais c'est bête! on a aussi :}$$

$$e^x + x^3 + x^2 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x + 26x^{54}!$$

$$\text{Il faut écrire : } e^x + x^3 + x^2 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x.$$

Théorème 6.8.

Soient f et g deux fonctions équivalentes en x_0 . Alors f possède une limite en x_0 ssi g possède une limite en x_0 et dans ce cas, les limites sont les mêmes.

La recherche d'équivalents est donc un moyen pour déterminer une limite.

EXERCICE 6.3.

Trouver la limite en $-\infty$ de $\frac{x^2+1}{x^5}$ qui est une F.I. du type $\frac{\infty}{\infty}$.

On a vu précédemment que $\frac{x^2+1}{x^5} \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$ et on sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$; d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x^5} = 0$.

On aurait également pu trouver cette limite sans passer par les équivalents, mais en **factorisant** :

$$\frac{x^2+1}{x^5} = \frac{x^2(1+1/x^2)}{x^5} = \frac{1+1/x^2}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0.$$

6.2.4 Exemples de référence**Théorème 6.9** (🔗 Exemples de référence).

- $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$.

En particulier, avec $\alpha = 1/2$, $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x$

EXERCICE 6.4. • Trouver la limite en 0 de $\frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$.

On a $\frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

- Trouver la limite en $+\infty$ de $\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}e^{1/x}} - 1}{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}$.

$$\frac{1}{x^2}e^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \text{ donc } \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}e^{1/x}} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{1}{x^2}e^{1/x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}.$$

Puis $\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ d'où

$$\ln(1 + \frac{1}{x^2}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

Finalement, $\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}e^{1/x}} - 1}{\ln(1 + \frac{1}{x^2})} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1/(2x^2)}{1/x^2} = \frac{1}{2}$

d'où $\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}e^{1/x}} - 1}{\ln(1 + \frac{1}{x^2})} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$

6.3 Développements limités

6.3.1 Définition du développement limité à l'ordre n au voisinage d'un point

Définition 6.3 (Développement limité à l'ordre n au voisinage d'un point).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit x_0 un point de I .

On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 (noté $DL_n(x_0)$) :

- s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ et
- une fonction ϵ définie sur I qui vérifie $\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0$ tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

Ou autre notation de LANDAU :

$$\forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Le polynôme $a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$ s'appelle la partie régulière (ou partie principale) du développement limité.

Le " $o((x - x_0)^n)$ " s'appelle le reste du DL.

Exemple 6.5.

La fonction nulle sur un intervalle I , admet un DL en tout point de I : $f(x) = o((x - x_0)^n)$.

Remarques.

- La fonction f est nécessairement définie au voisinage de x_0 mais pas nécessairement en x_0 !
- On prouve aisément qu'un développement limité, s'il existe, est unique, c'est-à-dire que si f s'écrit à la fois $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon_1(x)$ et $f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon_2(x)$ alors pour chaque k on a $a_k = b_k$.
- Un DL est une égalité. Mais ce n'est qu'une égalité locale ! Uniquement valable que si l'on est dans un voisinage de x_0 .
- On va se limiter à donner des développements limités à l'ordre 2 ou 1.
- Si f admet un $DL_n(x_0)$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe et est égale à a_0 .
Ce critère sert généralement à démontrer qu'une fonction n'admet pas de DL.
La fonction $x \rightarrow \ln(x)$ n'admet pas de DL en 0, car $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$.
- Le DL à l'ordre n en 0 d'un polynôme $P(x)$ de degré n est lui même !

6.3.2 Cas $n = 0$

Dire que f admet un développement limité à l'ordre 0 en x_0 signifie qu'il existe a_0 et une fonction ϵ telles que f s'écrit : $f(x) = a_0 + \epsilon(x) = a_0 + o(x - x_0)$,

avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0$.

Ce qui signifie que f admet pour limite a_0 en x_0 , ou encore que f est continue en x_0 .

La réciproque est claire, et on a donc :

Propriété 6.10 (DL et continuité).

f admet un développement limité à l'ordre 0 en x_0 si et seulement si f est continue en x_0 .

6.3.3 Cas $n = 1$: Développement limité d'ordre 1

Définition 6.4 (DL ordre 1).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit x_0 un point de I .

