

Programme complémentaire — poursuite d'études Ce module fait partie du **programme complémentaire** de Terminale Bac Pro : il prépare la poursuite d'études (BTS et au-delà) et se traite dans le cadre de l'accompagnement au choix d'orientation. Il ne fait pas partie du programme évalué en CCF.

Objectifs du chapitre :

- Comprendre la notion d'intégrale comme aire algébrique sous une courbe
- Connaître et utiliser les primitives usuelles
- Calculer une intégrale définie par la méthode $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
- Appliquer les propriétés : linéarité, relation de Chasles
- Calculer une aire entre une courbe et l'axe des x, ou entre deux courbes
- Calculer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Situation professionnelle — Section et énergie en menuiserie

Un ébéniste veut calculer l'aire de la section d'un profil de bois cintré — une courbe décrite par une fonction mathématique. Un calcul d'intégrale lui permet de trouver exactement cette aire, ou encore de calculer l'énergie consommée par une chaudière sur une période donnée.

1. Notion d'intégrale — Aire sous une courbe

DÉFINITION

Soit f une fonction **positive et continue** sur $[a, b]$. L'**intégrale de f de a à b** , notée

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

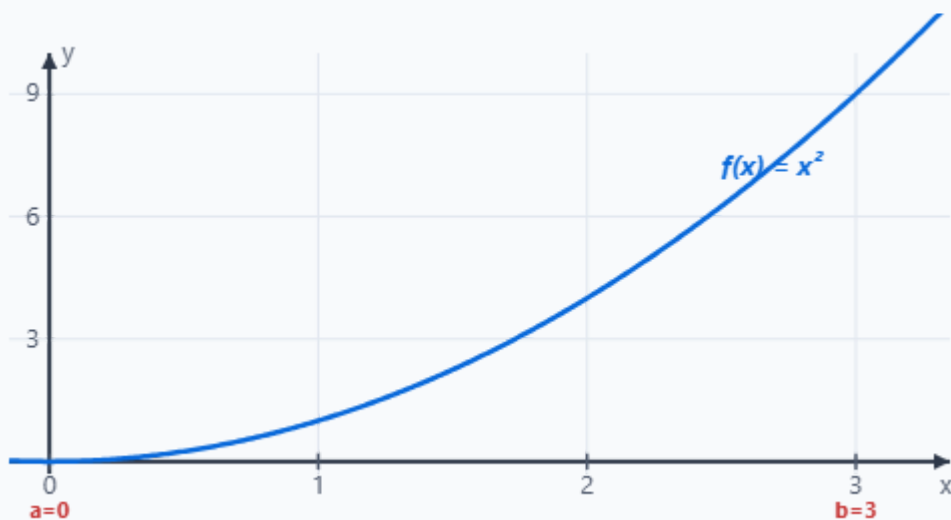
représente l'**aire de la surface** comprise entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites verticales $x = a$ et $x = b$. Elle s'exprime en unités d'aire (u.a.).

ATTENTION — AIRE ALGÈBRE

Si f prend des valeurs **négatives** sur une partie de $[a, b]$, l'intégrale tient compte du signe : les portions sous l'axe contribuent négativement. On parle d'**aire algébrique**. Pour l'**aire géométrique** (toujours positive), il faut découper selon les zéros de f et sommer les valeurs absolues.

Visualisation interactive — Aire sous $f(x) = x^2$ sur $[0, 3]$

Utiliser les boutons pour animer le remplissage progressif



APPLICATION

Calcule $\int_0^2 3 \, dx$. Interprète géométriquement ce résultat (l'intégrale d'une fonction constante).

2. Primitives d'une fonction

DÉFINITION

Une fonction F est une **primitive** de f sur un intervalle I si :

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in I$$

Si F est une primitive de f , alors **toutes** les primitives de f s'écrivent $F(x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire.

PROPRIÉTÉ

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle. Deux primitives d'une même fonction ne diffèrent que d'une **constante**.

Tableau des primitives usuelles

Fonction $f(x)$	Une primitive $F(x)$	Condition
k (constante)	kx	$k \in \mathbb{R}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$
x	$\frac{x^2}{2}$	—
x^2	$\frac{x^3}{3}$	—
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} x^{3/2}$	$x \geq 0$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$x \neq 0$
e^x	e^x	—
e^{ax+b}	$\frac{1}{a} e^{ax+b}$	$a \neq 0$

EXEMPLES DE PRIMITIVES

- Primitive de $f(x) = 3x^2 : F(x) = x^3$ vérif : $F'(x) = 3x^2 \checkmark$
- Primitive de $f(x) = 5 : F(x) = 5x$
- Primitive de $f(x) = 2x + 3 : F(x) = x^2 + 3x$
- Primitive de $f(x) = e^{2x} : F(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$

APPLICATION

Donne une primitive de chacune des fonctions suivantes : $f(x) = 5x^2, g(x) = 4x - 3, h(x) = 7$.

3. Calcul d'une intégrale définie

THÉORÈME FONDAMENTAL DU CALCUL INTÉGRAL

Si F est une primitive de f sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

MÉTHODE EN 3 ÉTAPES

1 **Trouver une primitive F** de f (on omet la constante C)

2 **Écrire** $\left[F(x) \right]_a^b$

3 **Calculer** $F(b) - F(a)$ et conclure

EXEMPLE 1 Calculer $\int_1^3 2x \, dx$

1. Primitive de $2x$: $F(x) = x^2$

2. $\left[x^2 \right]_1^3$

3. $= 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$

EXEMPLE 2 Calculer $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) \, dx$

1. Primitive : $F(x) = x^3 - x^2 + x$

2. $\left[x^3 - x^2 + x \right]_0^2$

3. $= (8 - 4 + 2) - (0 - 0 + 0) = 6$

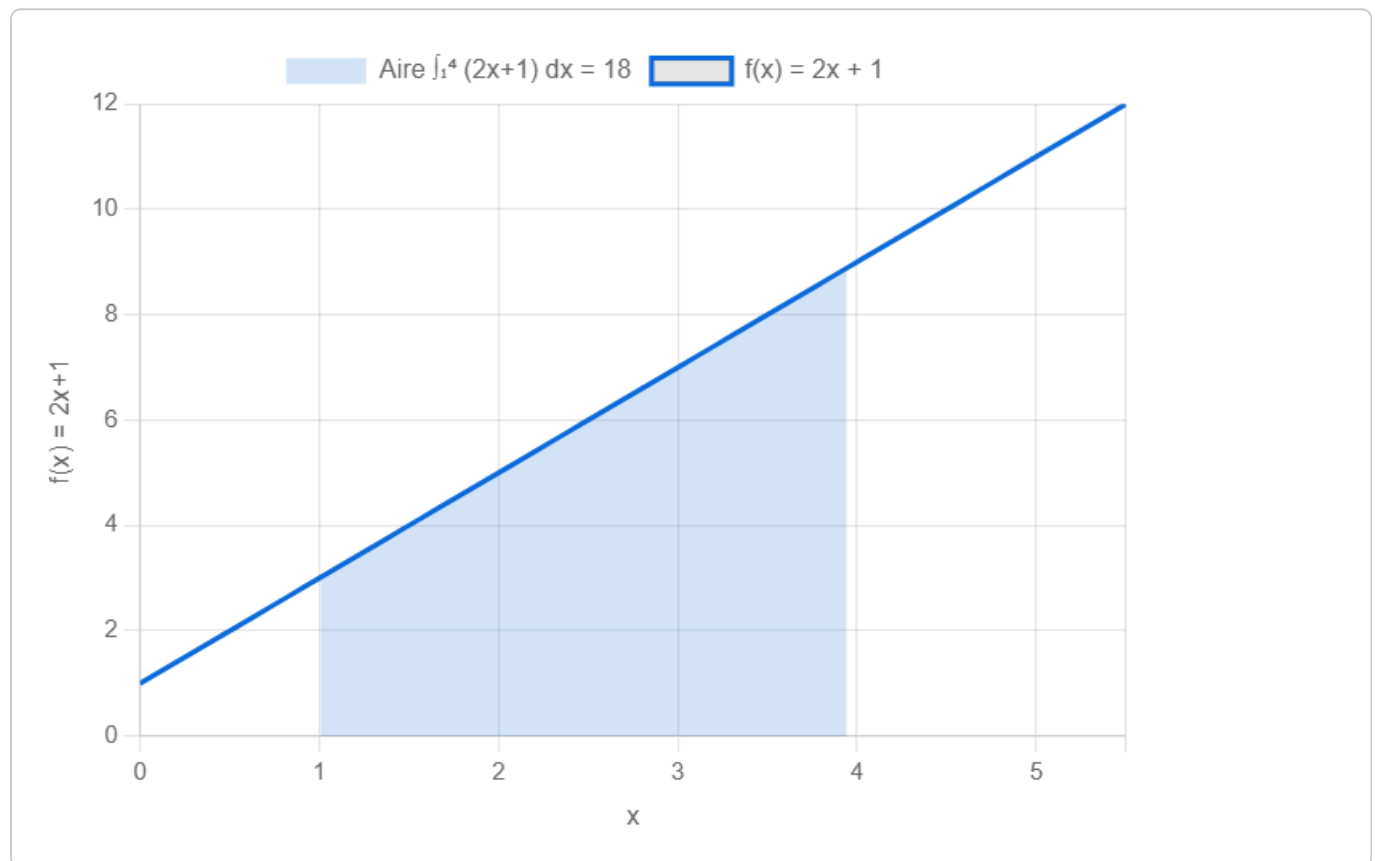
EXEMPLE 3 Calculer $\int_0^1 e^x dx$

1. Primitive de e^x : $F(x) = e^x$

2. $\left[e^x \right]_0^1$

3. $= e^1 - e^0 = e - 1 \approx \mathbf{1,718}$

Visualisation avec Chart.js : $f(x) = 2x + 1$ sur $[1, 4]$



Aire colorée en bleu : $\int_1^4 (2x + 1) dx = \left[x^2 + x \right]_1^4 = (16 + 4) - (1 + 1) = \mathbf{18}$

