

Feuille d'exercices 6

Ensembles, logiques et fonctions

— **Exercice 1** ●○○ — **Ensembles en extension** Ecrire les ensembles suivants en extension :

1. L'ensemble des nombres premiers entre 1 et 20.
2. l'ensemble $\{r \in \mathbb{Q} \mid r = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leq p \leq 4, q \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leq q \leq 2p\}$.

— **Exercice 2** ●●○ — **Ensembles en compréhension** Ecrire les ensembles suivants en compréhension :

1. L'ensemble des nombres entiers pairs.
2. Etant données deux points A et B distincts du plan, l'ensemble des points de la droite (AB) (utiliser le vecteur $\overrightarrow{AB}$).
3. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables et de dérivée continue (c'est-à-dire qui sont dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$), dont la courbe est au dessus de toutes ses tangentes.

Correction :

Méthode :

1. Un nombre n pair s'écrit $n = 2p$, mais il faut quantifier p .
2. Pour $M \in (AB)$, que dire du vecteur $\overrightarrow{AM}$?
3. Commencer par écrire l'équation de la tangente en un point fixé.

Détails :

1. Notons $\mathcal{P}$ cet ensemble, on a

$$\mathcal{P} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p\}.$$

2. On a

$$(AB) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AB}\} = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}\}.$$

On peut aussi travailler avec des coordonnées, mais c'est plus lourd.

3. Notons F l'ensemble cherché. Pour f dérivable, et $a \in \mathbb{R}$ fixé, l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a est

$$y = f(a) + (x - a)f'(a).$$

Ainsi,

$$F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid \forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a)\}.$$

On a vu au lycée que ces fonctions sont dites “convexes”, et qu'on a $f'' \geq 0$ si f est deux fois dérivable, mais cela n'est pas au programme de PTSI.

— **Exercice 3** ○○○ — **Opérations ensemblistes sur des exemples faciles** Pour chacun des cas suivants, on se donne un ensemble E et des sous-ensembles A et B . Déterminer les ensembles $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\mathcal{C}_E A$.

1. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$ et $B = \{1, 2, 4, 5\}$.
2. $E = \mathbb{R}$, $A =]3, +\infty[$ et $B = [-4, +\infty[$
3. $E = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{N}$ et $B = \llbracket -3, 2 \rrbracket$ (nombre entiers entre -3 et 2). Ne pas hésiter à mixer les notations par exemple en compréhension.

Correction :

Méthode :

RAS, on applique les defs.

Détails :

1. On a

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad A \cap B = \{1, 3, 5\}, \quad A \setminus B = \{3\}, \quad B \setminus A = \{2, 4\}, \quad \mathcal{C}_E A = \{2, 4, 6\}.$$

2. On a

$$A \cup B = [-4, +\infty[, \quad A \cap B =]3, +\infty[, \quad A \setminus B = \emptyset, \quad B \setminus A = [-4, 3], \quad \mathcal{C}_E A =]\infty, 3].$$

3. On a

$$A \cup B = \{n \in E \mid n \geq -3\}, \quad A \cap B = \{0, 1, 2\},$$

puis

$$A \setminus B = \{n \in E \mid n \geq 3\}, \quad B \setminus A = \{-3, -2, -1\}, \quad \mathcal{C}_E A = \{n \in E \mid n \leq -1\}$$

— **Exercice 4** ●●○ — Des conditions pour l'inclusion

Soit E un ensemble, et A et B deux parties de E .

1. Montrer que $A \cup B = B \iff A \subset B$.
2. Montrer que $A \cap B = B \iff B \subset A$.
3. Montrer que $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$.
4. Soit C un troisième élément de $\mathcal{P}(E)$. Montrer que

$$(A \setminus B) \setminus (C \setminus B) = A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Correction :

Méthode :

1. Utiliser qu'on a toujours $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ par définition de l'union.
2. Ressemble à la précédente, bon entraînement si on a eu des difficultés.
3. Le plus efficace est d'utiliser que $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ et les règles sur l'intersection, l'union et le complémentaire. L'énoncé fait peur. Utiliser la même technique qu'à la question précédente.