On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 (noté $DL_1(x_0)$) :

- s'il existe deux réels a_0, a_1 et
- une fonction ϵ définie sur I qui vérifie $\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0$ tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x)$$

Ou autre notation de LANDAU :

$$\forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o((x - x_0)).$$

Le polynôme $a_0 + a_1(x - x_0)$ s'appelle la partie régulière (ou partie principale) du développement limité.

Le " $o((x - x_0))$ " s'appelle le reste du DL.

Remarque. Dire que f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 signifie qu'il existe deux réels a_0, a_1 et une fonction ϵ telles que f s'écrit : $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o((x - x_0))$, avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0$. On a $a_0 = f(x_0)$ d'après la proposition précédente 6.10.

Donc
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = a_1 + \epsilon(x).$$

Or comme $\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0$, ceci entraîne que f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) = a_1$.

Réciproquement, si f est dérivable en x_0 , alors on a : $\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = f'(x_0) + \epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0$.

Ce qui entraîne :

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0$, c'est à dire que f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 .

On a donc :

Propriété 6.11 (DL et dérivabilité).

Une fonction f définie sur un intervalle I est dérivable en un point x_0 de I si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0 .

Remarques.

- Le développement limité d'ordre 1 revient à approcher une courbe par sa tangente ; on parle aussi d'approximation affine ou « approximation affine tangente », il permet de faciliter les calculs, lorsqu'on n'exige pas une trop grande précision ; au voisinage de x_0 , on a alors :

$$f(x) \simeq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

(on retrouve ainsi l'équation de la tangente au graphe de f).

- Il est fréquent d'écrire un développement limité en posant $x = x_0 + h$.

f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 si et seulement si la fonction g définie par $g(h) = f(x_0 + h)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.

Plus précisément, si $a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n$ est le DL de g en 0, alors $a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$ est le DL de f en x_0 .

Exemple 6.6.

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Alors f admet un développement limité d'ordre 1 en 0.

En effet : $\forall h \in \mathbb{R}, f(0 + h) = 1 - 3h + h^2 = 1 - 3h + h\epsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$.

Donc la fonction f est dérivable en 0 et de plus $f'(0) = -3$.

6.3.4 Définition du développement limité à l'ordre 2 au voisinage d'un point

Définition 6.5 (Développement limité à l'ordre 2 au voisinage d'un point).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit x_0 un point de I .

On dit que f admet un développement limité à l'ordre 2 en x_0 (noté $DL_2(x_0)$) :

- s'il existe trois réels a_0, a_1, a_2 et
- une fonction ϵ définie sur I qui vérifie $\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0$ tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2 \epsilon(x)$$

Ou autre notation de LANDAU :

$$\forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Le polynôme $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$ s'appelle la partie régulière (ou partie principale) du développement limité.

Le " $o((x - x_0)^2)$ " s'appelle le reste du DL.

Remarque.

On déduit le DL à l'ordre 1 en tronquant le DL à l'ordre 2.

C'est à dire que si $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$ alors on a :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o((x - x_0)).$$

6.3.5 Formules de Taylor Young

Théorème 6.12 (Formule de Taylor Young d'ordre 1).

Si f est une fonction définie en x_0 et de classe C^1 au voisinage de x_0 alors elle admet un DL à l'ordre 1 en x_0 donné par :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + o(x - x_0) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + o(x - x_0).$$

Théorème 6.13 (Formule de Taylor Young d'ordre 2).

Si f est une fonction définie en x_0 et de classe C^2 au voisinage de x_0 alors elle admet un DL à l'ordre 2 en x_0 donné par :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + o((x - x_0)^2) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0) + o((x - x_0)^2).$$

Propriété 6.14.

Une fonction f admet un DL d'ordre 2 en un point x_0 ssi la fonction g définie par $f(x) = g(x - x_0)$ admet un DL d'ordre 2 en 0.

Remarque.

Concrètement, pour déterminer un DL en un point x_0 , on pose $x = t + x_0, g(t) = f(t + x_0)$ et on cherche le DL de g en 0.

Exemple 6.7.

On cherche le DL à l'ordre 2 de f en 1 où $\forall x \in]0, 2[, f(x) = \frac{1}{2 - x}$.

Posons $g(t) = f(t + 1) = \frac{1}{1 - t}$ définie sur $J =]-1, 1[$.

g est de classe C^2 sur J donc d'après la formule de Taylor Young à l'ordre 2, g admet un DL à l'ordre 2 en 0 donné par :

$$g(t) \underset{0}{=} g(0) + tg'(0) + \frac{(t)^2}{2} g''(0) + o(t^2) = 1 + t + t^2 + o(t^2).$$

On a $x = t + 1$ et donc $t = x - 1$.