APPLICATION

Un fabricant de mobilier modélise la largeur d'une pièce cintrée par $f(x) = x + 2$ sur $[0; 3]$. Calcule $\int_0^3 (x + 2) dx$.

4. Propriétés de l'intégrale

LINÉARITÉ

Pour tous réels λ , μ et toutes fonctions f , g intégrables sur $[a, b]$:

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx + \mu \int_a^b g(x) \, dx$$

EXEMPLE — LINÉARITÉ

$$\int_0^2 (4x^2 + 3e^x) \, dx = 4 \int_0^2 x^2 \, dx + 3 \int_0^2 e^x \, dx$$

$$= 4 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + 3 \left[e^x \right]_0^2 = 4 \times \frac{8}{3} + 3(e^2 - 1) = \frac{32}{3} + 3e^2 - 3 \approx 10,67 + 22,17 - 3 \approx \mathbf{29,83}$$

RELATION DE CHASLES

Pour tout réel c (quelconque, pas nécessairement entre a et b) :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

Cette relation permet de **découper** un intervalle d'intégration.

EXEMPLE — CHASLES

On sait que $\int_1^5 f(x) \, dx = 12$ et $\int_1^3 f(x) \, dx = 5$.

$$\text{Alors : } \int_3^5 f(x) \, dx = \int_1^5 f(x) \, dx - \int_1^3 f(x) \, dx = 12 - 5 = \mathbf{7}$$

AUTRES PROPRIÉTÉS

- $\int_a^a f(x) \, dx = 0$
- $\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$ (inversion des bornes $\Rightarrow$ changement de signe)
- Si $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$

5. Calcul d'aire

5.1 Aire entre une courbe et l'axe des abscisses

MÉTHODE

- Si $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$: $\mathcal{A} = \int_a^b f(x) \, dx$
- Si $f(x) \leq 0$ sur $[a, b]$: $\mathcal{A} = - \int_a^b f(x) \, dx$
- Si f **change de signe** : découper selon les zéros, calculer chaque intégrale et sommer les valeurs absolues.

5.2 Aire entre deux courbes

MÉTHODE

Si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a, b]$, l'aire entre les courbes est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx$$

EXEMPLE Aire entre $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$ sur $[0, 1]$

Sur $[0, 1]$, $x \geq x^2$, donc $g \geq f$.

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \approx 0,167 \text{ u.a.}$$

6. Énergie consommée — Chaudière ICCER

PROBLÈME PROFESSIONNEL

Une chaudière a une puissance instantanée variable modélisée par :

$$P(t) = 3t^2 - 12t + 15 \quad (\text{kW, avec } t \text{ en heures, } 0 \leq t \leq 4)$$

Calculer l'énergie totale consommée sur l'intervalle $[0, 4]$ (en kWh).

SOLUTION COMPLÈTE

Rappel physique : L'énergie est l'intégrale de la puissance :

$$E = \int_0^4 P(t) dt = \int_0^4 (3t^2 - 12t + 15) dt$$

Étape 1 — Primitive :

$$F(t) = t^3 - 6t^2 + 15t$$

Vérification : $F'(t) = 3t^2 - 12t + 15 = P(t) \checkmark$

Étape 2 — Calcul :

$$\begin{aligned} E &= \left[t^3 - 6t^2 + 15t \right]_0^4 \\ &= F(4) - F(0) \\ &= (64 - 96 + 60) - (0 - 0 + 0) = 28 - 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{E = 28 \text{ kWh}}$$

PUISSANCE MOYENNE

La **puissance moyenne** sur $[0, 4]$:

$$\overline{P} = \frac{1}{4 - 0} \int_0^4 P(t) \, dt = \frac{28}{4} = \mathbf{7 \text{ kW}}$$

Interprétation : La chaudière consomme en moyenne 7 kW pendant 4 h, soit $7 \times 4 = 28$ kWh. Résultat cohérent.

VÉRIFICATION DU SIGNE DE $P(t)$

Discriminant de $3t^2 - 12t + 15$: $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 15 = 144 - 180 = -36 < 0$.

Donc $P(t) > 0$ sur tout $[0, 4]$: la puissance est toujours positive. ✓

7. Section d'un profil de bois cintré ERA / TMA

PROBLÈME PROFESSIONNEL

Un profilé de bois design (cimaise) a une section transversale dont la génératrice supérieure est modélisée par la parabole (en cm) :

$$f(x) = -0,5x^2 + 4x \quad \text{sur } [0, 6]$$

La génératrice inférieure est l'axe des abscisses ($y = 0$).

Calculer la section transversale de ce profilé (en cm^2).

SOLUTION COMPLÈTE

Étape 1 — Vérifier le signe de f sur $[0, 6]$:

$f(x) = x(-0,5x + 4)$; zéros : $x = 0$ et $x = 8$.

Sur $[0, 6] \subset [0, 8]$, on a bien $f(x) \geq 0$. ✓

Étape 2 — Primitive :

$$F(x) = -\frac{0,5}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 = -\frac{x^3}{6} + 2x^2$$

Étape 3 — Calcul :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^6 f(x) \, dx = \left[-\frac{x^3}{6} + 2x^2 \right]_0^6 \\ &= \left(-\frac{216}{6} + 2 \times 36 \right) - (0) \\ &= (-36 + 72) = \boxed{36 \text{ cm}^2}\end{aligned}$$

INTERPRÉTATION ET USAGE

La section transversale du profilé fait 36 cm^2 . Pour 1 mètre linéaire, le volume de bois est : $V = 36 \times 100 = 3\,600 \text{ cm}^3 = 3,6 \text{ L}$. Connaissant la densité du bois (ex. chêne : $\approx 0,75 \text{ kg/L}$), on obtient la masse : $m \approx 3,6 \times 0,75 = 2,7 \text{ kg/m}$.

8. Valeur moyenne d'une fonction

DÉFINITION

La **valeur moyenne** d'une fonction f continue sur $[a, b]$ est :

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

Interprétation géométrique : $\bar{f}$ est la hauteur du rectangle de base $[a, b]$ ayant la même aire que la surface sous la courbe.

EXEMPLE 1 Valeur moyenne de $f(x) = x^2$ sur $[0, 3]$

$$\bar{f} = \frac{1}{3} \int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{1}{3} \times \frac{27}{3} = \frac{1}{3} \times 9 = \mathbf{3}$$

EXEMPLE 2 — TEMPÉRATURE MOYENNE ICCER

La température d'un fluide caloporteur suit $T(t) = 2t + 20$ (°C, t en heures) sur $[0, 5]$.

$$\bar{T} = \frac{1}{5} \int_0^5 (2t + 20) dt = \frac{1}{5} \left[t^2 + 20t \right]_0^5 = \frac{1}{5} (25 + 100) = \frac{125}{5} = \mathbf{25} \text{ °C}$$

9. Tableau récapitulatif — Formules essentielles

Notion	Formule	Remarque
Intégrale définie	$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$	$F' = f$
Primitive de k	$kx + C$	$k \in \mathbb{R}$
Primitive de x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \neq -1$
Primitive de e^x	$e^x + C$	—
Primitive de $\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$x \neq 0$
Linéarité	$\int_a^b (\lambda f + \mu g) dx = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$	—
Chasles	$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$	c quelconque
Aire sous courbe	$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx$	Découper si f change de signe
Aire entre 2 courbes	$\mathcal{A} = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$	si $f \geq g$
Valeur moyenne	$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$	—
Énergie (installation thermique)	$E = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$	P en kW, t en h $\rightarrow E$ en kWh

10. À retenir

Essentiel du chapitre :

- $\int_a^b f(x) dx$ représente l'**aire algébrique** sous la courbe de f entre $x = a$ et $x = b$.
- Pour calculer : trouver une primitive F (telle que $F' = f$), puis calculer $F(b) - F(a)$.
- Les **primitives usuelles** sont à connaître par cœur.
- La **relation de Chasles** permet de découper un intervalle.
- La **valeur moyenne** : $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.
- En **installation thermique** : énergie = intégrale de la puissance ($E = \int P dt$).
- En **menuiserie** : section = intégrale du profil sur l'intervalle.