Détails :

1. Montrons le sens direct. Supposons que $A \cup B = B$. Or on a toujours $A \subset A \cup B$, ainsi, $A \subset B$.
Montrons la réciproque. Supposons que $A \subset B$. On a déjà $B \subset A \cup B$. Soit $x \in A \cup B$. Ou bien $x \in A$, et comme $A \subset B$, on a $x \in B$, ou bien $x \in B$. Dans tous les cas, $x \in B$. Cela prouve que $A \cup B \subset B$. Par double inclusion, $A \cup B = B$.
2. Montrons le sens direct. Supposons que $A \cap B = B$. On a toujours $A \cap B \subset A$ d'où $B \subset A$.
Montrons la réciproque. Supposons $B \subset A$. On a déjà $A \cap B \subset B$. Soit $x \in B$, alors comme $B \subset A$, on a aussi $x \in A$, d'où $x \in A \cap B$. Cela prouve $B \subset A \cap B$, et par double inclusion, $A \cap B = B$.
3. On a

$$A \setminus A \cap B = A \cap \overline{A \cap B} = A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B} = A \setminus B.$$

La preuve marche aussi assez bien avec des quantificateurs.

4. On a (formules du cours rappelées avec des ensembles X , Y et Z quelconques) :

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \setminus (C \setminus B) &= (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C \setminus B} \\ &= (A \cap \overline{B}) \cap (\overline{C} \cup B) \text{ car } \overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y} \text{ et } \overline{\overline{X}} = X \\ &= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap B) \text{ car } X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \\ &= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup \emptyset = A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \\ &= A \cap (\overline{B \cup C}) \end{aligned}$$

$$= A \setminus (B \cup C)$$

Pour montrer la deuxième formule, on repart de la forme synthétique avec les intersections (qui est la plus lisible et simple à dessiner) :

$$(A \setminus B) \setminus (C \setminus B) = A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

— **Exercice 5** ●●● — **Différence symétrique** Soit E un ensemble, et A et B des parties de E . On appelle différence symétrique de A et de B , l'ensemble $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1. Faire un diagramme.
2. Déterminer $A \Delta A$, $A \Delta \emptyset$ et $A \Delta E$.
3. Montrer que $A \Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

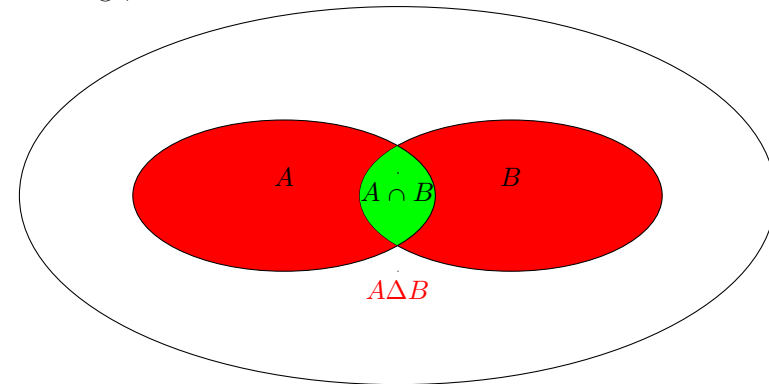
Correction :

Méthode :

1. Schéma classique avec $A \cup B$ et $A \cap B$.
2. Ras on applique la définition.
3. Utiliser que pour deux ensembles X et Y , on a $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$.

Détails :

1. En rouge, l'ensemble $A \Delta B$:



2. On $A \cup A = A \cap A = A$ d'où $A \Delta A = A \setminus A = \emptyset$.
On a $A \cup \emptyset = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$ d'où $A \Delta \emptyset = A \setminus \emptyset = A$.
On a $A \cup E = E$ et $A \cap E = A$ d'où $A \Delta E = E \setminus A = A^c$.
3. On se sert de la définition :

$$A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}).$$

On déroule alors les règles de passage au complémentaire et de distribution des unions et intersections :

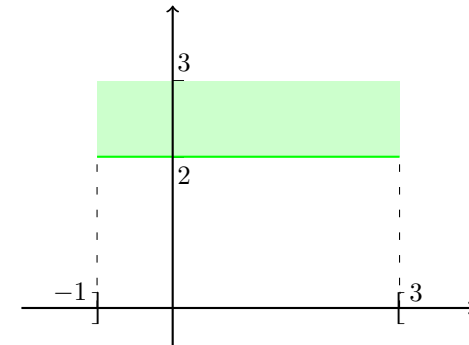
$$A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = ((A \cup B) \cap \overline{A}) \cup ((A \cup B) \cap \overline{B}) = (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})$$

— **Exercice 6** ●● — **Une équation ensembliste** Dans un ensemble E , A et B étant donnés, on considère l'équation

$$A \cup X = B,$$

d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette équation ait des solutions (on pourra procéder par analyse-synthèse).
2. Faire de même avec l'équation $A \cap X = B$ (un peu plus dur).



