

EXERCICE 1: [Indications] [Correction] - *Calculer* - Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous.

1. $y'' + y' + y = e^x$, avec $y(0) = 0$
2. $y'' - y = 1$
3. $4y'' - 12y' + 9y = xe^{\frac{3}{2}x}$
4. $y'' - y = 1 + xe^x$
5. $y'' + y = \cos x$ ☆
6. $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$ avec $y(0) = 3$ et $y'(0) = 1$
7. $y'' + y' = x + \operatorname{ch} x$ où $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

EXERCICE 2: [Indications] [Correction] - *Chercher - Calculer* - Résoudre l'équation $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0$. ☆

EXERCICE 3: [Indications] [Correction] - *Calculer* -

1. Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation

$$x^2 y''(x) + 4xy'(x) - (x^2 - 2)y(x) = 0$$

en posant $z(x) = x^2 y(x)$. ☆

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(1 + x^2)^2 y''(x) + 2(x - 1)(1 + x^2)y'(x) + y(x) = 0$$

en procédant au changement de variable $t = \arctan x$. ☆☆

Indications

Exercice 1 [Correction]

5. Chercher une solution particulière sous la forme $y_P(x) = P \cos x + Q \sin x$ avec P et Q deux polynômes.

Exercice 2 [Correction]

Attention, cette équation n'est pas à coefficients constants!! On ne pourra pas utiliser la méthode de l'équation caractéristique...

Exercice 3 [Correction]

1. Considérer $y(x) = \frac{z(x)}{x^2}$ et réinjecter dans la formule pour obtenir une équation du second degré sur la fonction z
2. Poser $z(t) = y(x)$ c'est-à-dire $z(t) = y(\tan t)$ et réinjecter dans l'équation.

Exercice 1

1. $y'' + y' + y = e^x$, avec $y(0) = 0$:

- Équation homogène : $y'' + y' + y = 0$

L'équation caractéristique est

$$r^2 + r + 1 = 0$$

de racines

$$r_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \quad r_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Les solutions réelles de l'équation homogène s'écrivent donc

$$y_0(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right), \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Solution particulière :

On cherche une solution sous la forme $Q(x)e^x$.

En réinjectant dans l'équation, avec l'équation aux degrés, on trouve que $\deg Q = 0$ et ensuite qu'une solution est

$$y_P(x) = \frac{1}{3}e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Solution générale :

L'ensemble des solutions réelles est

$$\mathcal{S} = \left\{ y : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\frac{x}{2}} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) + \frac{1}{3}e^x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

- Solution telle que $y(0) = 0$:

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$$

D'où les solutions finales

$$\left\{ y : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\frac{x}{2}} \left(-\frac{1}{3} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) + \frac{1}{3}e^x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

2. $y'' - y = 1$:

- Équation homogène : $y'' + y' + y = 0$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 1 = 0$$

de racines

$$r_1 = -1 \quad r_2 = 1$$

Les solutions s'écrivent

$$y_0(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}, \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Solution particulière :

Comme le membre de droite est constant, on peut également chercher une solution particulière directement sous forme de constante et on sait par formule de cours que c'est $y_P = -1$.

- Solution générale :

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{ y : x \in \mathbb{R} \mapsto \boxed{\lambda e^x + \mu e^{-x} - 1}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

3. $4y'' - 12y' + 9y = xe^{\frac{3}{2}x}$:

- Équation homogène : $4y'' - 12y' + 9y = 0$

L'équation caractéristique est

$$4r^2 - 12r + 9 = 0$$

de racine double

$$r = \frac{3}{2}$$

Les solutions réelles s'écrivent

$$y_0(x) = (\lambda + \mu x)e^{\frac{3}{2}x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Solution particulière :

On cherche une solution sous la forme $Q(x)e^x$. En réinjectant dans l'équation, avec l'équation aux degrés, on trouve que $\deg Q = 3$ et ensuite qu'une solution est y_P définie par

$$y_P(x) = \frac{x^3}{24}e^{\frac{3}{2}x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Solution générale :

L'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ est

$$\mathcal{S} = \{y : x \in \mathbb{R} \mapsto \boxed{(\lambda + \mu x + \frac{x^3}{24})e^{\frac{3}{2}x}} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$$

