

# Equations différentielles – Fiche de cours

## 1. Notion d'équation différentielle

### a. Définition

Une équation différentielle est une relation entre une variable réelle, une fonction et ses dérivées

exemple :  $f' + f = 4$

### b. Solutions

Résoudre une équation différentielle consiste à déterminer toutes les fonctions qui vérifient sa relation.

Pour obtenir une unique fonction solution d'une équation différentielle, il convient de rajouter une condition initiale

exemple :  $f' + f = 4$  et  $f(0) = 0$  pour  $f(x) = 4 - 4e^{-x}$

## 2. Equation différentielle $y' = ay$

L'équation différentielle  $y' = ay$  est appelée équation différentielle linéaire homogène du premier ordre sans second membre.

Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$y(x) = Ce^{ax} \quad C \in \mathbb{R}$$

Pour résoudre C on utilise une condition initiale

## 3. Equation différentielle $y' = ay + b$ $a \neq 0$

Les solutions de l'équation différentielle  $y' = ay + b$  sont de la forme :

$$y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a} \quad C \in \mathbb{R}$$

Pour résoudre C on utilise une condition initiale

## 4. Equation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$

Les solutions de l'équation différentielle  $y'' + \omega^2 \cdot y = 0$  sont de la forme :

$$y(x) = A \cdot \cos(\omega x) + B \cdot \sin(\omega x) \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Pour résoudre A et B on utilise 2 conditions initiales

# Equations différentielles – Exercices - Devoirs

## Exercice 1 corrigé disponible

Résoudre les équations homogènes :

a.  $y'+y=0$     b.  $y'-3y=0$     c.  $y'=2y$     d.  $3y'=y$

## Exercice 2 corrigé disponible

Donner les solutions des équations différentielles :

a.  $y'+2y=0$     b.  $y'+2y=6$     c.  $y'-3y=9$     d.  $y'+2y=5$     e.  $2y'+3y=-7$

f.  $y' = -\frac{x}{4} + 2$

## Exercice 3 corrigé disponible

Soit (E) l'équation différentielle  $2y'+y=2$

1. Résoudre (E).
2. Déterminer la solution de (E) qui vérifie  $y(0)=1$

## Exercice 4 corrigé disponible

Soit (E) l'équation différentielle  $2y+5y'=4$

1. Résoudre (E).
2. Déterminer la solution de (E) qui vérifie  $y(5)=4$

## Exercice 5 corrigé disponible

Résoudre les équations différentielles :

a.  $y''+16y=0$     b.  $9y''+y=0$     c.  $4y''+25y=0$     d.  $y''+5y=0$

## Exercice 6 corrigé disponible

On considère l'équation (E) :  $y'-2y=0$

On note f la solution de (E) vérifiant  $f(0)=1$  et g la solution de (E) vérifiant  $g(0)=2$

Déterminer les expressions de f et g

## Exercice 7 corrigé disponible

### A. Résolution de l'équation différentielle

On considère l'équation (E) :  $y' + 0,01y = 24$ , où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur  $[0;+\infty[$ .

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E).
2. Déterminer la solution v de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale  $v(0) = 0$ .

### B. Etude d'une fonction

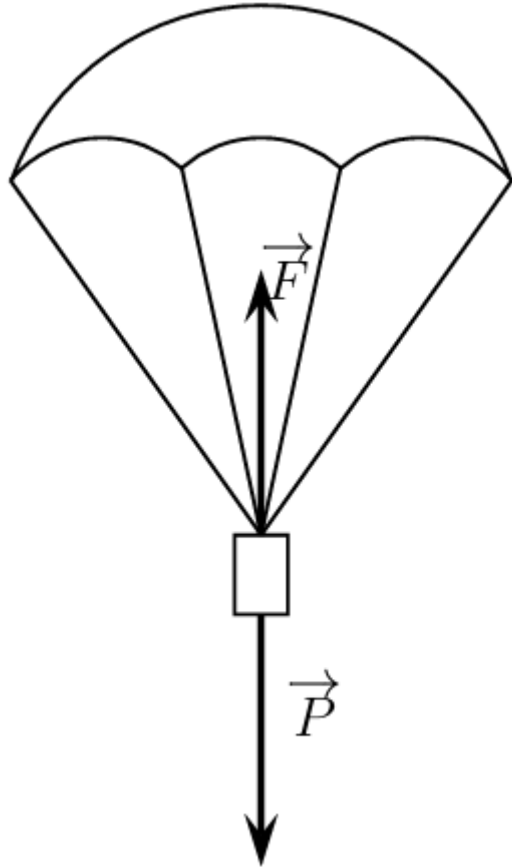
Soit v la fonction définie sur  $[0;+\infty[$  par  $v(t) = 2400(1 - e^{-0,01t})$ .

