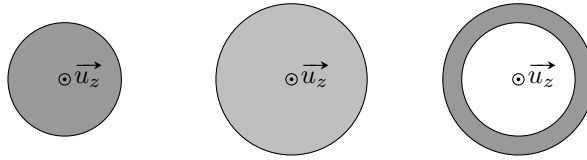


M6 : MOMENT CINÉTIQUE ET BASES DE MÉCANIQUE DU SOLIDE

Exercice 1 : Moments d'inertie

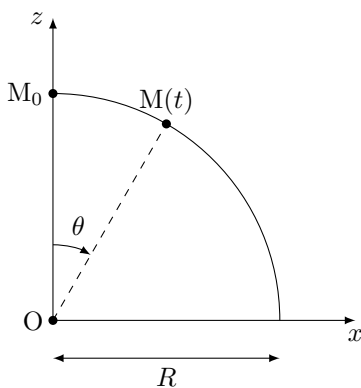
Tous les solides ci-dessous ont la même masse, répartie uniformément dans les zones grisées. Les classer par ordre croissant de moment d'inertie.



Exercice 2 : Vitesse de recul d'un pistolet

Une balle de masse 8,0 g est tirée horizontalement avec une vitesse de 352,0 m/s avec un pistolet Luger de 0,90 kg. Quelle est la vitesse de recul du pistolet ?

Exercice 3 : Piste circulaire : le retour



On considère une piste ayant la forme d'une portion de cercle de centre O de rayon R . Une bille, assimilée à un point matériel M, s'y déplace en roulant : on suppose les frottements négligeables. Sa position est repérée par l'angle θ entre l'axe (Oz) et le vecteur $OM(t)$. La vitesse initiale (en M_0) est de norme v_0 et est vers la droite.

1. Écrire l'équation différentielle sur θ par application du TMC.
2. Intégrer cette équation (en la multipliant par $\dot{\theta}$), en déduire l'expression de la vitesse en fonction de θ .
3. À l'aide d'une autre équation de la dynamique, déterminer l'expression l'expression de la réaction normale au support en fonction de θ , m et g .
4. En déduire l'angle θ_d qui marque le début du décollage (en fonction de v_0).
5. Tracer θ_d en fonction de v_0 . Indiquer la valeur limite de v_0 . Que se passe-t-il pour cette valeur ?

Exercice 4 : La marche à pied (CCP TSI 2019)

Le pas pendulaire effectué à la période propre de la jambe est le plus économe en énergie. La gravité devient l'allié naturel de nos muscles pour le déplacement.

On se propose ici de déterminer la période propre d'oscillation d'un jambe adulte en utilisant un modèle mécanique simple.

Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre supposé galiléen muni d'un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

On assimile la jambe à un solide **rigide** de masse m_0 et de longueur d en rotation autour d'un axe horizontal $(O, \vec{e}_x)$ fixe dans le référentiel d'étude. $(O, \vec{e}_x)$ passe par la hanche du randonneur (il est sortant sur la figure 1). La liaison pivot en O est supposée parfaite. Le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe $(O, \vec{e}_x)$ est noté J . On néglige tout frottement. On note H le centre d'inertie de la jambe situé à une distance d' de O. La jambe ne touche pas le sol dans cette étude. γ est l'angle entre la verticale passant par O et la droite (OH).

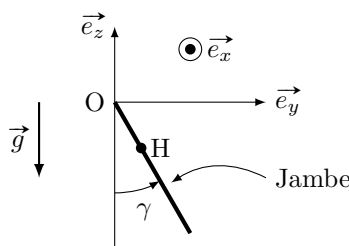


FIGURE 1 – Jambe et repère cartésien.

L'accélération de la pesanteur est notée $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ et supposée uniforme.

1. Donner sans démonstration l'expression du moment cinétique scalaire L_{Ox} , de la jambe par rapport à l'axe $(O, \vec{e}_x)$ en fonction de γ et de J .
2. Que vaut le moment par rapport à $(O, \vec{e}_x)$ de l'action mécanique de la liaison en O ? Justifier.
3. Déterminer l'expression du moment Γ_{Ox} du poids de la jambe par rapport à $(O, \vec{e}_x)$ en fonction de g , m_0 , d' et γ .
4. Établir l'équation différentielle vérifiée par γ , caractérisant le mouvement de la jambe.

L'énergie potentielle de pesanteur de la jambe s'écrit :

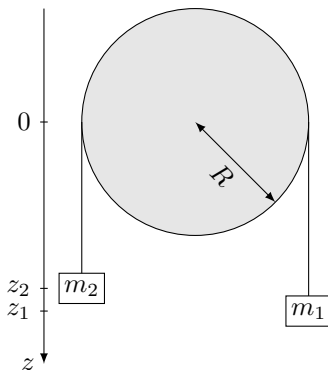
$$E_p = -m_0gd' \cos \gamma + \text{constante}$$

5. Justifier que l'énergie mécanique de la jambe se conserve au cours du temps.
6. En déduire l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par γ caractérisant le mouvement de la jambe.
7. En se plaçant dans l'approximation des petites oscillations, montrer que la période propre T d'oscillation de la jambe est :

$$T = \frac{2\pi\sqrt{J}}{\sqrt{m_0gd'}}$$

8. Le moment d'inertie est de la forme $J = km_0d^2$, où k est une constante positive. Le centre d'inertie se situe à mi-hauteur de la jambe. En déduire que la période propre T de la jambe est indépendante de la masse et qu'elle est proportionnelle à la racine carrée de la longueur de la jambe.
9. Un randonneur adulte a une jambe d'environ 90 cm. La période propre d'oscillations de sa jambe est de 1,6 s. Quelle est la période propre d'oscillations de la jambe d'un randonneur enfant dont la jambe mesure environ 40 cm ?
10. À l'aide d'une description simple du pas effectué, montrer que la vitesse du randonneur, lorsqu'il respecte sa période d'oscillations naturelle, est proportionnelle à la racine carrée de la longueur de sa jambe. Montrer alors que la vitesse « naturelle » de l'enfant est environ 1,5 fois moins grande que celle de l'adulte.

Exercice 5 : Machine d'Atwood



On considère la machine d'Atwood schématisée ci-contre : deux masses m_1 et m_2 sont suspendues de part et d'autre d'une poulie de rayon R , autour de laquelle un fil s'enroule. Calculer $z_2(t)$, hauteur de la masse m_2 . On notera J le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe de rotation. On négligera la masse du fil. Par ailleurs, on supposera que le fil est inextensible et qu'il ne peut pas glisser. Enfin, la liaison pivot suspendant la poulie est parfaite.

Exercice 6 : Chute d'un arbre

On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m . On le tronçonne à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'abscisse reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. À $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5^\circ$ avec la verticale et est immobile. On donne le moment d'inertie par rapport à son extrémité $I = mL^2/3$.

1. Établir l'équation du mouvement de chute de l'arbre.
2. Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ , avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut

$$\dot{\theta} = \sqrt{3g(\cos \theta_0 - \cos \theta)/L}$$

3. Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On prendra $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et on prendra

$$\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}} = 5,1$$