— **Exercice 7** ●● — **Produit cartésien dans le plan**

1. Dessiner les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$, et dire s'ils peuvent s'écrire comme un produit cartésien de deux ensembles de $\mathbb{R}$ (on essaiera de faire une démonstration lorsque ce n'est pas le cas).

a. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 < x < 3 \text{ et } 2 \leq y < 3\}$.

b. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2 \leq x < 4 \text{ et } y = 3\}$.

c. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2 \leq x < 4 \text{ et } y = 3x + 1\}$.

d. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2. Soient p_1 et p_2 les deux fonctions définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $p_1(x, y) = x$, et $p_2(x, y) = y$.

- a. Déterminer les images (images "ensemblistes") par p_1 et p_2 de chacun des ensembles de la question précédente.

- b. Soient a et b deux réels avec $a < b$. Déterminer et représenter les images réciproques $p_1^{-1}(\{a\})$ et $p_2^{-1}([a, b])$.

- c. Les applications p_1 et p_2 sont-elles injectives ? surjectives ?

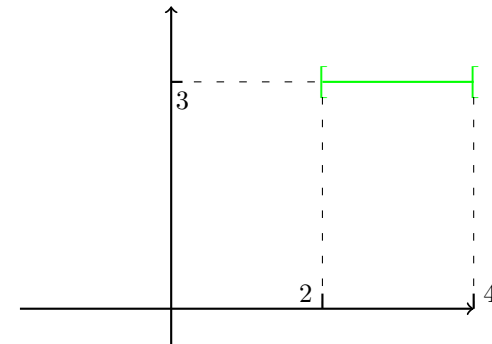
Correction :

Méthode :

Détails :

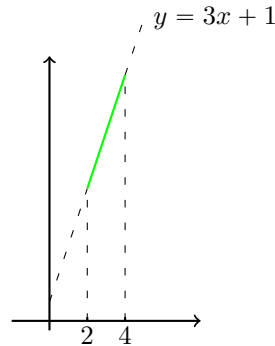
1. a. On a $E =]-1, 3[\times]2, 3[$, il s'agit d'un produit cartésien. Ci-dessous, l'ensemble E (il s'agit d'un rectangle, dont seul le bord du bas est contenu dans l'ensemble, ce qui correspond à l'inégalité large $2 \leq y$).

- b. On a $F = [2, 4[\times \{3\}$, il s'agit d'un produit cartésien. Ci-dessous, l'ensemble F (il s'agit d'un segment, fermé à gauche et ouvert à droite).



- c. Il semble y avoir un problème selon les ordonnées. Supposons par l'absurde que G soit un produit cartésien : $G = I \times J$ avec $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$. On a $(2, 7) \in G$, donc on a $2 \in I$ et $7 \in J$. On a aussi $(3, 10) \in G$ donc $3 \in I$ et $10 \in J$. On devrait avoir $(2, 10) \in G$, ce qui n'est pas le cas, car $10 \neq 3 \times 2 + 1$. On a une contradiction, donc G n'est pas un produit cartésien.

Ci-dessous, l'ensemble G (il s'agit d'un segment oblique, fermé en bas à gauche et ouvert en haut à droite).



d. Ce n'est pas un produit cartésien, on peut faire la même preuve que ci-dessus en utilisant les points $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Il s'agit du cercle trigonométrique, à vous de le dessiner.

2. Soient p_1 et p_2 les deux fonctions définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $p_1(x, y) = x$, et $p_2(x, y) = y$.

a. On a directement $p_1(E) =]-1, 3[$ et $p_2(E) = [2, 3[$.

On a directement $p_1(F) = [2, 4[$ et $p_2(F) = \{3\}$.