11. Mini exercices corrigés

EXERCICE 1 Calcul d'intégrale simple

Calculer $\int_1^4 (2x - 3) dx$.

► ▼ Voir la correction

EXERCICE 2 Calcul d'aire — profil bois ERA/TMA

Une parclose a un profil modélisé par $g(x) = x^2 - 4x + 5$ sur $[1, 3]$, au-dessus de la droite $y = 1$. Calculer l'aire entre la courbe et $y = 1$ sur $[1, 3]$.

► ▼ Voir la correction

EXERCICE 3 Chasles & énergie **ICCER**

La puissance d'un climatiseur (kW) varie selon :

$$P(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 2 & \text{si } 2 < t \leq 5 \end{cases}$$

Calculer l'énergie consommée sur $[0, 5]$.

► ▼ Voir la correction

EXERCICE 4 Valeur moyenne — température

La température intérieure d'un logement est modélisée par $T(t) = -0,5t^2 + 3t + 18$ (°C) pour $0 \leq t \leq 6$ (heures). Calculer la température moyenne sur cette période.

► ▼ Voir la correction

Erreurs fréquentes

✗ Oublier d'évaluer aux deux bornes

$\int_a^b f = F(b) - F(a)$, pas seulement $F(b)$.

Conseil : toujours écrire les crochets $[F(x)]_a^b$ et calculer $F(b) - F(a)$ explicitement.

✗ Confondre primitive et dérivée

La primitive de x^n est $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, pas nx^{n-1} (qui est la dérivée).

Conseil : pour une primitive, l'exposant augmente de 1 et on divise par ce nouvel exposant.

✗ Prendre l'intégrale directement quand la fonction est négative

Si $f(x) < 0$ sur $[a, b]$, l'intégrale est négative mais l'aire est positive.

Conseil : pour une aire, prendre la valeur absolue de l'intégrale quand la fonction est négative.



Inverser les bornes

$\int_a^b f = - \int_b^a f$ — inverser les bornes change le signe.

Conseil : poser $a < b$ en début d'exercice pour éviter toute confusion.

Simulation interactive

[Calcul intégral](#)

Socle

Standard

Approfondissement

Tout voir

Compétences travaillées :

- Déterminer des primitives à l'aide du tableau des primitives usuelles
- Calculer une intégrale $\int_a^b f(x) dx$ à l'aide d'une primitive
- Calculer l'aire sous une courbe et entre deux courbes
- Appliquer la linéarité de l'intégrale et la relation de Chasles
- Calculer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle
- Utiliser l'intégrale dans des contextes professionnels (énergie, sections, volumes)

EXERCICE 1 Trouver des primitives à l'aide du tableau

SOCLE

Pour chaque fonction, donner **une primitive** $F(x)$ en utilisant le tableau des primitives usuelles :

a) $f(x) = 3$

$F(x) = \dots\dots\dots$

b) $f(x) = x^2$

$F(x) = \dots\dots\dots$

c) $f(x) = 4x^3$

$F(x) = \dots\dots\dots$

d) $f(x) = 5x + 2$

$F(x) = \dots\dots\dots$

Mes calculs :

EXERCICE 2 Calculer des intégrales simples

SOCLE

Calculer les intégrales suivantes à l'aide de la formule

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) :$$

a) $\int_1^4 2x dx$

.....

b) $\int_0^3 x^2 dx$

.....

c) $\int_2^5 6 dx$

.....

Mes calculs :

EXERCICE 3 Primitives et notation $[F(x)]_a^b$

SOCLE

Compléter le tableau suivant :

$f(x)$	Primitive $F(x)$	Bornes	$\int_a^b f(x) dx$
$3x^2$		$a = 0, b = 2$	
$4x + 1$		$a = 1, b = 3$	
x^3		$a = 0, b = 1$	

Mes calculs :

EXERCICE 4 Calculer des primitives — méthode guidée

SOCLE

Méthode :

pour trouver une primitive, on utilise le tableau des primitives usuelles.

$f(x)$	Primitive $F(x)$
k (constante)	kx
x	$\frac{x^2}{2}$
x^2	$\frac{x^3}{3}$
x^3	$\frac{x^4}{4}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$

Règle :

la primitive de $k \times f(x)$ est $k \times F(x)$.

Compléter les primitives suivantes à l'aide du tableau ci-dessus :

a) $f(x) = 5$

La primitive d'une constante k est kx . Ici $k = 5$, donc :

$$F(x) = 5 \times \square = \square$$

b) $f(x) = x^2$

On utilise la formule : primitive de $x^n \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Ici $n = \square$, donc :

$$F(x) = \frac{x^{\square}}{\square} = \square$$

c) $f(x) = 6x$

On sait que la primitive de x est $\frac{x^2}{2}$. Avec le coefficient 6 :

$$F(x) = 6 \times \frac{x \boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

d) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$

On fait la primitive de chaque terme séparément :

Primitive de $3x^2 \rightarrow 3 \times \frac{x^3}{3} = \boxed{}$

Primitive de $2x \rightarrow 2 \times \frac{x^2}{2} = \boxed{}$

Primitive de $-1 \rightarrow \boxed{}$

Donc $F(x) = \boxed{}$

Mes calculs :

EXERCICE 5 Calculer une intégrale définie — pas à pas

SOCLE

Méthode pour calculer $\int_a^b f(x) dx$:

Étape 1 :

Trouver une primitive $F(x)$ de $f(x)$.

Étape 2 :

Calculer $F(b)$ (remplacer x par b).

Étape 3 :

Calculer $F(a)$ (remplacer x par a).

Étape 4 :

Faire la soustraction $F(b) - F(a)$.

a) Calculer $\int_1^3 4x dx$

Étape 1 : Primitive de $4x \rightarrow F(x) = 4 \times \frac{x^2}{2} = \square$

Étape 2 : $F(3) = 2 \times \square^2 = 2 \times \square = \square$

Étape 3 : $F(1) = 2 \times 1^2 = \square$

Étape 4 : $\int_1^3 4x dx = F(3) - F(1) = \square - \square = \square$

b) Calculer $\int_0^2 3x^2 dx$

Étape 1 : Primitive de $3x^2 \rightarrow F(x) = 3 \times \frac{x^3}{3} = \square$

Étape 2 : $F(2) = \square^3 = \square$

Étape 3 : $F(0) = 0^3 = \square$

Étape 4 : $\int_0^2 3x^2 dx = \square - \square = \square$

c) Calculer $\int_1^4 (2x + 3) dx$

Étape 1 : Primitive de $2x \rightarrow x^2$. Primitive de $3 \rightarrow 3x$. Donc $F(x) = \boxed{}$

Étape 2 : $F(4) = 4^2 + 3 \times 4 = \boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$

Étape 3 : $F(1) = 1^2 + 3 \times 1 = \boxed{}$

Étape 4 : $\int_1^4 (2x + 3) dx = \boxed{} - \boxed{} = \boxed{}$

Mes calculs :

EXERCICE 6 Interpréter une intégrale comme une aire — lecture guidée

SOCLE

Règle :si $f(x) \geq 0$ sur $[a; b]$, alors l'aire sous la courbe est égale à l'intégrale :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx \text{ (en unités d'aire)}$$

Contexte : Un menuisier agenceur découpe un panneau décoratif dont le bord supérieur suit la courbe $f(x) = -x^2 + 4$ (en cm), pour x allant de 0 à 2. Le bord inférieur est au niveau $y = 0$.

1. La fonction f est-elle positive sur $[0; 2]$?

Calculer : $f(0) = -0^2 + 4 = \square$ et $f(2) = -2^2 + 4 = \square$.Pour $x \in [0; 2]$, $x^2 \leq 4$ donc $-x^2 + 4 \geq 0$. Réponse : f est ☐ positive ☐ négative sur $[0; 2]$.

