

Exercice 1 (★). Les ensembles suivants munis des opérations usuelles sont-ils des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$?

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x - 2y - z = 0\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = x^2 \text{ et } z = 2x\}$.
3. E_3 est l'ensemble des fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant $2f(-1) = f(1)$.
4. $E_4 = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} | \exists(a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \sin(x) + b \cos(x)\}$.
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 4\}$.
6. E_6 est l'ensemble des fonctions $y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de $y' + e^{-t}y = 0$.

Résultat attendu :

1. Oui 2. Non 3. Oui 4. Oui 5. Non 6. Oui

Exercice 2 (★). Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il s'agit ou non d'un espace vectoriel :

1. L'ensemble $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x - 4y = 0\}$.
2. L'ensemble F_2 des suites réelles qui divergent vers $+\infty$.
3. L'ensemble $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y^2 = 0\}$.
4. L'ensemble F_4 des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f(1)$.
5. L'ensemble $F_5 = \{(2x, y + 1, -x + y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
6. L'ensemble F_6 des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré exactement 5.

Résultat attendu :

1. Oui 2. Non 3. Non 4. Oui 5. Non 6. Non

Exercice 3 (★). Les familles suivantes sont-elles libres dans leurs espaces vectoriels de référence respectifs ?

1. (e_1, e_2, e_3) avec $e_1 = (5, -2, -3)$, $e_2 = (4, 1, -3)$ et $e_3 = (-2, 6, 1)$.
2. (h_0, h_1, h_2) où ces trois fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ par $h_0 : x \mapsto 1$, $h_1 : x \mapsto e^x$ et $h_2 : x \mapsto e^{2x}$.
3. (u, v) avec $u = (10, -5, 15)$, $v = (-4, 2, -6)$.

Résultat attendu :

1. Oui 2. Oui 3. Non : $2u + 5v = 0$

Exercice 4 (★). Soit u, v et w trois suites réelles définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$, $v_n = 3^n$ et $w_n = 4^n$.

1. La famille (u, w) est-elle libre dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$?
2. La famille (u, v, w) est-elle libre dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$?

Résultat attendu : Les deux familles sont libres dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. On le montre en prenant des valeurs particulières pour se ramener à une résolution de système, ou en divisant les expressions par w_n avant de passer à la limite.

Exercice 5 (★★). Dans $\mathbb{C}_3[X]$, on donne $P_0(X) = 1 - iX$, $P_1(X) = 1 + X^2$ et $P_2(X) = iX - X^3$. La famille (P_0, P_1, P_2) est-elle une famille libre dans $\mathbb{C}_3[X]$? génératrice de $\mathbb{C}_3[X]$?

Résultat attendu : La famille est libre, mais pas génératrice de $\mathbb{C}_3[X]$.

Exercice 6 (★★). Soit n un entier naturel non nul. Dans l'espace vectoriel $C(\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on donne $f_0 : x \mapsto 1$ et pour tout entier naturel non nul k , $f_k : x \mapsto \cos^k(x)$. La famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est-elle une famille libre de $C(\mathbb{R})$?

Résultat attendu : Oui. Pour le montrer, on introduit un polynôme aux coefficients bien choisi et on se ramène à montrer qu'il s'agit du polynôme nul. On peut aussi raisonner par récurrence, mais c'est plus long.

Exercice 7 (★). On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants :

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z + t = 0\}$,
2. $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y = z + t\}$,
3. $H = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 | a = b = c = d\}$.

Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$; donner une base de chacun d'eux.

Résultat attendu : Exemples de bases convenant (d'autres peuvent être possibles) :

1. $((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$
2. $((1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1))$
3. $((1, 1, 1, 1))$

Exercice 8 (★). Dans les cas suivants, indiquer si F est un sous-espace vectoriel de E . Si c'est le cas, en donner une base.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0\}$.
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = 2x \text{ et } z = x\}$.
3. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 1\}$.

Résultat attendu :

1. Oui, une base est $((0, 1, 0), (0, 0, 1))$.
2. Oui, une base est $((1, 2, 1))$.
3. Non, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E (F ne contient pas $(0, 0)$).

Exercice 9 (★). On se place dans $E = \mathbb{R}_2[X]$. Soit $A = \{P \in E | P(1) = 0 \text{ et } P'(2) = 0\}$. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de E et en déterminer une base.

Résultat attendu : Une base de A est $X^2 - 4X + 3$.

Exercice 10 (★★). Montrer que les polynômes $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3. En particulier, exprimer X^2 et X^3 dans cette base.

Résultat attendu : La famille est échelonnée en degré donc libre. On montre ensuite que $X^2 = X(X-1) + X$ et $X^3 = X(X-1)(X-2) + 3X(X-1) + X$, ce qui montre que la famille est génératrice (en revenant à la définition).