On pense que $p_1(G) = [2, 4[$, en effet, il est clair que $p_1(G) \subset [2, 4[$. Réciproquement, soit $x \in [2, 4[$, alors $(x, 3x + 1) \in G$, et $p_1(x, 3x + 1) = x$. Cela prouve que $[2, 4[\subset p_1(G)$.

Pour $p_2(G)$, on ne peut le "lire" directement. Un dessin permet d'intuiter que $p_2(G) = [7, 13[$ (ce sont les valeurs "extrêmes" prises par y). Démontrons-le :

$$x \in [2, 4[\iff 7 \leq 3x + 1 < 13.$$

Cela montre que $p_2(G) \subset [7, 13[$. Réciproquement, soit $y \in [7, 13[$, alors $x = \frac{y-1}{3}$ vérifie bien $y = 3x + 1$. De plus, $y \in [7, 13[\iff 2 \leq \frac{y-1}{3} < 4$. Cela prouve :

$$\forall y \in [7, 13[, \quad \left(\frac{y-1}{3}, y\right) \in G$$

et donc, puisque $p_2(\frac{y-1}{3}, y) = y$, cela donne $[7, 13[\subset p_2(G)$. Finalement,

$$p_2(G) = [7, 13[.$$

Pour H , on procède de même. Un dessin permet d'intuiter que $p_1(H) = p_2(H) = [-1, 1]$. En effet, si $(x, y) \in H$, on a $x^2 = 1 - y^2 \leq 1$ et donc $x \in [-1, 1]$, et on a raisonnement similaire pour y . Cela prouve que $p_1(H) \subset [-1, 1]$ et $p_2(H) \subset [-1, 1]$. Réciproquement, soit $x \in [-1, 1]$, on doit trouver un point de H dont x est l'abscisse. On pose $y = \sqrt{1 - x^2}$, on a bien $(x, y) \in H$. Cela prouve que $p_1(H) \subset [-1, 1]$, et donc $p_1(H) = [-1, 1]$. On prouve de même que $p_2(H) = [-1, 1]$.

b. L'ensemble $p_1^{-1}(\{a\})$ est

$$p_1^{-1}(\{a\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid p_1(x, y) = a\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a\}$$

Il s'agit de la droite d'équation $x = a$.

L'ensemble $p_2^{-1}([a, b])$ est :

$$p_2^{-1}([a, b]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid p_2(x, y) \in [a, b]\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b\}.$$

Il s'agit d'une bande horizontale (infinie) délimitée par les droites d'équations $y = a$ et $y = b$.

c. Les applications ne sont pas injectives, car $p_1(0, 0) = p_1(0, 1) = 0$ (il y a plein d'autres contre-exemples), et de même $p_2(0, 0) = p_2(1, 0) = 0$.

Elles sont bien surjectives : par exemple,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x = p_1(x, 0).$$

Ainsi tout $x \in \mathbb{R}$ a au moins un antécédant par p_1 (il en a même une infinité, qui forment une droite!). On justifie de même que p_2 est surjective.

— **Exercice 8** ••• — **Composée n^e** Soient $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définies par $g(x) = x + 1$, et $h : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = \frac{x}{x+2}$.

Pour un ensemble E et une fonction $f : E \rightarrow E$, et un entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la composée n^e

$$f^n = f \circ \dots \circ f,$$

avec la convention que $f^0 = \text{Id}_E$. Cette définition est faite par récurrence.

1. Déterminer g^n .

2. Peut-on définir $h \circ h$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$?

3. On note h_0 la restriction de h à $[-1, +\infty[$. Montrer que l'on peut définir $h_0 \circ h_0$, puis h_0^n .

4. Calculer h_0^n .

Correction :

Méthode :

1. S'échauffer en calculant $g^2 = g \circ g$ puis intuiter le résultat. Prouver une formule qui dépend de $n \in \mathbb{N}$? une récurrence s'impose.

Détails :

1. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g^2(x) = g(g(x)) = g(x) + 1 = x + 1 + 1 = x + 2.$$

On intuite que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g^n(x) = x + n.$$

Cette propriété se montre par une récurrence directe.

