

Arithmétique

I Les diviseurs d'un entier

Définition :

La division euclidienne d'un nombre entier (**le dividende**) par un autre nombre entier (**le diviseur**) permet de trouver deux nombres entiers (**le quotient et le reste**) tel que :

$$\text{dividende} = (\text{quotient} \times \text{diviseur}) + \text{reste}$$

Dividende	Diviseur
...	
Reste	Quotient

Exemple :	22		5
	-20		4
	2		

La division entière de 22 par 5 donne un quotient de 4 et un reste de 2 :

Pour vérifier son résultat, on peut faire l'opération suivante : $\text{Dividende} = \text{Diviseur} \times \text{Quotient} + \text{Reste}$

Ici : $22 = 5 \times 4 + 2$

Définition :

Si le reste de la division euclidienne d'un entier a par un entier b est égal à 0, on dit alors que :

- a est un **multiple** de b ou b est un **diviseur** de a
- a est **divisible** par b

Exemple : Le reste de la division de 128 par 8 est égal à 0.

On dit donc que :

- 128 est **divisible** par 8
- 8 est un **diviseur** de 128
- 128 est un **multiple** de 8

Remarques :

- On ne peut pas diviser un nombre par 0
- Tout nombre est un multiple de 1
- Tout nombre entier est divisible par 1 et lui-même

Application : Exercice 1

II Les critères de divisibilité

Pour trouver rapidement les diviseurs d'un nombre entier, certains critères de divisibilité sont à connaître :

- Un nombre est **divisible par 2**, s'il est pair (s'il se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8).
Ex : 26 ; 510 ; 1244
- Un nombre est **divisible par 4**, si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4.
Ex : 538924
- Un nombre est **divisible par 5**, s'il se termine par 0 ou 5.
Ex : 525 ; 1000 ; 60
- Un nombre est **divisible par 10**, s'il se termine par 0.
Ex : 10 ; 520 ; 538930
- Un nombre est **divisible par 3**, si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Ex : 369 $3 + 6 + 9 = 18$ ($6 \times 3 = 18$)
- Un nombre est **divisible par 9**, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
Ex : 73665 $7 + 3 + 6 + 6 + 5 = 27$ ($9 \times 3 = 27$)

Application : Exercice 2

III Les nombres premiers

Définition :

Un **nombre premier** est un nombre entier positif qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

La liste des nombres premiers inférieurs à 30 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

Remarques :

- La liste des nombres premiers est infinie
- 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur
- 2 est le seul nombre premier pair

IV Décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers

Propriété :

Tout nombre non premier peut se décomposer en **produit de facteurs premiers**. Cette décomposition est unique.

Exemple 1 : $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

Chaque facteur de cette décomposition est un **nombre premier**.

Exemple 2 : Soit la fraction $\frac{60}{126}$

Pour rendre cette fraction irréductible, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

60	2	126	2
30	2	63	3
15	3	21	3
5	5	7	7
1		1	

La décomposition de 60 en produits de facteurs premiers est : $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

La décomposition de 126 en produits de facteurs premiers est : $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

On a donc : $\frac{60}{126} = \frac{\cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times 5}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$

1 est le seul diviseur commun de 10 et 21

Donc $\frac{10}{21}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{60}{126}$

Application : Exercice 3

Arithmétique (Exercices)

Exercice 1

Donner les diviseurs des nombres suivants

$1/ 20$

$2/ 77$

$3/ 115$

$4/ 93$

$5/ 102$

$6/ 69$

Exercice 2

Les nombres suivants sont-ils des multiples de 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 9 ?

$1/ 8$

$2/ 45$

$3/ 20$

$4/ 8754$

$5/ 666$

$6/ 8280$

Exercice 3

Décomposer en produit de facteurs premiers :

$a/ 70$

$b/ 144$

$c/ 242$

$d/ \frac{360}{252}$

$e/ \frac{126}{180}$

Exercice 4

Le CPE du collège a convoqué les 232 élèves de 6^{ème} en salle d'étude. Les surveillants ont disposé des sièges par rangées de 18.

1/ Combien faut-il prévoir de rangées ?

2/ Combien restera-t-il de places sur la dernière rangée ?

Exercice 5

Recopier le tableau et mettre des croix quand les nombres sont divisibles par tel ou tel chiffre.

Divisibilité	18	47	650	7836	180	1948
Divisible par 2						
Divisible par 3						
Divisible par 4						
Divisible par 5						
Divisible par 9						
Divisible par 10						

Exercice 6

1/ Trouver tous les nombres entre 0 et 30 divisibles par 2 et par 3.

2/ Sont-ils tous divisibles par 6 ?

Exercice 7

On considère le nombre $435\boxed{?}$ dans lequel le chiffre des unités est inconnu.

- 1/ Quel est ce nombre s'il est divisible par 2 et 5 ?
- 2/ Quelles sont les valeurs possibles de ce nombre s'il est divisible par 4 ?
- 3/ Ce nombre peut-il être divisible à la fois par 2, 4 et 5 ?
- 4/ Quelles sont les valeurs possibles de ce nombre s'il n'est pas divisible ni par 2, ni par 5 ?

Exercice 8

Le capitaine d'un navire possède un trésor constitué de 69 diamants, 1 150 perles et 4 140 pièces d'or qu'il partage équitablement entre les marins.

Combien y-a-t-il de marins sachant que toutes les pièces, perles et diamants ont été distribués ?