2. Trouver une primitive $F(x)$ de $f(x) = -x^2 + 4$.

Primitive de $-x^2 \rightarrow -\frac{x^3}{3}$. Primitive de $4 \rightarrow 4x$.Donc $F(x) = \square$

3. Calculer $\int_0^2 (-x^2 + 4) dx$.

$$F(2) = -\frac{\square}{3} + 4 \times \square = -\frac{8}{3} + \square = \frac{-8 + 24}{3} = \square$$

$$F(0) = \square$$

$$\int_0^2 (-x^2 + 4) dx = \square - 0 = \square$$

4. En déduire l'aire du panneau en cm^2 .

Comme $f \geq 0$ sur $[0; 2]$, l'aire est : $\mathcal{A} = \int_0^2 f(x) dx = \square \text{ cm}^2$

Mes calculs :

EXERCICE 7 Calculer l'aire sous une courbe simple (guidé)

SOCLE

Méthode Si $f(x) \geq 0$ sur $[a; b]$, l'aire sous la courbe =

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Contexte : Un artisan menuisier découpe un bord arrondi dont le profil suit la courbe $f(x) = x$ (en cm) pour $x \in [0; 6]$. Il veut calculer l'aire de la surface découpée.

Étape 1 : La fonction $f(x) = x$ est-elle positive sur $[0; 6]$?

Comme $x \geq 0$ sur $[0; 6]$, la réponse est ☐ oui ☐ non

Étape 2 : Trouver une primitive de $f(x) = x$.

La primitive de x est $F(x) = \boxed{}$

Étape 3 : Calculer l'intégrale.

$$\int_0^6 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^6 = \frac{6^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{\boxed{00}}{2} - 0 = \boxed{00} \text{ cm}^2$$

Mes calculs :

EXERCICE 8 Intégrale d'une fonction affine (guidé)

SOCLE

Calculer chaque intégrale en suivant les étapes :

a) $\int_0^4 (3x + 1) dx$

Primitive : $F(x) = \frac{3x^2}{2} + x = \boxed{}$

$F(4) = \frac{3 \times 16}{2} + 4 = 24 + 4 = \boxed{}$

$F(0) = 0 + 0 = \boxed{}$

Résultat = $\boxed{} - \boxed{} = \boxed{}$

b) $\int_1^5 (2x - 3) dx$

Primitive : $F(x) = \boxed{}$

$F(5) = 25 - 15 = \boxed{}$

$F(1) = 1 - 3 = \boxed{}$

Résultat = $\boxed{} - (\boxed{}) = \boxed{}$

Mes calculs :

EXERCICE 9 Primitives de fonctions usuelles — tableau complet

SOCLE

Compléter le tableau en donnant une primitive de chaque fonction :

$f(x)$	$F(x)$ (primitive)
7	
x^4	
$2x^3$	
$3x^2 + 5x$	
e^x	
$\frac{1}{x}$ (pour $x > 0$)	

Mes calculs :

EXERCICE 10 Calculer une intégrale pour trouver une valeur numérique (guidé)

SOCLE

Contexte : Un technicien chauffagiste mesure que la puissance (en kW) d'une chaudière varie selon $P(t) = 2t + 1$ pour $t \in [0 ; 4]$ heures. L'énergie consommée (en kWh) est l'intégrale de la puissance.

Étape 1 : Trouver une primitive de $P(t) = 2t + 1$.

Primitive de $2t \rightarrow t^2$. Primitive de $1 \rightarrow t$. Donc $F(t) = \boxed{}$

Étape 2 : Calculer l'énergie sur $[0 ; 4]$.

$$E = \int_0^4 (2t + 1) dt = [t^2 + t]_0^4$$

$$F(4) = 4^2 + 4 = \boxed{}$$

$$F(0) = 0^2 + 0 = \boxed{}$$

$$E = \boxed{} - \boxed{} = \boxed{} \text{ kWh}$$

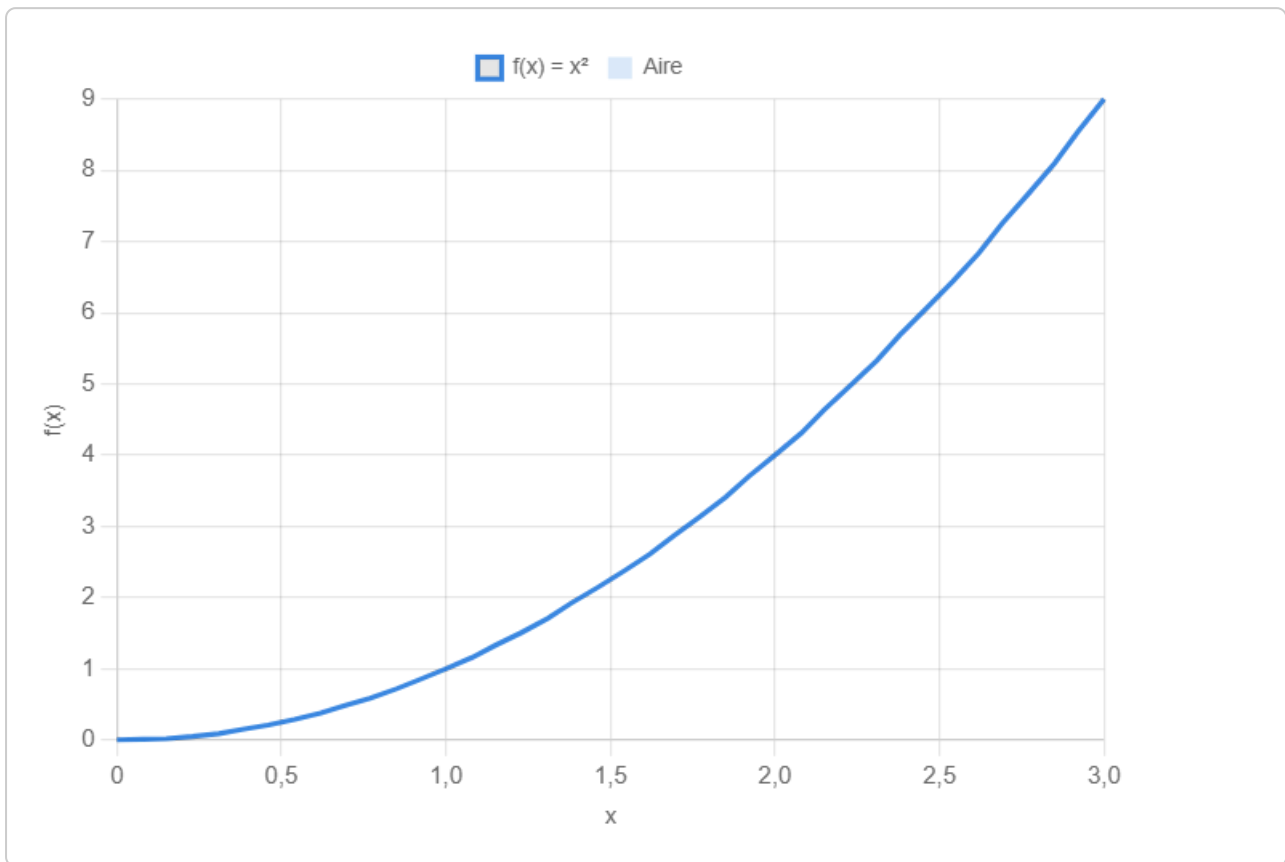
Étape 3 : Calculer la puissance moyenne sur ces 4 heures.

$$\bar{P} = \frac{E}{b - a} = \frac{20}{\boxed{}} = \boxed{} \text{ kW}$$

Mes calculs :

EXERCICE 7 Aire sous une courbe (fonction positive)**STANDARD**

On considère la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0 ; 3]$.



Aire sous la courbe $f(x) = x^2$ entre $x = 0$ et $x = 3$

1. La fonction f est-elle positive sur $[0 ; 3]$?
2. Donner une primitive $F(x)$ de $f(x) = x^2$.
3. Calculer $\int_0^3 x^2 dx$.
4. En déduire l'aire, en unités d'aire, de la surface comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 3$.

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 8 Linéarité de l'intégrale

STANDARD

On donne : $\int_0^2 f(x) dx = 5$ et $\int_0^2 g(x) dx = 3$.

Sans calculer les primitives, déterminer :

a) $\int_0^2 3f(x) dx$

b) $\int_0^2 [f(x) + g(x)] dx$

c) $\int_0^2 [2f(x) - 4g(x)] dx$

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 9 Relation de Chasles**STANDARD**

On donne : $\int_0^3 f(x) dx = 7$ et $\int_0^5 f(x) dx = 12$.

1. Rappeler la relation de Chasles pour les intégrales.

2. En déduire $\int_3^5 f(x) dx$.

3. On sait aussi que $\int_5^8 f(x) dx = 4$. Calculer $\int_0^8 f(x) dx$.

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 11 Calculer une intégrale avec une fonction polynomiale

STANDARD

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_1^4 (x^2 + 2x) dx$

b) $\int_{-1}^2 (3x^2 - x + 1) dx$

c) $\int_0^3 \sqrt{x} dx$

Rappel : une primitive de $\sqrt{x} = x^{1/2}$ est $\frac{2}{3} x^{3/2}$ *Mes calculs :*

EXERCICE 12 Intégrale et aire — interprétation géométrique

STANDARD

On considère la fonction $f(x) = -x^2 + 9$ sur l'intervalle $[0 ; 3]$.