2. Ici la subtilité de l'énoncé entre en jeu : est-on bien sûr de pouvoir composer ? La réponse est non, car la fonction h n'est pas définie en -2 . Or il est possible que $h(x) = -2$: après une rapide résolution, on a en effet $h(-\frac{4}{3}) = -2$. Une manière maladroite de dire les choses est que « $-\frac{4}{3}$ est une valeur interdite pour $h \circ h$ ».
3. Puisque $-\frac{4}{3} \in [-2, -1]$, le problème précédent semble disparaître si on définit h sur $[-1, +\infty[$. Mais pourquoi cet intervalle-ci ? et pourra-t-on définir $h \circ h \circ h$? La clef est de tracer les variations de h sur $[-1, +\infty[$ avec un tableau. Même pas besoin de dériver : on écrit

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} : h(x) = \frac{x+2-2}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2},$$

ce qui permet de dire que la fonction h est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. On déduit :

$$\forall x \geq -1, \quad h(x) \geq h(-1) = -1$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in [-1, +\infty[, \quad h(x) \in [-1, +\infty[.$$

On dit que l'intervalle $[-1, +\infty[$ est stable par h . Ainsi, $h_0 = h|_{[-1, +\infty[}$ est à valeurs dans $[-1, +\infty[$, et on peut la composer avec-elle même. On peut aussi définir par récurrence la composée n^e .

4. On s'échauffe en calculant h_0^2 voire h_0^3 . On a

$$\forall x \in [-1, +\infty[, \quad h_0^2(x) = h_0(h_0(x)) = h_0\left(\frac{x}{x+2}\right) = \frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{x}{x+2}+2} = \frac{x}{x+2(x+2)} = \frac{x}{3x+4}.$$

On a de même :

$$\forall x \in [-1, +\infty[, \quad h_0^3(x) = h_0(h_0^2(x)) = \frac{\frac{x}{3x+4}}{\frac{x}{3x+4}+2} = \frac{x}{7x+8}.$$

Notez que « formellement », on a deux valeurs interdites qui sont apparues $-\frac{4}{3}$ et $-\frac{8}{7}$. Mais elles ne sont pas dans l'ensemble de définition de h_0 , ouf !

On intuite la formule

$$\forall n \geq 1, \quad \forall x \in [-1, +\infty[, \quad h_0^n(x) = \frac{x}{(2^{n-1}-1)x+2^{n-1}}.$$

Celle-ci se prouve par récurrence directe (preuve laissée à l'élève).

— **Exercice 9** ●○○ — **Injective ou surjectives ?** Dire si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives :

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = |x| + |x+1|$.

2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^3, 2y-1)$.

3. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(z) = |z|$.

Correction :

Méthode :

1. La fonction est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, mais toutes les valeurs sont-elles “atteintes” ? Etablir son allure permet de tout comprendre.
2. Ici la fonction dépend de deux variables, et la notation y est déjà “squattée” par l'énoncé. L'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}^2$, fixer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et résoudre $(a, b) = f(x, y)$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
3. Question facile si on connaît bien les propriétés du module.

Détails :

1. On enlève les valeurs absolues en distinguant trois cas :

- Si $x \in]-\infty, -1]$, on a $f(x) = -x - (x+1) = -2x-1$.
- Si $x \in [-1, 0]$, on a $f(x) = -x + (x+1) = 1$.
- Si $x \in [0, +\infty[$, on a $f(x) = x + (x+1) = 2x+1$.

En particulier (tracer la fonction) :

- Pour tout $x \in [-1, 0]$, on a $f(x) = 1$, donc la fonction n'est pas injective.
- Le minimum de la fonction est 1, donc les nombres dans $[0, 1[$ n'ont pas d'antécédents, et la fonction n'est pas surjective.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on résout $(a, b) = f(x, y)$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$(a, b) = f(x, y) \iff \begin{cases} a = x^3 \\ b = 2y-1 \end{cases}.$$

La deuxième équation a une unique solution : $y = \frac{1}{2}(b+1)$. Pour la première, on remarque, par une application directe du théorème de la bijection, que la fonction $x \mapsto x^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists ! x \in \mathbb{R}, \quad a = x^3.$$

Finalement, l'équation $(a, b) = f(x, y)$ possède une unique solution $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Cela prouve que f est bijective.

Pour aller plus loin : Notez qu'ici on a en fait montré que les fonctions coordonnées $x \mapsto x^3$ et $y \mapsto 2y-1$ sont bijectives, ce qui rend f bijective. La situation devient plus compliquée pour une fonction f dont les coordonnées couplent (“mélagent”) les variables x et y . On étudiera en détails le cas des fonctions “linéaires” au S2.