4. $y'' - y = 1 + e^x$:

- Équation homogène : $y'' + y' + y = 0$

C'est la même que dans la question précédente. Les solutions s'écrivent

$$y_0(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}, \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Solution particulière de $y'' - y = 1$:

C'est celle obtenue précédemment dans la question précédente.

$$y_{P1}(x) = -1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Solution particulière de $y'' - y = xe^x$:

Notons que

$$xe^x = xe^{1x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution sous la forme $Q(x)e^x$. En réinjectant dans l'équation, avec l'équation aux degrés, on trouve que $\deg Q = 2$ et ensuite qu'une solution est y_P définie par

$$y_{P2}(x) = \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Solution générale :

Par principe de superposition, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{y : x \in \mathbb{R} \mapsto \boxed{\mu e^{-x} - 1 + \frac{1}{4}(x^2 - x + 4\lambda)e^x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

5. $y'' + y = \cos x$:

- Équation homogène : $y'' + y = 0$

L'équation caractéristique est

$$r^2 + 1 = 0$$

de racines

$$r_1 = i \quad r_2 = -i$$

Les solutions réelles s'écrivent

$$y_0(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Solution particulière :

On pose $y_P(x) = P \cos x + Q \sin x$.

En réinjectant, on obtient que l'équation équivaut à

$$\cos x = (P'' + 2Q') \cos x + (Q'' - 2P') \sin x$$

Cherchons s'il existe P et Q sont deux polynômes répondant au système d'équation

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \begin{cases} P'' + 2Q' = 1 \\ Q'' - 2P' = 0 \end{cases} \\ \mathcal{S} \Leftrightarrow \begin{cases} P'' + 2Q' = 1 \\ Q'' = 1 - 2Q' \end{cases} \end{aligned}$$

i.e. Q' est solution de l'équation

$$y'' + 2y = 1$$

dont une solution particulière constante est $\frac{1}{2}$. (Les autres ne sont pas polynômes)

En posant alors $Q = \frac{x}{2} + \alpha$, on obtient $P' = 0$ donc

$$P = \beta \in \mathbb{R}$$

En prenant alors $\beta = \alpha = 0$, les polynômes P et Q répondent au système $\mathcal{S}$ et ainsi à l'équation différentielle.

Autrement dit, une solution particulière est

$$y_P(x) = y_1(x) + y_2(x) = \frac{x}{2} \sin x$$

- Solution générale :

L'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ est

$$\mathcal{S} = \{y : x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{x}{2} \sin x \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

6. On trouve les solutions de l'équation $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$ comme étant toutes les fonctions

$$x \mapsto (x^2 + ax + b)e^{-x}, \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}$$

Avec la condition initiale $y(0) = 3$, on obtient

$$b = 3$$

et ensuite, avec la condition initiale $y'(0) = 1$, on obtient

$$a - b = 1$$

et donc

$$a = 4$$

Il y a donc une unique solution de l'équation avec les conditions demandées :

$$x \mapsto (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$$

7. Par principe de superposition des solutions, on obtient l'ensemble de solutions

$$\{x \mapsto \left(a - \frac{1}{2}x\right)e^{-x} + \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2}x^2 - x + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 2

On pose $u = y'$, ainsi u vérifie l'équation d'ordre 1 :

$$(1 + x^2)u' + 2xu = 0$$

de solutions

$$u(x) = \frac{\lambda}{1 + x^2}$$

puis l'ensemble des solutions est

$$y : x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \arctan x + \beta, \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

Exercice 3

1. En réinjectant dans l'équation z vérifie

$$z'' - z = 0$$

de solutions

$$z(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Les solutions y sont donc

$$y(x) = \frac{\lambda e^x + \mu e^{-x}}{x^2}$$

2. On pose z de manière à avoir

$$z(t) = y(x)$$

c'est-à-dire

$$z(t) = y(\tan t)$$

z est deux fois dérivable et vérifie

$$z'' - 2z' + z = 0$$

c'est-à-dire

$$z(t) = (\lambda t + \mu)e^t, \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

puis

$$y(x) = (\lambda \arctan x + \mu)e^{\arctan x}, \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$