1. Montrer que $f(x) \geq 0$ sur $[0 ; 3]$.
2. Calculer l'aire sous la courbe $\mathcal{A} = \int_0^3 (-x^2 + 9) dx$.
3. Calculer l'aire du rectangle de base $[0 ; 3]$ et de hauteur $f(0) = 9$. Comparer avec l'intégrale.
4. En déduire la valeur moyenne de f sur $[0 ; 3]$.

Mes calculs :

EXERCICE 13 Appliquer la relation de Chasles — découpage d'intervalle**STANDARD**

On donne : $\int_1^4 f(x) dx = 8$, $\int_4^7 f(x) dx = 3$ et $\int_7^{10} f(x) dx = -2$.

1. Rappeler la relation de Chasles.

2. Calculer $\int_1^{10} f(x) dx$.

3. Calculer $\int_4^{10} f(x) dx$.

4. Que représente $\int_1^{10} |f(x)| dx$ si les portions positives et négatives ont les valeurs données ci-dessus ?

Mes calculs :

EXERCICE 14 Valeur moyenne — température d'un local**STANDARD**

Contexte : Un technicien d'agencement surveille la température (en °C) d'un atelier de vernissage qui doit être maintenue pour assurer le séchage correct des produits. La température suit le modèle $T(t) = -0,5t^2 + 4t + 18$ pour $t \in [0 ; 6]$ heures.

1. Calculer $T(0)$, $T(3)$ et $T(6)$. La température est-elle montée ou descendue ?
2. Calculer $\int_0^6 T(t) dt$.
3. En déduire la température moyenne sur les 6 heures.
4. La norme de vernissage exige une température moyenne entre 18 °C et 25 °C. L'atelier est-il conforme ?

Mes calculs :

EXERCICE 15 Linéarité de l'intégrale — application numérique

STANDARD

On sait que $\int_0^4 f(x) dx = 10$, $\int_0^4 g(x) dx = -2$ et $\int_0^4 h(x) dx = 6$.

Calculer, sans nouvelles primitives, les intégrales suivantes :

- a) $\int_0^4 [f(x) + g(x)] dx$
- b) $\int_0^4 [2f(x) - 3g(x)] dx$
- c) $\int_0^4 [f(x) + g(x) + h(x)] dx$
- d) $\int_4^0 f(x) dx$

Mes calculs :

EXERCICE 16 Aire sous une courbe — contexte professionnel

STANDARD

Contexte : Un installateur thermique étudie la courbe de charge d'une installation solaire. La puissance captée (en kW) suit le modèle $P(t) = 3t - t^2$ pour $t \in [0 ; 3]$ heures (temps mesuré à partir de 9 h du matin).

1. Calculer $P(0)$, $P(1,5)$ et $P(3)$. Interpréter la valeur $P(3)$.
2. La fonction est-elle positive sur $[0 ; 3]$? (Étudier le signe de $t(3 - t)$)
3. Calculer l'énergie captée sur ces 3 heures : $E = \int_0^3 (3t - t^2) dt$.
4. Calculer la puissance moyenne captée.

Mes calculs :

EXERCICE 17 Intégrale et débit volumique

STANDARD

Contexte : Un plombier chauffagiste mesure le débit d'eau (en litres par minute) dans un circuit de chauffage lors du remplissage. Le débit suit la loi $Q(t) = 4 - 0,5t$ pour $t \in [0 ; 8]$ minutes.

1. À quel instant le débit s'annule-t-il ?
2. Calculer le volume total d'eau qui passe dans le circuit pendant ces 8 minutes :

$$V = \int_0^8 Q(t) dt.$$

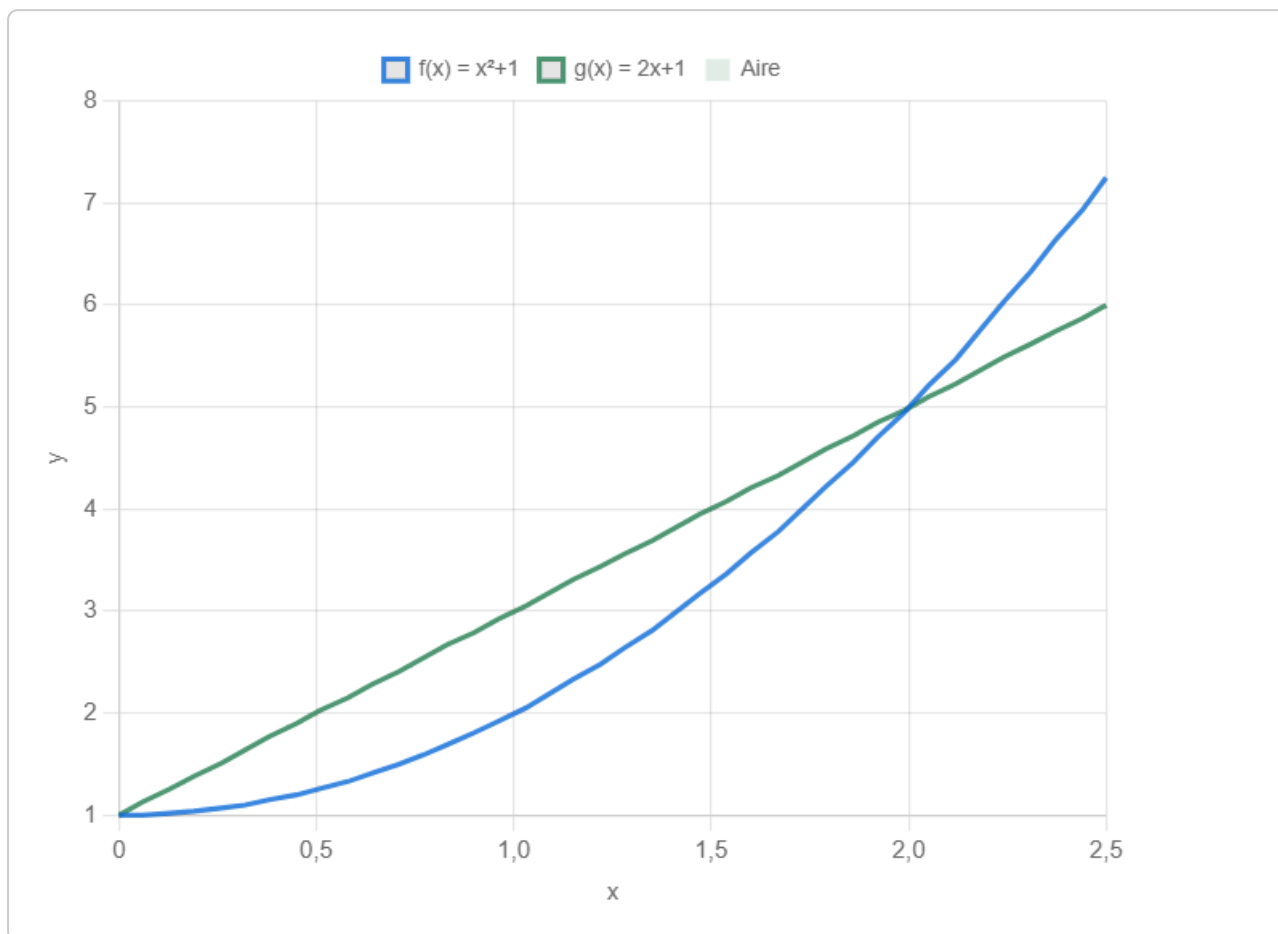
3. Interpréter le signe de l'intégrale pour $t \in [0 ; 8]$ sachant que Q change de signe en $t = 8$. (Attention : si $Q(t) < 0$, l'intégrale est négative).

Indication : calculer séparément les deux parties.

Mes calculs :

EXERCICE 10 Aire entre deux courbes**APPROFONDISSEMENT**

On considère $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = 2x + 1$ sur l'intervalle $[0 ; 2]$.