3. Notons que $f(1) = f(-1)$ (et plus généralement, pour tout complexe de la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a $f(z) = r$). Cela prouve que f n'est pas injective. Par contre, si $y \in \mathbb{R}_+$, on a $f(y) = |y| = y$ ce qui prouve que y a un antécédant (et plus généralement, les antécédants de y forment le cercle de centre O et de rayon y). Donc f est surjective.

— **Exercice 10** ●●○ — **Avec l'inversion** Soit la fonction $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

1. Dire si f est injective, surjective, bijective.
2. Déterminer l'image $f(\mathbb{R}_+^*)$.
3. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.
4. On note $i\mathbb{R}$ la droite des complexes de partie réelle nulle. Déterminer $f^{-1}(i\mathbb{R})$.

Correction :

Méthode : On applique les différentes définitions du cours :

1. On peut répondre à ces trois questions en résolvant pour $a \in \mathbb{C}$ donné (un élément de l'ensemble d'arrivée) l'équation

$$a = f(z)$$

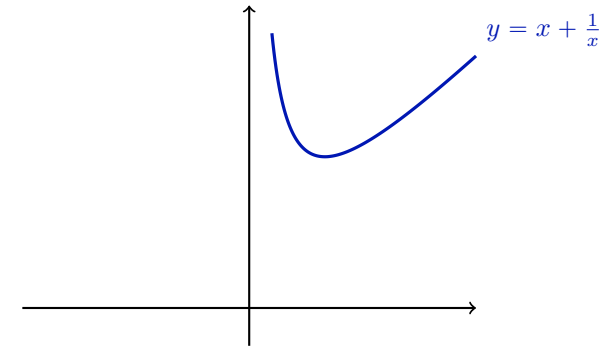
d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$ (l'ensemble de départ).

On rappelle que

- S'il y a toujours une solution, f est surjective,
 - S'il n'y a jamais plus d'une solution, f est injective,
 - Si on a les deux cas précédents, f est bijective.
2. Ici on ne donne à f que des valeurs réelles strictement positives, on peut donc "lire" l'image grâce à un tableau de variations. Cette méthode ne marche pas si on n'est pas dans le cadre des fonctions réelles !
 3. Résoudre l'équation $f(z) = 0$.
 4. Résoudre $f(z) \in i\mathbb{R}$. On peut par exemple résoudre $\operatorname{Re}(f(z)) = 0$ si on n'est pas inspiré.

Détails :

1. On résout $f(z) = a$, pour a fixé ce qui équivaut à $z^2 = az - 1$. Cette équation a toujours au moins une solution donc la fonction est surjective, mais elle peut en avoir 2 distinctes (dès que $a^2 - 4 \neq 0$), donc elle n'est pas injective. Elle n'est donc pas bijective.
2. On étudie la fonction f , restreinte à $]0, +\infty[$. Par un calcul de dérivée, la fonction a un minimum en 1, lequel vaut $f(1) = 2$. Par lecture du tableau de variation, l'image vaut $[2, +\infty[$. Traçons pour mieux comprendre :



3. On résout $f(z) = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$, c'est-à-dire

$$z + \frac{1}{z} = 0 \iff z^2 + 1 = 0 \iff z = \pm i.$$

Ainsi :

$$f^{-1}\{0\} = \{-i, i\}.$$

4. En l'absence d'idée, on pose $z = a + ib$, de sorte que

$$f(z) = a + ib + \frac{a - ib}{a^2 + b^2},$$

et $\operatorname{Re}(f(z)) = a + \frac{a}{a^2 + b^2}$. Ainsi,

$$f(z) \in i\mathbb{R} \iff a + \frac{a}{a^2 + b^2} = 0 \iff a(1 + \frac{1}{a^2 + b^2}) = 0.$$

Or $1 + \frac{1}{a^2 + b^2} > 0$. Ainsi, $f(z) \in i\mathbb{R} \iff a = 0$. Conclusion :

$$f^{-1}(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R} \cap \mathbb{C}^* = i\mathbb{R}^*.$$

— **Exercice 11** ●○○ — **Avec les chiffres des nombres**

1. On considère la fonction $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui à un entier associe la somme de ses chiffres.
 - a. Dire si S est injective, surjective, bijective.
 - b. Déterminer la valeur maximale de $a \in \mathbb{N}$ tel que la restriction de S à $\llbracket 32, a \rrbracket$ soit une injection.
2. On considère la fonction $D : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui à un entier associe son dernier chiffre.
 - a. Dire si D est injective, surjective, bijective.
 - b. Donner l'image de D . Proposer une restriction de D qui soit une bijection sur cette image.

