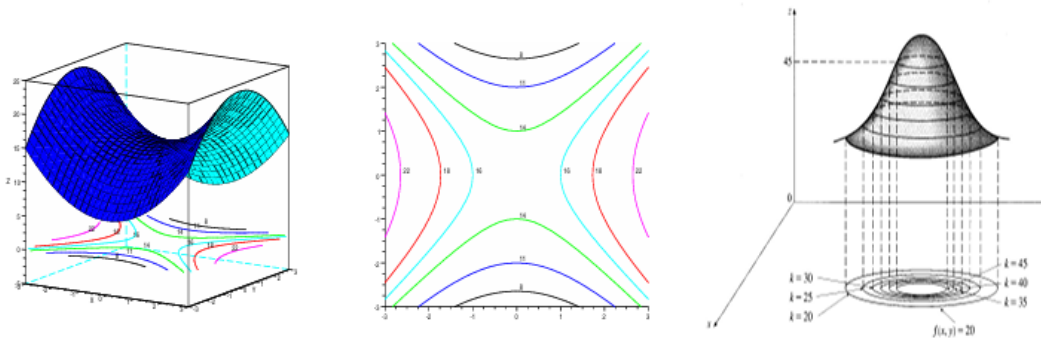


1 Courbes de niveau :

Les courbes de niveau sont en cartographie les courbes reliant les points de la carte ayant la même altitude : un chemin qui suit les courbes de niveau est à plat (il ne monte ni ne descend), s'il est transverse aux courbes de niveau, il monte ou il descend, passant d'un niveau à un autre niveau. A côté des courbes d'égale altitude, il y a beaucoup d'autres exemples de courbes de niveau comme les courbes d'égale température (isothermes) ou d'égale pression (isobares) en météorologie.

Mathématiquement la courbe de niveau k d'une fonction f de deux variables $(x, y) \rightarrow f(x, y)$, est l'ensemble des points du plan (x, y) qui vérifient l'équation $f(x, y) = k$.

Exemple : Par exemple la courbe de niveau $k = 4$ de la fonction $f(x, y) = 3 - x - \frac{1}{2}y$ a pour équation $3 - x - \frac{1}{2}y = 4$, c'est donc la droite d'équation $y = -2x - 2$. De même la courbe de niveau $k = 100$ de la fonction $g(x, y) = x^2 + y^2$ a pour équation $x^2 + y^2 = 100$, c'est donc un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $r = 10$. Les figures suivantes montrent leur représentation graphique.



2 Dérivées partielles

Comment peut-on tracer les courbes de niveau d'une fonction donnée $f(x, y)$? En général on a recours à un logiciel¹ qui lui-même utilise pour cela les dérivées partielles de la fonction. Qu'est-ce qu'une dérivée partielle ? Si f a deux variables, x et y , on définit non plus une dérivée de f mais deux dérivées que l'on appelle *dérivées partielles* : la dérivée partielle de f par rapport à x , notée $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, est encore une fonction des deux variables x et y est on l'obtient en fixant la variable y , supposée constante, et en

dérivant comme d'habitude la fonction $x \mapsto f(x, y)$ comme fonction de x seulement. On procède de la même façon pour calculer la dérivée partielle de f par rapport à y , notée $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

Exemple : Ainsi $f(x, y) = x^2y^2 + 3xy$ a pour dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^2 + 3y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2y + 3x$$

et les dérivées partielles secondes (il y en a 4) se calculent de la même manière :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x, y) = 2y^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 4xy + 3 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 4xy + 3 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x, y) = 2x^2$$

Le vecteur dont les deux composantes sont les dérivées partielles de f s'appelle le *gradient* de f au point (x, y) et se note

$$\text{Grad } f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

Lorsqu'on calcule ce vecteur en un point (x, y) en remplaçant x et y par leurs valeurs on obtient un vecteur dont les deux composantes sont des nombres et qu'on peut alors tracer. Ainsi pour la fonction de l'exemple précédent, au point $(x, y) = (-1, 3)$, on obtient $\text{Grad } f(-1, 3) = (-9, 15)$. Ce vecteur joue un rôle important dans l'étude de la fonction f à travers la propriété suivante :

Courbes de niveau

Proposition 1 En chaque point (x, y) , le vecteur gradient est perpendiculaire aux courbes de niveau de la fonction, dirigé dans le sens des niveaux croissants.

Rappelons que deux vecteurs $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sont *perpendiculaires* si leur produit scalaire $v \cdot w$ est nul, c'est-à-dire si $v \cdot w = x_1x_2 + y_1y_2 = 0$. De cette proposition, on déduit qu'il est facile de calculer les coordonnées d'un vecteur $V(x, y)$ tangent à une courbe de niveau de f en un point (x, y) : il suffit de choisir un vecteur dont le produit scalaire avec le vecteur gradient est nul, comme par exemple $V(x, y) = \left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)$, puisqu'on a $V(x, y) \cdot \text{Grad } f(x, y) = 0$.

Supplément :

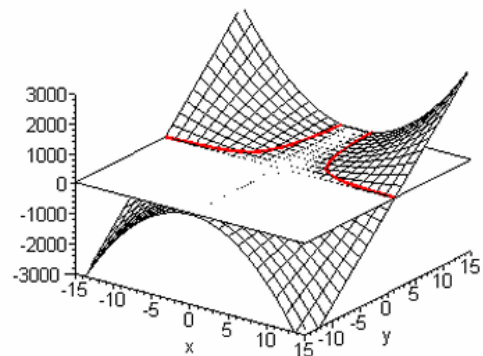
$$f(x, y) = x^2(y-1)$$

Fixons une valeur à $f(x, y)$, par exemple $f(x, y) = 50$.