Aire entre $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = 2x + 1$ sur $[0 ; 2]$

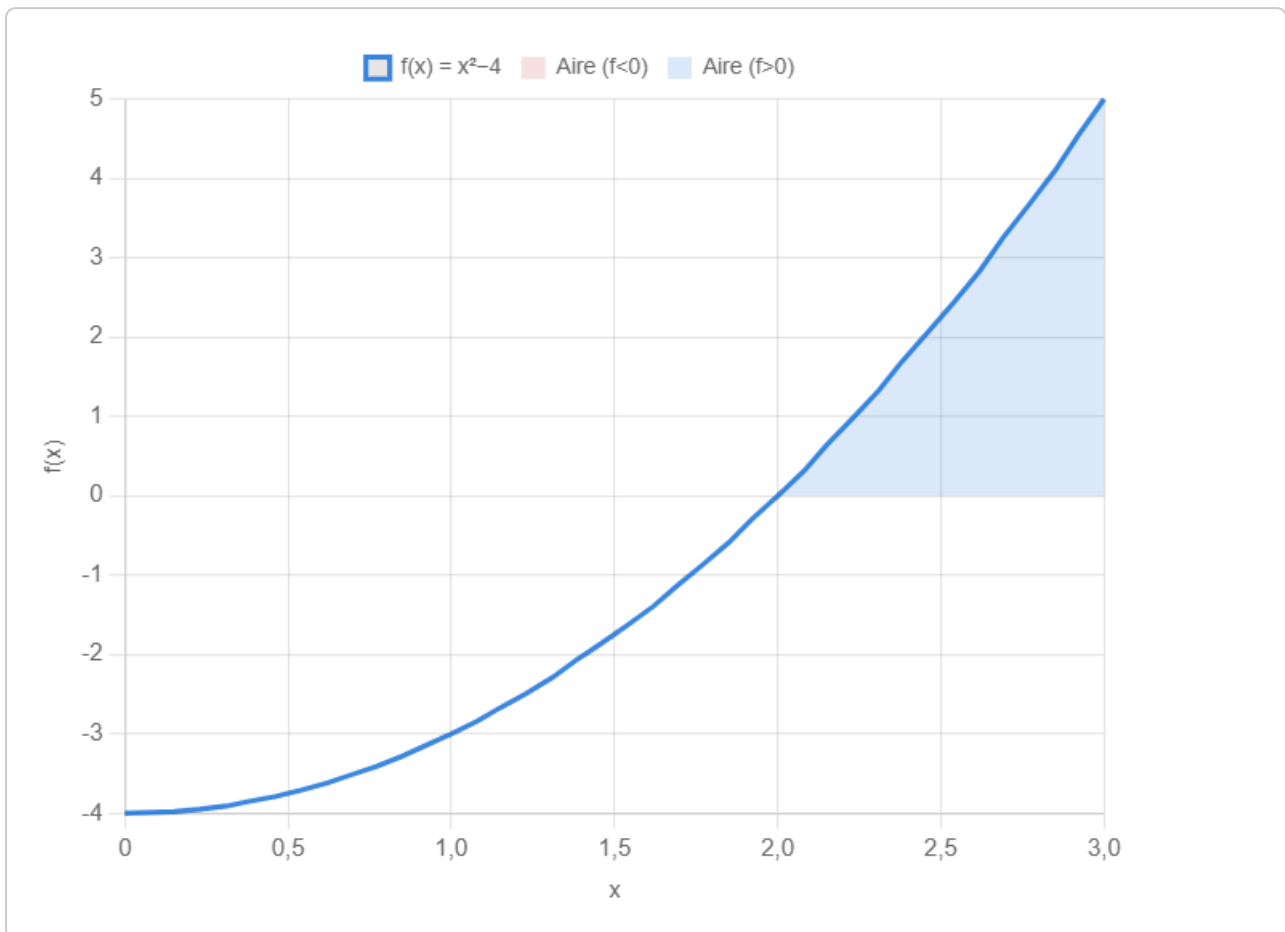
1. Calculer $f(0)$, $f(2)$, $g(0)$ et $g(2)$.
2. Pour $x \in [0 ; 2]$, quelle courbe est au-dessus ? Justifier en calculant $f(x) - g(x)$.
3. Calculer l'aire entre les deux courbes : $\mathcal{A} = \int_0^2 |f(x) - g(x)| dx$.

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 11 Aire avec changement de signe**APPROFONDISSEMENT**

On considère $f(x) = x^2 - 4$ sur l'intervalle $[0; 3]$.



Fonction $f(x) = x^2 - 4$ — changement de signe en $x = 2$

1. Résoudre $f(x) = 0$ sur $[0; 3]$. On note c la solution positive.
2. Déterminer le signe de f sur $[0; c]$ puis sur $[c; 3]$.
3. Calculer séparément $\int_0^c f(x) dx$ et $\int_c^3 f(x) dx$.
4. En déduire l'aire totale entre la courbe et l'axe des abscisses sur $[0; 3]$.

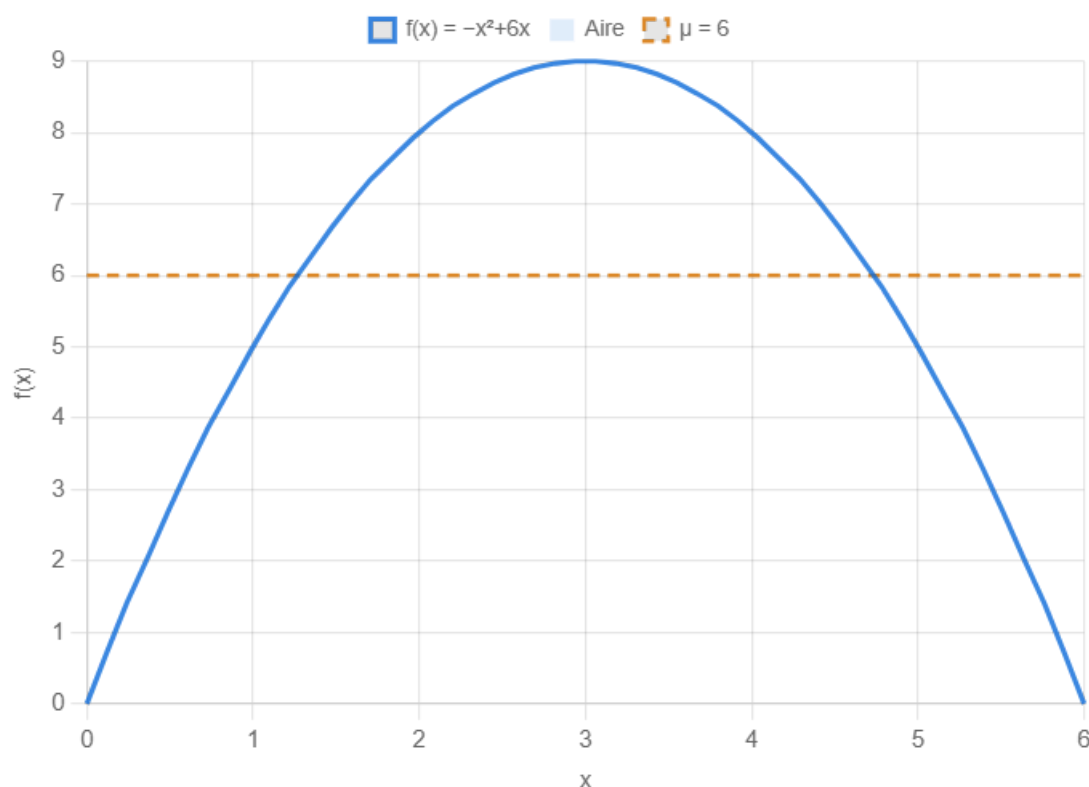
Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 12 Valeur moyenne d'une fonction**APPROFONDISSEMENT**

On considère $f(x) = -x^2 + 6x$ sur l'intervalle $[0; 6]$.

1. Rappeler la formule de la valeur moyenne μ de f sur $[a; b]$.
2. Calculer $\int_0^6 (-x^2 + 6x) dx$.
3. En déduire la valeur moyenne de f sur $[0; 6]$.
4. Interpréter graphiquement cette valeur moyenne.