Correction :**Méthode :**

RAS, on applique les défs.

Détails :

1. a. Il est clair que S n'est pas bijective puisque

$$S(11) = 2 = S(2).$$

Par contre, on peut se semander si S est surjective. On a $S(0) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on fabrique le nombre m comme étant le nombre avec n fois le chiffre 1. En terme littéral,

$$m = \sum_{k=0}^{n-1} 10^k.$$

Alors on a bien $S(m) = n$. Cela prouve que f est surjective.

Comme S n'est pas injective, elle n'est pas bijective.

- b. On vérifie que S a des images toutes distinctes sur $\llbracket 32, 40 \rrbracket$, tandis que $S(41) = S(32) = 5$. Ainsi, la valeur cherchée de a est $a = 40$.

2. a. Il est clair que S n'est pas injective puisque

$$D(11) = 1 = D(1).$$

La fonction D est à valeurs dans $\llbracket 0, 9 \rrbracket$ et n'est donc pas surjective.

Elle n'est pas bijective.

- b. L'image de D est $\llbracket 0, 9 \rrbracket$ puisque :

$$\forall n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket, \quad D(n) = n.$$

Si on pose $A = \llbracket 0, 9 \rrbracket$, alors D restreinte à A est bien bijective, de A dans $\llbracket 0, 9 \rrbracket$ (en fait il s'agit de la fonction identité).

On aurait pu s'amuser à poser $A = \llbracket p, p+9 \rrbracket$, pour un p fixé.

— **Exercice 12 ••• — Image d'une intersection** On a vu dans le cours que si E et F sont deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une fonction, alors pour toutes parties A et B de E , on a

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

- On suppose de plus que f est injective. Montrer qu'alors pour toutes parties A et B de E , on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
- On suppose maintenant que f n'est pas injective. Exhiber A et B tels que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

3. Qu'avons nous démontré ?

Correction :**Méthode :**

- Commencer par "matérialiser" un élément de $f(A) \cap f(B)$, puis utiliser que si $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$.
- Si $x \neq x'$, que vaut $\{x\} \cap \{x'\}$?
- Faire le bilan.

Détails :

1. Supposons que f est injective, et montrons que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.
Soit $y \in f(A) \cap f(B)$, alors

$$\exists x \in A, y = f(x) \quad \text{et} \quad \exists x' \in B, y = f(x').$$

En particulier, $f(x) = y = f(x')$, et puisque f est injective, on a $x = x'$. Ainsi, $x \in B$ et donc $x \in A \cap B$, puis $y = f(x) \in f(A \cap B)$.

Cela prouve que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

2. Supposons donc que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$, et ce pour tout sous-ensembles A et B de E . Pour montrer que f est injective, on se donne deux éléments x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$. On pose $A = \{x\}$ et $B = \{x'\}$. On a alors $f(A) \cap f(B) = \{f(x)\} \neq \emptyset$.

Supposons par l'absurde que $x \neq x'$, on aurait alors $A \cap B = \emptyset$, mais cela contredirait $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Donc, $x = x'$, ce qui prouve que f est injective.

3. Par double implication, on a montré

$$(\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E), f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)) \iff f \text{ est injective.}$$

— Exercice 13 ••• — Composées et bijections

Soient E , F et G trois ensembles, ainsi que $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux fonctions. Le cours nous dit que si f et g sont bijectives, alors $g \circ f : E \rightarrow G$ aussi. On va étudier des propriétés de réciproques.

- On suppose $g \circ f$ injective. Montrer que f est injective.
 - On suppose $g \circ f$ surjective. Montrer que g est surjective.
 - On étudie le cas particulier de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $f(x) = (x, 0)$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $g(x, y) = x$. Que dire de $g \circ f$, g et f ? Conclure.
- Soit H un quatrième ensemble, ainsi que $h : G \rightarrow H$ une troisième fonction. Montrer que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives si et seulement si f , g et h le sont.