D'où le DL à l'ordre 2 de f en 1 est :

$$f(x) \underset{1}{=} g(x-1) = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

EXERCICE 6.5.

Donner le DL au voisinage de 0, à l'ordre 2 de f définie sur $] -1, +\infty[$, par : $f(x) = e^{-2x} \sqrt{1+x}$.

Propriété 6.15.

Si f possède un développement limité d'ordre 2 au voisinage de x_0 , alors au voisinage de x_0 , f est équivalente au premier terme non nul de son DL :

$$f(x) \underset{x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$$

- soit $a_0 \neq 0$ et on a $f(x) \sim a_0$ au voisinage de x_0 .
- soit $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$, on a $f(x) \sim a_1(x-x_0)$ au voisinage de x_0 .

6.3.6 Utilisation des DL

Proposition 6.16 (🔗 Développements limités usuels à l'ordre 2 au voisinage de 0).

$$e^x \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2).$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1) \frac{x^2}{2!} + o(x^2).$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 + o(x^2).$$

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2).$$

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

Remarque (Utilisation des DL).

1. Lever des formes indéterminées :

On verra que sur les développements limités on peut faire plus d'opérations que sur les équivalents donc lorsqu'on sera bloqué avec les équivalents, il sera souvent judicieux de passer par les développements limités pour trouver par exemple une limite.

2. Etude locale d'une fonction (tangente à la courbe et convexité au voisinage d'un point).
3. Déterminer une asymptote à une courbe.
4. Etudier la nature d'une série dans le cas où un équivalent ne donne rien.

EXERCICE 6.6.

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$.

6.3.7 Opérations sur les DL

Propriétés 6.17 (Opérations sur les DL).

1. Si f et g admettent des DL d'ordre n en x_0 alors $\forall \alpha, \beta$ réels, $\alpha f + \beta g$ admet un DL d'ordre n en x_0 .
2. Si f et g admettent des DL d'ordre n en x_0 alors $f \times g$ admet un DL d'ordre n en x_0 .

Remarque.

Il existe d'autres résultats concernant la composition, le quotient de deux DL mais non exigible en ECGB2.

EXERCICE 6.7.

1. Donner le DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f(x) = \ln(1+x) - x$.
2. Calculer le DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $g(x) = \frac{e^x}{1+x}$.
3. Calculer le DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $h(x) = x\sqrt{1+x}$.

EXERCICE 6.8 (🔗 Nature d'une série).

Nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n})$.

6.3.8 Etude local au voisinage de x_0 d'une fonction f

Théorème 6.18.

Soit f une fonction définie en x_0 et possédant un développement limité d'ordre 2 au voisinage de x_0 : $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$

Grâce à l'unité du DL, on a :

1. $a_0 = f(x_0)$ donc f est continue en x_0 .
2. $a_1 = f'(x_0)$ donc l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $(x_0, f(x_0))$ est $y = a_0 + a_1(x - x_0)$.
3. De plus si $a_2 > 0$, la courbe représentative de f est localement au-dessus de sa tangente au point d'abscisse x_0 et si $a_2 < 0$, la courbe représentative de f est localement en-dessous de sa tangente au point d'abscisse x_0 .
4. Si $a_2 = 0$, on ne peut rien conclure sur la position de la courbe et de sa tangente au voisinage de x_0 .

EXERCICE 6.9 (🔗 Étude locale).

Faire l'étude locale complète en 0 de la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$, par : $f(x) = e^{-2x}\sqrt{1+x}$.

Etude locale d'une fonction au voisinage de l'infini

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$) telle que :

$$f(x) = a_0 + a_1x + \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \epsilon(x) = 0.$$

Alors la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = a_0 + a_1x$.

Concrètement, la courbe de f admet une asymptote au voisinage de l'infini si la fonction g définie

par : $g(t) = t f\left(\frac{1}{t}\right)$ a un DL d'ordre 1 en 0 :
 $g(t) = a_0 + a_1 t + t \epsilon_1(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \epsilon_1(t) = 0$.

EXERCICE 6.10.

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{-x} + x e^{\frac{1}{x}}$.
 Montrer que la courbe de f admet une asymptote oblique et préciser la position de la courbe de la fonction f par rapport à cette asymptote.
2. De même pour la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$.