Fonction $f(x) = -x^2 + 6x$ et sa valeur moyenne sur $[0; 6]$

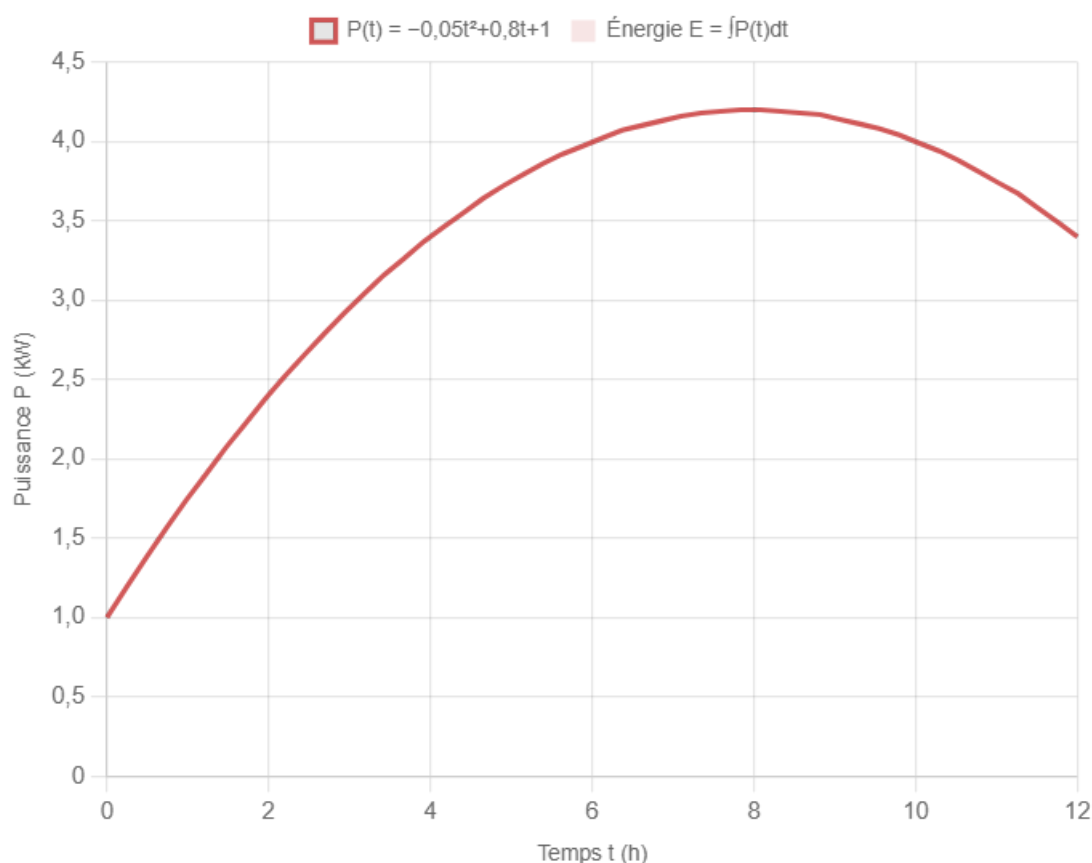
Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 13 Énergie consommée par un système de chauffage

APPROFONDISSEMENT

Contexte : Un technicien chauffagiste relève la puissance électrique $P(t)$ (en kW) d'une pompe à chaleur au cours d'une journée. Le temps t est exprimé en heures, avec $t = 0$ à 6 h du matin. La puissance suit le modèle : $P(t) = -0,05t^2 + 0,8t + 1$ pour $t \in [0 ; 12]$.



Puissance $P(t)$ (kW) de la pompe à chaleur — aire = énergie

1. Calculer $P(0)$, $P(6)$ et $P(12)$. Interpréter chaque valeur.
2. L'énergie consommée entre $t = 0$ et $t = 12$ est donnée par $E = \int_0^{12} P(t) dt$. Calculer cette énergie (en kWh).
3. Calculer la puissance moyenne sur cette période.
4. Le prix de l'électricité est de 0,18 €/kWh. Quel est le coût de fonctionnement sur ces 12 heures ?

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 14 Température moyenne d'un local technique

APPROFONDISSEMENT

Contexte : Un installateur thermique surveille la température $T(t)$ (en °C) d'un local technique pendant 8 heures. Le modèle est : $T(t) = 0,1t^2 - 1,2t + 22$ pour $t \in [0 ; 8]$, avec t en heures.

1. Calculer $T(0)$ et $T(8)$. Le local s'est-il réchauffé ou refroidi ?
2. La norme exige une température moyenne ≥ 18 °C. Calculer la température moyenne μ sur $[0 ; 8]$.
3. Le local est-il conforme à la norme ?

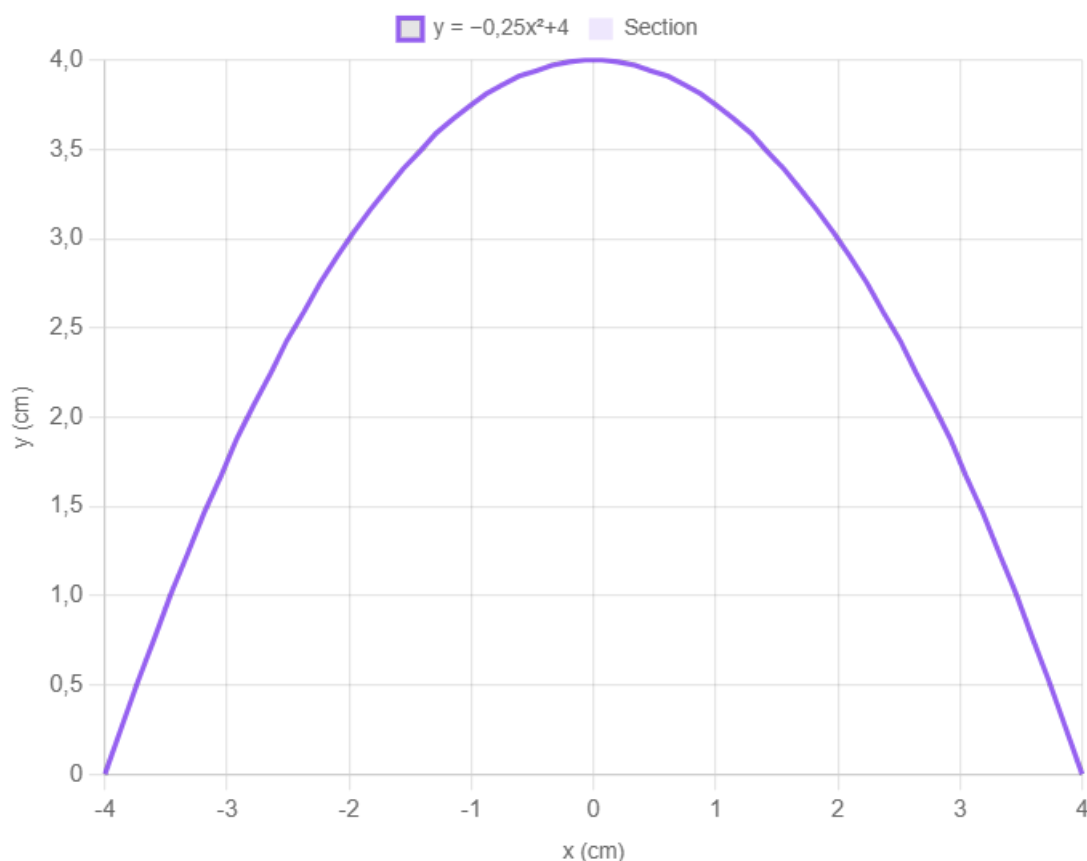
Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 15 Section et volume d'un élément en bois cintré

APPROFONDISSEMENT

Contexte : Un menuisier agenceur fabrique un habillage mural dont le profil supérieur suit la courbe $y = -0,25x^2 + 4$ (en cm), pour $x \in [-4; 4]$. La base est au niveau $y = 0$. L'habillage a une profondeur constante de 30 cm.



Profil du panneau cintré — section = aire sous la courbe

1. Vérifier que la courbe coupe l'axe des abscisses en $x = -4$ et $x = 4$.
2. Calculer l'aire de la section transversale $\mathcal{A} = \int_{-4}^4 (-0,25x^2 + 4) dx$.
3. En déduire le volume de l'habillage en cm^3 , puis en dm^3 .
4. Le bois utilisé a une masse volumique de $0,6 \text{ kg/dm}^3$. Calculer la masse de la pièce.

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 18 Aire entre deux courbes — profilé de façade

APPROFONDISSEMENT

Contexte : Un technicien d'agencement conçoit un profilé décoratif pour une façade. La section transversale est délimitée par deux courbes : la courbe supérieure $f(x) = x^2 + 2$ et la courbe inférieure $g(x) = x + 2$ sur un intervalle à déterminer.

1. Trouver les points d'intersection de f et g en résolvant $f(x) = g(x)$.
2. Sur l'intervalle trouvé, déterminer quelle courbe est au-dessus.
3. Calculer l'aire entre les deux courbes.
4. Le profilé a une longueur de 2 m. Calculer le volume de matière (en cm^3), sachant que la section est en cm^2 .

Mes calculs :

EXERCICE 19 Intégrale et bilan thermique journalier**APPROFONDISSEMENT**

Contexte : Un ingénieur thermicien calcule le bilan thermique d'un bâtiment de bureaux sur une journée. Les apports solaires $A(t)$ (en kW) et les pertes thermiques $P(t)$ (en kW) sont modélisés par des fonctions du temps t (en heures, de 0 à 24 h).

Sur la plage $[8 ; 18]$ heures (heures d'occupation) :

$$A(t) = -0,1(t - 13)^2 + 8 \text{ (apports solaires maximaux à 13 h)}$$

$$P(t) = 2 \text{ (pertes constantes)}$$

1. Calculer $A(8)$, $A(13)$ et $A(18)$.

2. Calculer l'énergie solaire totale captée : $E_A = \int_8^{18} A(t) dt$.

3. Calculer l'énergie perdue : $E_P = \int_8^{18} P(t) dt$.

4. Calculer le bilan net $E_{\text{net}} = E_A - E_P$. Le bâtiment est-il en excédent ou en déficit thermique ?

5. Pour quel(s) intervalle(s) les apports sont-ils supérieurs aux pertes ?

Mes calculs :

EXERCICE 20 Calcul de volume par intégration — solide de révolution simplifié

APPROFONDISSEMENT

Contexte : Un menuisier agenceur tourne une colonne décorative sur son tour à bois. Le profil de la colonne (rayon en cm en fonction de la hauteur x en cm) suit la loi $r(x) = 2 + 0,5\sqrt{x}$ pour $x \in [0; 16]$.