1. Déterminer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$
2. Déterminer la fonction dérivée v' de v. En déduire le sens de variation de v
3. Résoudre l'équation  $v(t) = 1200$ . Donner la valeur exacte puis approchée arrondie à  $10^{-1}$  près

## Exercice 8

La vitesse d'un objet soumis à son poids et aux frottements de l'air vérifie l'équation (E) :  $v'(t) + 1,40v(t) = 10$  où la fonction vitesse  $v$ , exprimée en  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ , est définie et dérivable sur  $[0; +\infty[$ .

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution  $v$  de (E) qui s'annule pour  $t = 0$ .
3. Etudier la limite de  $v$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . Interpréter ce résultat.
4. A quel instant  $t_1$  la bille atteint-elle 95% de sa vitesse limite ?



## Exercice 9

On note  $N(t)$  le nombre de noyaux radioactifs d'un corps à l'instant  $t$ , où  $t$  est exprimé en jours.

On admet que la fonction  $N$  est solution de l'équation différentielle (E) :  $y' = -ay$ , où  $a$  est une constante réelle.

Déterminer la fonction  $N(t)$  solution de l'équation différentielle E, sachant que  $N(0) = 10^9$ .

Au bout de 18 jours, le nombre de noyaux radioactifs a diminué de moitié. En déduire la valeur exacte de  $a$ .

Au bout de combien de jours le nombre de noyaux radioactifs deviendra-t-il inférieur à 100 ?

## Exercice 10

Un parachutiste est en chute libre dans l'air jusqu'à l'instant  $t=0$  où il ouvre son parachute. Sa vitesse est alors de  $50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

On admet par la suite que sa vitesse  $v$ , en  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ , en fonction du temps  $t$ , en s, est solution de l'équation différentielle sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  :

$$(E) : y' = -5y + 10$$

**Question 1** La fonction constante  $g$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $g(t) = 2$  est-elle une solution de l'équation différentielle (E)? Justifier la réponse.

**Question 2** Montrer que les solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  sont les fonctions  $f$  définies sur cet intervalle par  $f(t) = ke^{-5t} + 2$ , où  $k$  est un nombre réel donné.

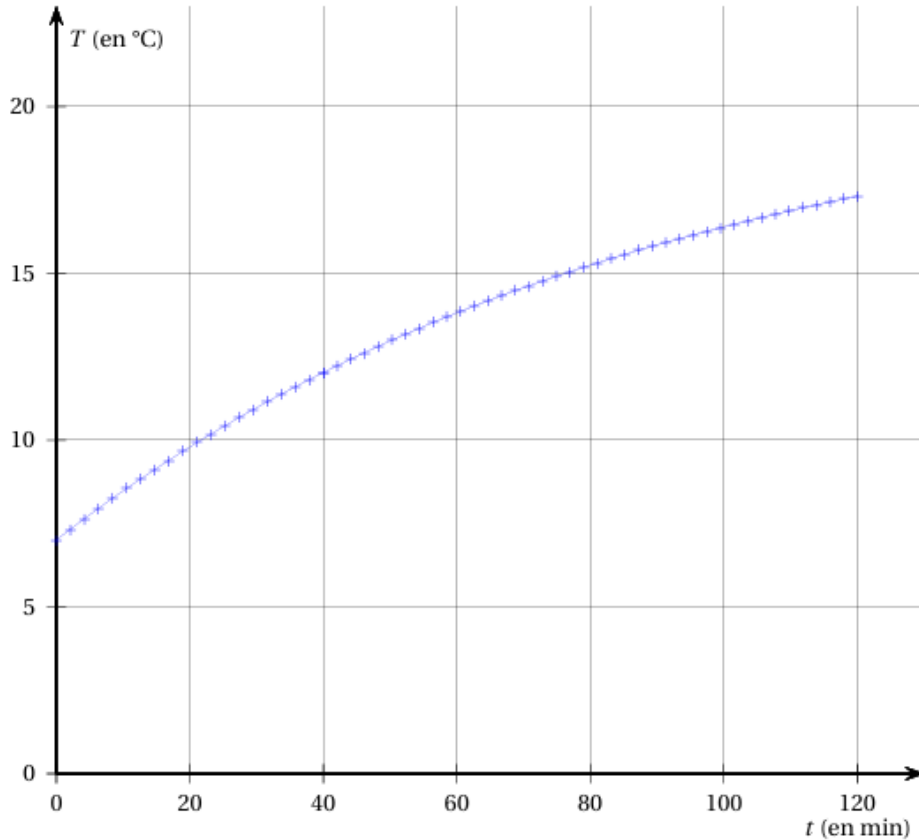
**Question 3** En admettant le résultat de la question précédente, montrer que la fonction  $v$  est donnée sur  $[0; +\infty[$  par  $v(t) = 48e^{-5t} + 2$ .