🔗 Annexe : règle sur les "o" :

$$o(x^2) + o(x^2) \underset{0}{=} o(x^2)$$

$$o(x^2) - o(x^2) \underset{0}{=} o(x^2)$$

$$k \times o(x^2) \underset{0}{=} o(x^2)$$

$$x(a + bx + cx^2 + o(x^2)) \underset{0}{=} ax + bx^2 + o(x^2)$$

$$\frac{bx + cx^2 + o(x^2)}{x} \underset{0}{=} b + cx + o(x)$$

$$\frac{ax^2 + o(x^2)}{x^2} \underset{0}{=} a + o(1)$$

Feuille d'exercices n°6

COMPARAISONS DES FONCTIONS AU VOISINAGE D'UN POINT -DEVELOPPEMENTS LIMITES.

Exercice 1. Montrer qu'une fonction est négligeable devant une autre

1. Comparer $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \ln(x)$ au voisinage de $+\infty$.
2. Comparer $f(x) = x^3$ et $g(x) = e^x$ au voisinage de $+\infty$.
3. Comparer $f(x) = (\ln(x))^3$ et $g(x) = x^{1/4}$ au voisinage de $+\infty$.
4. Comparer $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x^{-3/2}$ au voisinage de 0.
5. Comparer $f(x) = x^4 - x^2 + 2$ et $g(x) = e^{x+1}$ au voisinage de $+\infty$.
6. Montrer que $x^{3/2} = o(e^{x^2})$ au voisinage de $+\infty$.
7. Comparer $f(x) = x$ et $g(x) = \ln(x^2 + x)$ au voisinage de $+\infty$.
8. Montrer que, pour tout $x > 2$, $\int_x^{x^2} \frac{1}{(\ln(t))^2} dt = o\left(\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt\right)$.

Exercice 2. Trouver un équivalent le plus simple à l'aide d'opérations usuelles et des équivalents usuelles

1. $a(x) = x^3 + 4x^2 - 1$ en ∞ et en 0.
2. $b(x) = \frac{5x^2 - x + 3}{2x^4 - x + 1}$ en ∞ et en 0.
3. $c(x) = e^{\sqrt{x}} - 1$ en 0.
4. $d(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ en 0.
5. $e(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} - 1$ en $+\infty$.
6. $f(x) = \ln(1 + 2x)(e^{\sqrt{x}} - 1)$ en 0.
7. $g(x) = \frac{e^{-x^2} - 1}{x^2 + x}$ en 0.
8. $h(x) = \frac{\ln(1 + 2x^2)}{\sqrt{1 + 3x^2} - 1}$ en 0.
9. $i(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$.

10. $j(x) = \ln(1 + \ln(1 + x))$ en 0.

11. $k(x) = \ln\left(\frac{2x^3 - x^2 + 3}{2x^3 + 3x - 1}\right)$ en $+\infty$.

12. Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $l(x) = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$ en $+\infty$.

Exercice 3. Trouver un équivalent avec la propriété $f(x) + o(f(x)) \sim f(x)$

1. $a(x) = \ln(1 + x)$ en ∞ .

2. $b(x) = x^3 + x\sqrt{x} + 2$ en ∞ .

3. $c(x) = 2x^3 - x^2\sqrt{x} + 2e^x - \ln(x)$ en ∞ .

Exercice 4. Trouver un équivalent en utilisant un encadrement

1. On admet que pour tout réel $x \geq 4$, $\frac{x \ln(x)}{\sqrt{x} + 1} \leq f(x) \leq \sqrt{x + 2} \ln(x + 1)$. Déterminer un équivalent de $f(x)$ au voisinage de ∞ .

2. Donner un équivalent en ∞ de la partie entière de x .

Exercice 5. Trouver un DL à l'aide des DL usuelles ou des opérations usuelles sur les DL

1. Donner le DL à l'ordre de 2 au voisinage de 0 de $a(x) = -x + \ln(1 + x)$.

2. Donner le DL à l'ordre 1 au voisinage de 0 de $b(x) = \frac{e^x - x - 1}{x}$.

3. Donner le DL à l'ordre de 2 au voisinage de 0 de $c(x) = e^x - \ln(1 + x)$.

4. Donner le DL à l'ordre de 2 au voisinage de 0 de $d(x) = e^x - \sqrt{1 + x}$.

5. Donner le DL à l'ordre de 2 au voisinage de 0 de $e(x) = x\sqrt{1 + x}$.

6. Donner le DL à l'ordre de 2 au voisinage de 0 de $f(x) = e^x \ln(1 + x)$.

7. Donner le DL à l'ordre de 2 au voisinage de 0 de $g(x) = \frac{e^x}{1 + x}$.

8. Donner le DL à l'ordre de 2 au voisinage de 0 de $h(x) = \ln(1 + 4x) - 2e^{2x}$.

9. Donner le DL à l'ordre de 2 au voisinage de 0 de $i(x) = \frac{1}{1 + \ln(1 - 2x)}$.

Exercice 6. DL par changement de variable $x = x_0 + h$

Déterminer le DL à l'ordre 2 en 1 de $e^{1-x} + 2\ln(x)$.