Le volume d'un solide de révolution est : $V = \pi \int_0^{16} [r(x)]^2 dx$

1. Calculer $r(0)$ et $r(16)$. Interpréter (rayon en bas et en haut de la colonne).

2. Développer $[r(x)]^2 = (2 + 0,5\sqrt{x})^2$.

3. Calculer $\int_0^{16} [r(x)]^2 dx$.

Rappel : une primitive de $\sqrt{x}$ est $\frac{2}{3}x^{3/2}$ et de x est $\frac{x^2}{2}$.

4. En déduire le volume V en cm^3 , puis en dm^3 . (Prendre $\pi \approx 3,14159$)

Mes calculs :

EXERCICE 21 Intégrale avec changement de signe — puissance nette

APPROFONDISSEMENT

Contexte : Un technicien en énergies renouvelables analyse une éolienne. La puissance nette (en kW) — différence entre la puissance produite et les pertes du réseau — suit le modèle $P(t) = t^2 - 8t + 12$ pour $t \in [0 ; 8]$ heures.

1. Calculer les racines de $P(t) = 0$. Étudier le signe de P sur $[0 ; 8]$.

2. Calculer l'intégrale algébrique $\int_0^8 P(t) dt$. Interpréter le résultat.

3. Calculer l'énergie effectivement produite (en valeur absolue) :

$$\int_0^2 P(t) dt + \left| \int_2^6 P(t) dt \right| + \int_6^8 P(t) dt.$$

4. Comment interpréter l'intervalle $[2 ; 6]$ en termes d'exploitation de l'éolienne ?

Mes calculs :

Socle

Standard

Approfondissement

Tout voir



Objectifs du chapitre

[cliquer pour développer](#)

Durée : 1 heure



Calculatrice : autorisée



Barème : 20 points



Documents : non autorisés

Exercice 1 – Primitives et intégrale définie (guidé)

10 points

1. (4 pts) Compléter le tableau des primitives suivant :

Rappel :la primitive de x^n est $\frac{x^{n+1}}{n+1}$. La primitive d'une constante k est kx .

$f(x)$	Primitive $F(x)$
4	
x	
$3x^2$	
$6x + 2$	

2. (3 pts) Calculer $\int_1^3 (6x + 2) dx$ en suivant les étapes :Étape 1 : La primitive de $6x + 2$ est $F(x) = \dots\dots\dots$ Étape 2 : $F(3) = \dots\dots\dots$

Étape 3 : $F(1) = \dots\dots\dots$

Étape 4 : $\int_1^3 (6x + 2) dx = F(3) - F(1) = \dots\dots\dots$

3. (3 pts) Calculer $\int_0^2 3x^2 dx$ en détaillant les 4 étapes.

Exercice 2 – Aire et consommation d'énergie (guidé)

10 points

Contexte : Un technicien chauffagiste mesure la puissance électrique $P(t)$ (en kW) d'un radiateur électrique pendant 4 heures. Le modèle est :

$$P(t) = -t^2 + 4t + 1 \text{ pour } t \in [0; 4].$$

1. (2 pts) Calculer $P(0)$ et $P(2)$. Interpréter.

$$P(0) = -(0)^2 + 4 \times 0 + 1 = \dots\dots$$

$$P(2) = -(2)^2 + 4 \times 2 + 1 = \dots\dots$$

2. (2 pts) La fonction $P(t)$ est-elle positive sur $[0; 4]$? Vérifier en calculant aussi $P(4)$.

3. (3 pts) L'énergie consommée est $E = \int_0^4 P(t) dt$. Calculer cette énergie en complétant :

Primitive de $P(t) = -t^2 + 4t + 1$:

$$F(t) = -\frac{t^3}{\boxed{}} + \frac{4t^2}{\boxed{}} + t = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 + t$$

$$F(4) = -\frac{64}{3} + 32 + 4 = -\frac{64}{3} + 36 = \frac{-64 + 108}{3} = \frac{44}{3}$$

$$F(0) = 0$$

$$E = F(4) - F(0) = \dots\dots \text{ kWh}$$

4. (3 pts) Calculer la puissance moyenne sur $[0; 4]$. Le prix du kWh est 0,20 €. Calculer le coût.

$$\text{Puissance moyenne : } \mu = \frac{E}{b-a} = \frac{\boxed{}}{4-0} = \dots\dots \text{ kW}$$
$$\text{Coût : } E \times 0,20 = \dots\dots \text{ €}$$

TOTAL : 20 points

Exercice 1 – Primitives et intégrales définies

7 points

1. (3 pts) Déterminer une primitive $F(x)$ de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

b) $g(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$

c) $h(x) = 2e^x$

2. (2 pts) Calculer l'intégrale $\int_1^3 (3x^2 - 4x + 1) dx$.

3. (2 pts) Calculer l'intégrale $\int_0^1 2e^x dx$. Donner la valeur exacte puis la valeur approchée au centième.

Exercice 2 – Aire sous une courbe et entre deux courbes

7 points

1. (3 pts) On considère la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0 ; 3]$. Calculer l'aire $\mathcal{A}_1$, en unités d'aire, de la surface comprise entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 3$.

2. (4 pts) On considère les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x$ sur $[0 ; 2]$.

a) Vérifier que les courbes se croisent en $x = 0$ et $x = 2$.

b) Étudier le signe de $g(x) - f(x)$ sur $[0 ; 2]$.

c) Calculer l'aire $\mathcal{A}_2$ comprise entre les deux courbes sur $[0 ; 2]$.

Exercice 3 – Énergie consommée par une chaudière (contexte professionnel)

6
points

Contexte : Un technicien chauffagiste étudie la consommation d'une chaudière au gaz pendant une journée d'hiver. La puissance en kW absorbée par la chaudière entre $t = 0$ h et $t = 8$ h (période de chauffage matinal) est modélisée par :

$$P(t) = -0,5t^2 + 4t + 12 \quad (\text{en kW, pour } t \in [0 ; 8])$$

1. (1,5 pt) Calculer la puissance à $t = 0$ h et à $t = 4$ h. Interpréter.

2. (1,5 pt) Vérifier que la puissance maximale est atteinte à $t = 4$ h en calculant $P'(t)$ et en cherchant quand $P'(t) = 0$.

3. (3 pts) L'énergie totale consommée (en kWh) sur les 8 heures est donnée par

$E = \int_0^8 P(t) dt$. Calculer cette énergie. Arrondir au dixième.

TOTAL : 20 points

Exercice 1 – Volume d'un réservoir par intégration

10 points

Contexte : Un bureau d'études conçoit un réservoir d'eau chaude dont la section transversale varie le long de sa longueur x (en dm), pour $x \in [0 ; 6]$. L'aire de la section à la position x est modélisée par $S(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 3$ (en dm²).

1. (2 pts) Calculer $S(0)$, $S(3)$ et $S(6)$. Interpréter l'évolution de la section.

2. (3 pts) Le volume du réservoir est donné par $V = \int_0^6 S(x) dx$. Calculer ce volume en dm³.

3. (2 pts) Convertir ce volume en litres. Le réservoir est-il adapté pour une installation domestique nécessitant au minimum 30 litres ?

4. (3 pts) On souhaite connaître le débit moyen Q_m (en dm³/dm) de la section le long du réservoir. Calculer la section moyenne μ_S de S sur $[0 ; 6]$. En déduire si la conception est homogène (section moyenne proche de la section médiane).

Exercice 2 – Optimisation d'un coût énergétique

10 points

Contexte : Un gestionnaire de bâtiment analyse la consommation électrique d'un système de climatisation. La puissance (en kW) sur une période de 10 heures est modélisée par $P(t) = 0,1t^2 - t + 4$ pour $t \in [0; 10]$. Le tarif heures pleines (de $t = 0$ à $t = 6$) est de 0,22 €/kWh et le tarif heures creuses (de $t = 6$ à $t = 10$) est de 0,15 €/kWh.

1. (2 pts) Vérifier que $P(t) > 0$ pour tout $t \in [0; 10]$. On pourra étudier le discriminant de $P(t) = 0$.

2. (3 pts) Calculer l'énergie consommée en heures pleines : $E_1 = \int_0^6 P(t) dt$.

3. (3 pts) Calculer l'énergie consommée en heures creuses : $E_2 = \int_6^{10} P(t) dt$. Utiliser la relation de Chasles : $E_2 = \int_0^{10} P(t) dt - E_1$.

4. (2 pts) Calculer le coût total de fonctionnement sur les 10 heures. Quel pourcentage du coût est dû aux heures pleines ?

TOTAL : 20 points