On a : $f(x, y) = 50 \Leftrightarrow x^2(y-1) = 50$. Cet ensemble est une **courbe du plan** $\mathbb{R}^2$, d'équation $x^2(y-1) = 50$, ce qui s'écrit encore : $x \neq 0$ et $y = \frac{50}{x^2} + 1$

Graphiquement, fixer $f(x, y) = 50$ revient à ne retenir que les points à l'intersection de la surface $z = f(x, y)$ et du plan $z = 50$. Il s'agit de la courbe rouge. L'équation de cette courbe, dans le plan $z = 50$, est $x^2(y-1) = 50$.

Dans le plan, la courbe d'équation $x^2(y-1) = 50$ est appelée courbe de niveau 50 de la fonction f .



En trait gras rouge ; la ligne de niveau 50

Définition :

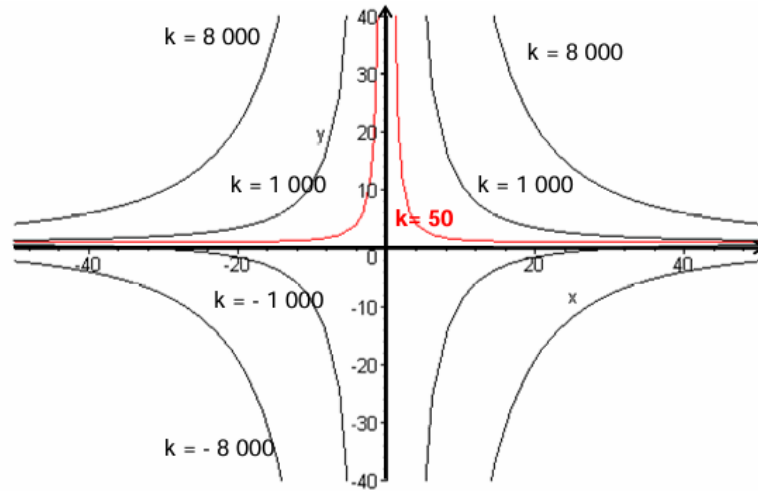
La courbe du plan $f(x, y) = K$, où K est une constante, est appelée **ligne de niveau K** , ou **courbe de niveau K** .

Courbes de niveau

On peut construire sur le plan (x,y) toute une série de courbes de niveau.

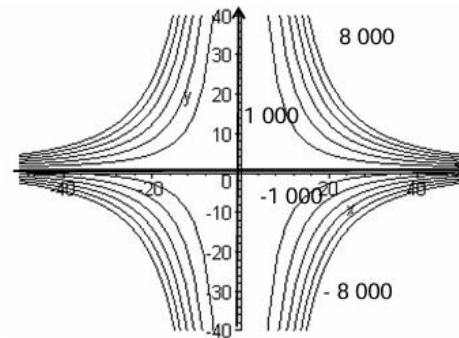
Cela ne permet pas seulement de représenter le lien entre x et y pour $f(x,y)$ fixé, mais aussi de représenter sur un plan toute la structure de la surface $z = f(x,y)$. En effet, plus les lignes de niveau se resserrent, et plus $f(x,y)$ croît ou décroît rapidement. On arrive ainsi avec des courbes planes à se faire une bonne idée de la surface $z = f(x,y)$.

Ici, les lignes se resserrent pour les grandes valeurs d' x , cela correspond au graphique précédent, où z croît ou décroît plus rapidement pour les grandes valeurs d' x .



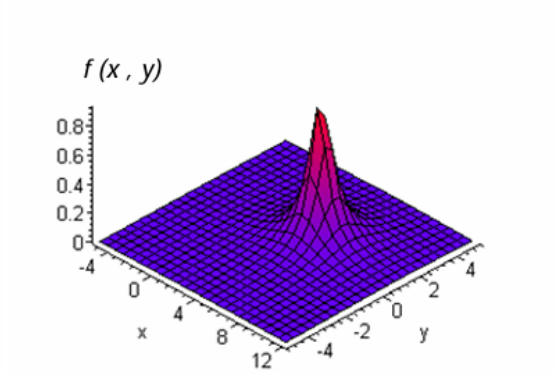
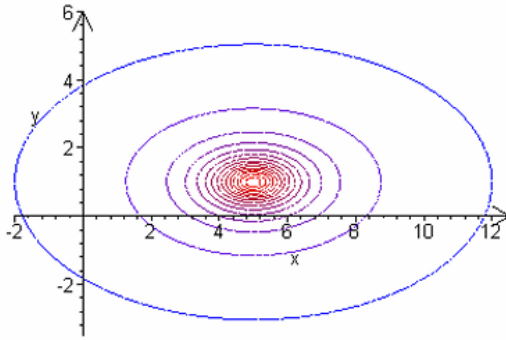
Courbes de niveau $f(x,y) = k$ pour différentes valeurs de k . En rouge, la ligne de niveau 50 du graphique précédent.

On se représente mieux la surface avec de nombreuses lignes de niveau:



Un autre exemple : $f(x,y) = \frac{1}{(x-5)^2 + 3(y-1)^2 + 1}$

Courbes de niveau



Les lignes de niveau indiquent un pic en $x=5$,
 $y=1$...

Que voilà !

Remarque : sur les graphiques précédents, on peut remarquer que les lignes de niveau ne se croisaient pas. En fait, c'est une propriété générale, dont la preuve, très simple, fait l'objet du 1er exercice.

Propriété :

Pour une même fonction, des lignes de niveau différentes n'ont pas d'intersection