Exercice 7. DL par formule de Taylor Young

Donner le DL à l'ordre 2 en 2 de $f(x) = e^{x^2-1}$.

Exercice 8. Trouver un équivalent par DL

1. Donner un équivalent le plus simple possible en 0 de $f(x) = \frac{e^x - 1 - \ln(1 + x)}{x^2}$.

2. Donner un équivalent le plus simple possible en 0 de $g(x) = \ln(2e^x - 1)$.

- Donner un équivalent en $+\infty$ de $\ln(1+x^2)$.
- Donner un équivalent en $+\infty$ de $\ln(1+e^x)$.

Exercice 9. Équivalent pour donner une limite

Après avoir cherché un équivalent des fonctions suivantes au voisinage du point considéré, donner leur limite en ce point :

- $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ en $+\infty$.
- en 0 de $g(x) = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$.
- en $+\infty$ de $\frac{x - \ln(x)}{x+1}$.
- 0 de $\frac{x - \ln(x)}{x+1}$.

Exercice 10. Utiliser une comparaison ou un DL

pour prolongement par continuité ou C^1 etc...

- Montrer que la fonction définie pour tout $x \in [-1/2, +\infty[\setminus \{0\}$, par $f(x) = \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$ peut-être prolongée par continuité en 0 et déterminer ce prolongement.
- Soit $g(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$. Donner le domaine de définition de g , montrer que l'on peut prolonger g par continuité en 0 et que ce prolongement noté $\tilde{g}$ est dérivable en 0. La fonction $\tilde{g}$ ainsi obtenue est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?
- Montrer que la fonction k définie par $k(x) = \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-4x}}{x}$ peut-être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement noté $\tilde{k}$ est dérivable en 0. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $\tilde{k}$ au point d'abscisse 0.

Exercice 11. Utiliser un DL pour établir une concavité ou une convexité

Soit f la fonction définie sur $[-1/3, +\infty[$ par $f(x) = e^{x^2} - \sqrt{3x+1}$.

- Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative C_f de la fonction f au point d'abscisse 0.
- Préciser la position de C_f par rapport à cette tangente.

Exercice 12. Effectuer un changement de variable

$x = x_0 + h$ pour l'étude locale d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par, $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \times \frac{\ln(x)}{2}$ si $x \neq 1$ et par $f(1) = 1$.

- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Montrer que f est dérivable en 1.

Exercice 13. Etude asymptotique d'une fonction

au voisinage de $+\infty$

1. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ admet des asymptotes obliques en $-\infty$ et en $+\infty$ et déterminer une équation de ces asymptotes. (on précisera la position de C_f par rapport à ses asymptotes obliques)
2. Montrer que la fonction f définie par $g(x) = \ln(2 + 3e^x)$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ et déterminer une équation de cette asymptote. (on précisera la position de C_f par rapport à son asymptote oblique)

Exercice 14. DL et nature d'une série

1. Donner le DL à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1 + u)$.
2. En déduire $\forall n \geq 2$, la nature de la série de terme général $u_n = (1 - 1/\sqrt{n})^n$.

Exercice 15. EDHEC 2009

Dans cet exercice, on considère la fonction f définie comme suit :

$$f(0) = 1, \text{ et pour tout } x \text{ non nul de }]-\infty; 1[, \quad f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}.$$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty; 1[$.
2. (a) Déterminer le développement limité de $\ln(1-x)$ à l'ordre 2 lorsque x est au voisinage de 0.
(b) En déduire que f est dérivable en 0, puis vérifier que $f'(0) = \frac{1}{2}$.
3. (a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout réel x élément de $]-\infty; 0[\cup]0; 1[$.
(b) Déterminer le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$ lorsque x appartient à $]-\infty; 1[$, puis en déduire les variations de f .
(c) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, puis dresser son tableau de variation.
4. (a) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $]0; 1[$, noté u_n , tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1 .
(b) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Exercice 16. ECRICOME 2014

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = e \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel n , u_n existe.
2. Écrire un programme en Python qui, pour une valeur N fournie par l'utilisateur, calcule et affiche u_N .

- Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
- Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.
- Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

puis déterminer un équivalent de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0.

- Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$.
- Établir que : $\forall x \geq e-1, \quad f(x) \leq x$ et $(x+1)\ln(x+1) \geq (x+1)$.
En déduire que :

$$\forall x \geq e-1, \quad f'(x) \geq 0$$

- Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e-1 \leq u_n$$

- Établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser la valeur de sa limite L .

Exercice 17. ECRICOME 2012

Partie I. Étude d'une fonction f .

On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels positifs par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

- Ecrire le développement limité de $f(x)$ l'ordre 2, au voisinage de 0 En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.
- Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
- Justifier la dérivabilité de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis déterminer la fonction φ telle que :

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

- Étudier les variations de φ . En déduire le tableau de variation f qui sera complété par la limite de f en $+\infty$.

Partie II. Étude d'une suite.

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u} du$$

- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n \geq \frac{1}{e} \ln(n+1)$$

Donner la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2. Prouver l'existence de l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$.
3. Utiliser un changement de variable affine pour montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leq \int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n \leq \int_0^1 f(x) dx$$

4. Donner alors un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 18. EML 2009

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
 (b) Justifier que f est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
 (c) Montrer : $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$
 (d) Établir que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
2. (a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$u(x) = (1-x)e^x - 1$$

- (b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$.
- (c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
 Dresser le tableau des variations de f .
- (d) Montrer que la courbe représentative de f admet une droite asymptote, lorsque la variable tend vers $-\infty$.
- (e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α , que l'on calculera.
2. (a) Établir : $\forall x \in [0; +\infty[, e^{2x} - 2x e^x - 1 \geq 0$
 (b) Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2x e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$
 (c) Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[, -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.
 (d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$
3. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$
4. Conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .
5. Écrire un programme en Python qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$$

1. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \frac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. (a) Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[, 0 \leq G(x) \leq x f(x)$.
En déduire la limite de G en $+\infty$.
(b) Montrer : $\forall x \in]-\infty; 0], G(x) \leq x f(x)$.
En déduire la limite de G en $-\infty$.
3. Dresser le tableau des variations de G . On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.

Exercice 19. HEC 2014

Partie I. Un équivalent d'une intégrale

1. Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1[$, à valeurs réelles, telle que :
 $N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x)$.
- (a) Montrer que la fonction N est de classe C^1 sur $[0, 1[$.
(b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a : $\ln(1-x) \leq -x$.
(c) On note N' la fonction dérivée de la fonction N . Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a $N'(x) \leq 0$.
(d) En déduire pour tout $x \in [0, 1[$, un encadrement de $N(x)$.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, 1[$, à valeurs réelles, telle que : $f(x) = -2 \frac{x + \ln(1-x)}{x^2}$.
- (a) Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$
(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore f la fonction ainsi prolongée.
(c) Sous réserve d'existence, on note f' la fonction dérivée de f .
Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $f'(x) = -2 \frac{N(x)}{x^3(1-x)}$.
(d) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0, 1[$.
En déduire que f réalise une bijection strictement croissante de $[0, 1[$ dans $[1, +\infty[$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, 1[$: $g_n(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2} f(x)\right)$.
- (a) Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^1 g_n(x) dx$. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
 $I_n = \int_0^1 g_n(x) dx$.
(b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a :
 $0 \leq g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)$.

(c) En déduire l'encadrement (on fera un changement de variable $t = \sqrt{n}x$) :

$$0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{avec } \Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \text{ (on admettra que la fonction } \Phi \text{ est majorée par 1).}$$

4. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{\ln(n+2)}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 < v_n < 1$.

(b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n = f(v_n)$. Établir la convergence de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$; déterminer sa limite.

(c) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} I_n &\geq \int_0^{v_n} g_n(x) dx \geq \int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2} w_n\right) dx \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{nw_n}} \int_0^{v_n \sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du. \end{aligned}$$

(d) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement : $\frac{2}{\sqrt{w_n}} \left(\Phi(v_n \sqrt{nw_n}) - \frac{1}{2} \right) \leq I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \leq 1$. (on s'aidera de 3c)

(e) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$ (on admettra que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1$).