Exercice 11 (★★). Soit f et g les fonctions définies par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \exp(2x)$ et $g(x) = x \exp(2x)$. On note E l'ensemble des fonctions h telles qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = (ax + b)e^{2x}$.

1. Prouver que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. La famille (f, g) est-elle une famille libre de E ? une base de E ?
3. Soit φ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 3x$. La fonction φ est-elle un élément de E ?

Résultat attendu :

1. E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. La famille est constituée de vecteurs de E , libre et génératrice de E , donc c'est une base de E .
3. On montre par l'absurde que $\varphi \notin E$.

Exercice 12 (★★). Soient $F = \{(a, a, a) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(b + c, b, c) \in \mathbb{R}^3, (b, c) \in \mathbb{R}^2\}$. Ces deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont-ils supplémentaires?

Résultat attendu : Oui, on le montre par exemple par analyse-synthèse, en exhibant pour tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ une décomposition unique dans $F + G$.

Exercice 13 (★★). Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $F = \text{Vect}(X - 1, X)$ et $G = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = 0\}$.

1. Montrer que G est un espace vectoriel.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

Résultat attendu :

1. G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ donc un espace vectoriel.
2. On montre $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$. Variante : pour tout élément de E on montre qu'il existe une unique décomposition dans $F + G$.

Exercice 14 (★★). Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note P l'ensemble des fonctions paires, et I l'ensemble des fonctions impaires. Montrer que P et I sont des sous-espaces vectoriels de E et que $E = P \oplus I$.

Résultat attendu : On montre que P et I sont des sous-espaces vectoriels de E en revenant à la définition. Pour montrer que $E = P \oplus I$, il suffit de montrer que toute fonction $f \in E$ se décompose de manière unique comme somme d'un élément de P et d'un élément de I .

Exercice 15 (★★). Soit E un espace vectoriel et F, G et H des sous-espaces vectoriels de E . Montrer que :

1. $(F \cap H) + (G \cap H) \subset (F + G) \cap H$
2. $(F \cap G) + H \subset (F + H) \cap (G + H)$

Résultat attendu : Dans les deux cas, il faut se ramener à la définition d'une inclusion d'ensembles, puis traduire étape par étape les informations dont on dispose.

Exercice 16 (Type DS). Soit F l'ensemble des suites réelles vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. On pose a et b les suites définies par $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$.
 - (a) Montrer que (a, b) est une famille d'éléments de F .
 - (b) Montrer que (a, b) est une famille génératrice de F .
 - (c) Montrer que (a, b) est une famille libre de F .
 - (d) Que peut-on déduire des questions précédentes ?

Résultat attendu :

1. La suite nulle vérifie $\forall n \geq 0, 0 = 0 + 2 \times 0$, elle est donc dans F .
Soit u et v deux suites de F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (\lambda u + v)_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + v_{n+2} \\ &= \lambda(u_{n+1} + 2u_n) + v_{n+1} + 2v_n \text{ car } (u, v) \in F^2 \\ &= \lambda u_{n+1} + v_{n+1} + 2(\lambda u_n + v_n) \\ (\lambda u + v)_{n+2} &= (\lambda u + v)_{n+1} + 2(\lambda u + v)_n \end{aligned}$$

Donc $\lambda u + v \in F$. Donc F est stable par combinaison linéaire.

Donc F est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles. Donc F est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. .

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}, b_{n+1} + 2b_n = 2^{n+1} + 2 \times 2^n = 2 \times 2^{n+1} = 2^{n+2} = b_{n+2}$.
De même, $a_{n+1} + 2a_n = (-1)^{n+1} + 2(-1)^n = (-1)^n(-1 + 2) = (-1)^n = (-1)^{n+2} = a_{n+2}$.
Donc a et b sont des suites de F .
- (b) Soit $u \in F$. La suite u est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $q^2 = q + 2$ qui équivaut à $q^2 - q - 2 = 0$. Le discriminant associé vaut $\Delta = 1 + 8 = 9$, les solutions de cette équation sont donc $\frac{1-3}{2} = -1$ et $\frac{1+3}{2} = 2$. Il existe donc deux réels α et β tels que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n = \alpha a_n + \beta b_n.$$

Donc u est combinaison linéaire de a et b . Comme par la question précédente, $(a, b) \in F^2$, (a, b) est une famille génératrice de F .

- (c) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $\lambda a + \mu b = 0$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda(-1)^n + \mu 2^n = 0$. En particulier, pour $n = 0, \lambda + \mu = 0$ et pour $n = 1, -\lambda + 2\mu = 0$.
Sommer ces égalités donne $3\mu = 0$, donc $\mu = 0$, on en déduit $\lambda = 0$. La famille (a, b) est donc libre.
- (d) D'après les questions précédentes la famille (a, b) est une famille d'éléments de F libre et génératrice, c'est donc une base de F .