## Exercice 11

On verse, dans une tasse en porcelaine, du soda tout juste sorti du réfrigérateur. La tasse est ensuite posée sur une table.

La température de l'air ambiant est supposée constante et égale à  $21^{\circ}\text{C}$ .

On mesure la température du soda à différents instants et on trace, en utilisant les données obtenues, le graphique suivant.



1. Rappeler les trois modes de transfert thermique. Citer un exemple pour chacun d'eux

On admet que la fonction  $f$  qui modélise l'évolution de la température (en degré Celsius) du contenu de la tasse en fonction du temps  $t$  écoulé (en minute) depuis la première mesure vérifie l'équation différentielle :

$$y' = -\frac{1}{90}y + \frac{7}{30}$$

2. Sachant que  $f(0)=7$ , démontrer que, pour tout réel  $t$  positif ou nul :

$$f(t) = -14e^{-\frac{t}{90}} + 21$$

3. Calculer  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ . Interpréter ce résultat dans le contexte de l'expérience.

4. Déterminer, à partir de ce modèle, la valeur du temps  $t$  pour lequel la boisson atteint la température de  $20^{\circ}\text{C}$ . Arrondir le résultat (en minute) à l'unité.

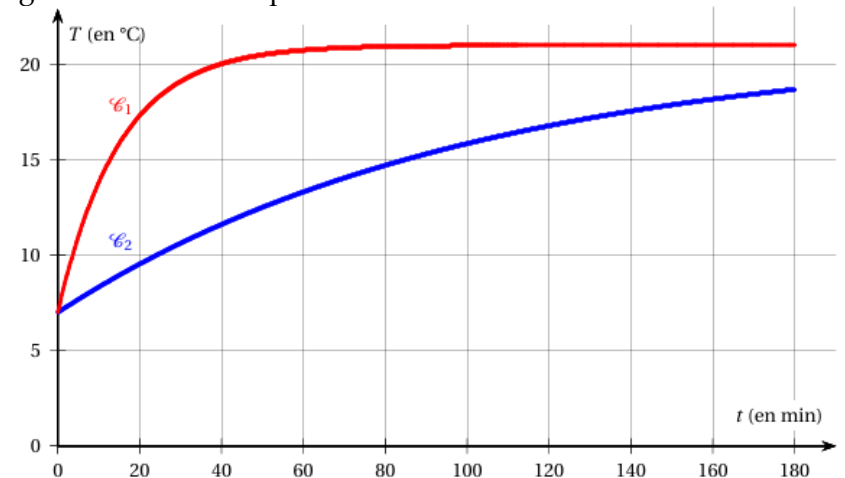
On renouvelle l'expérience en remplaçant la tasse en porcelaine par un gobelet en acier de mêmes dimensions.

Données :

— conductivité thermique de la porcelaine :  $1,0\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ;

— conductivité thermique de l'acier :  $45,6\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

5. Identifier, parmi les courbes  $C_1$  et  $C_2$  figurant ci-dessous, celle qui représente l'évolution, en fonction du temps, de la température du soda versé dans un gobelet en acier. Expliciter le raisonnement utilisé.



## Exercice 12

La réverbération est un phénomène acoustique qui désigne la persistance d'un son dans un espace clos lorsque sa source a cessé d'émettre. Pour atténuer ce phénomène, une solution consiste à installer des panneaux de matériaux absorbants acoustiques sur les murs tel que la mousse de mélamine.

Dans un modèle simple, on montre que l'intensité sonore  $I(x)$  dans une mousse de mélamine vérifie la relation :  $\frac{dI}{dx} = -\mu \cdot I(x)$  où  $\mu$  est un coefficient caractéristique du matériau.

Pour la mousse de mélamine, on a :  $\mu = 0,262 \text{ cm}^{-1}$ . Pour des valeurs de  $x$ , en cm, l'intensité acoustique  $I(x)$  peut donc être obtenue en résolvant l'équation différentielle : (E) :  $y' = -0,262y$

1. Déterminer les solutions sur  $[0; +\infty[$  de l'équation différentielle (E).

2. Montrer que la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par

$f(x) = 3,2 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-0,262x}$  est l'unique solution de (E) vérifiant la condition initiale  $f(0) = 3,2 \cdot 10^{-4}$ .

3. Résoudre sur  $[0; +\infty[$  l'équation  $e^{-0,262x} = 0,5$ . Déterminer la distance de propagation  $d$  au bout de laquelle l'intensité acoustique de l'onde est divisée par 2.