Correction :**Méthode :**

1. Idéal pour connaître les définitions de injectif et bijectif!

- Une fonction injective envoie deux éléments distincts sur deux images distinctes. Ainsi, on prend $x \neq x'$ dans E . Alors puisque $g \circ f$ est injective...
- Une fonction est surjective lorsque tout éléments $z \in G$ de l'ensemble d'arrivée a un antécédant, disons $x : z = (g \circ f)(x)$. Ce z a-t-il un antécédant par g ?
- Il est naturel de voir ce que vaut $g \circ f$. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et g devrait être facile si on connaît ses définitions.

2.

Détails :

- Soient x et x' deux éléments de F avec $x \neq x'$. Si on avait $f(x) = f(x')$, on aurait aussi $g(f(x)) = g(f(x'))$, ce qui contredit $g \circ f$ injective. Cela prouve que f est injective.
 - Soit $z \in G$, alors il existe $x \in E$ tel que $z = g(f(x))$, car $g \circ f$ est surjective. En posant $y = f(x)$, on a bien que

$$\forall z \in G, \exists y \in F, \quad z = g(y).$$

Cela prouve que g est surjective.

- La fonction $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie, et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = g(x, 0) = x,$$

ainsi $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ est bijective. Par contre, il est direct que f n'est pas surjective et g n'est pas injective.

En conclusion, $g \circ f$ peut bien être injective sans que g le soit, et elle peut être surjective sans que f le soit. Plus globalement, la composée peut être bijective sans qu'aucune des deux fonctions ne le soit.

Remarque : Cet exemple est facile à retenir car on "passe" par un ensemble $\mathbb{R}^2$, qui semble plus gros que $\mathbb{R}$. Mais ce genre de considération est fallacieuse...

- La réciproque est directe, car la composée de deux bijections est une bijection. Montrons donc le sens direct. On suppose $g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives. Elle sont donc injectives et surjectives. Or on a en utilisant les questions précédentes :

$$h \circ g \text{ injective} \implies g \text{ injective},$$

et on a également :

$$g \circ f \text{ surjective} \implies g \text{ surjective}.$$

Finalement, g est à la fois injective et surjective, elle est donc bijective.

On utilise que la composée de deux bijections est une bijection : on a

$$f = \underbrace{g^{-1}}_{\text{bijection}} \circ \underbrace{g \circ f}_{\text{bijection}}$$

ce qui prouve que f est bijective. On montre de même que h est bijective.

— **Exercice 14** ••• — **Prolonger une fonction** Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

- Justifier que f est continue.
- Montrer que f admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$.

Correction :

Méthode :

1.

2.

Détails :

- La fonction f est quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$, dont le dénominateur ne s'annule pas, elle est donc continue sur $\mathbb{R}^*$.
- On reconnaît un taux d'accroissement, puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = 1.$$

Ainsi, si on pose $\tilde{f}(0) = 1$, la fonction $\tilde{f}$ est un prolongement de f sur $\mathbb{R}$, et elle est bien continue. Il est standard de continuer à la noter f .

A retenir : Cet exercice, court, contient beaucoup de méthodes à savoir :

- Justifier qu'un quotient est continu, mémorisez la phrase "quotient de fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas". Ce sera la même stratégie pour montrer que " f est dérivable", ou encore " f est de classe C^k ".
- La forme $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est indéterminée en 0, mais il est standard d'y reconnaître un taux d'accroissement, qui tend vers la dérivée. C'est aussi le premier pas vers les DL, voire au S2!
- Pour prolonger par continuité une fonction en un point, on regarde si elle y admet une limite, et on prolonge par la valeur de la limite.

— **Exercice 15** ••• — **Une inégalité pour contrôler les accroissements.** Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

- Etudier les variations de $x \mapsto e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$, puis montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

- Montrer également que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.
- On considère la fonction $g : x \mapsto e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \alpha x^3$ avec $\alpha > \frac{e}{6}$. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $g(x) \leq 0$.

4. En déduire que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \alpha |x|^3.$$

5. Montrer que f admet un prolongement continue sur $\mathbb{R}$, qui est de plus dérivable.