

S4.1 - Oscillateur harmonique

Table des matières

1	Le ressort	2
1.1	Force de rappel élastique	2
1.2	Énergie potentielle élastique	3
2	Équation différentielle du mouvement	4
3	Résolution de l'équation du mouvement	5
3.1	Position d'équilibre et solution particulière	5
3.2	Solution de l'équation homogène sans second membre	5
3.3	Solution générale de l'équation différentielle	6
4	Analyse de la solution obtenue	6
5	Étude énergétique	8
6	Annexe mathématique : les deux expressions d'un signal sinusoïdal	9

1 Le ressort

1.1 Force de rappel élastique

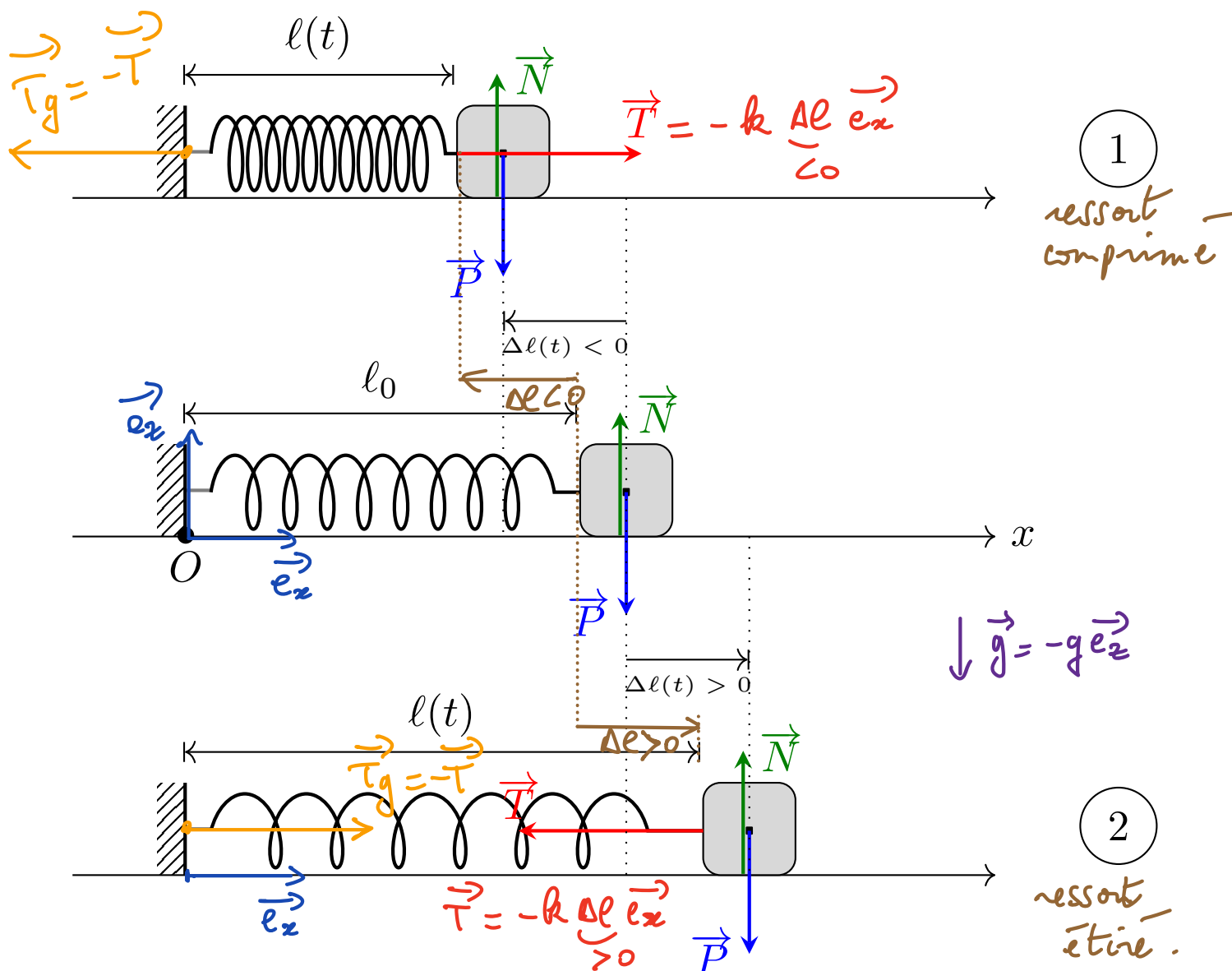


Figure 1 – Oscillateur harmonique horizontal

Définitions des paramètres d'un ressort

On note k la **constante de raideur** du ressort (N.m^{-1}), ℓ_0 sa **longueur à vide** et $\ell(t)$ sa **longueur instantanée** (figure 1).

On appelle l'**allongement** du ressort la grandeur $\Delta\ell(t) = \ell(t) - \ell_0$

Propriété d'un ressort - Force de rappel élastique

Une propriété fondamentale du ressort est que le **module de la force de rappel élastique** $\vec{T}$ exercée par le ressort est **proportionnelle** à la valeur absolue de l'allongement :

$$\|\vec{T}\| = k|\ell - \ell_0| = k|\Delta\ell|$$

◇ Si l'allongement est nul, alors $\|\vec{T}\| = 0$

◇ Si l'allongement est positif (ressort étiré) alors la force de rappel est orientée vers le centre du ressort, c'est-à-dire selon $-\vec{e}_x$ pour la force exercée par le ressort sur la masse fixée à droite.

◇ Si l'allongement est négatif (ressort comprimé) alors la force de rappel est orientée vers l'extérieur du ressort, c'est-à-dire selon $\vec{e}_x$ pour la force exercée par le ressort sur la masse fixée à droite.

Ainsi la force exercée par le ressort sur la masse fixée à droite peut s'exprimer par :

$$\vec{T} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{e}_x = -k\Delta\ell(t)\vec{e}_x$$

Expression de la force suivant le point d'attache

Si l'on considère la **force exercée par le ressort sur son point de fixation gauche** (ici un point du support fixe de gauche), alors cette force notée $\vec{T}_g$ est telle que :

$$\vec{T}_g = -\vec{T} = k(\ell(t) - \ell_0)\vec{e}_x = k\Delta\ell(t)\vec{e}_x$$

1.2 Énergie potentielle élastique

Définition de l'énergie potentielle élastique

L'énergie potentielle élastique E_{pe} associée à la force de rappel du ressort $\vec{T}$, s'écrit :

$$E_{pe}(\ell) = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + cte = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 + cte$$

Pour déterminer la constante, on fixe une valeur particulière de E_{pe} , par exemple $E_{pe}(\ell_0) = 0$ nous donne $cte = 0$. **On prendra $cte = 0$ par la suite.**

2 Équation différentielle du mouvement

Définition d'un oscillateur harmonique

On appelle **oscillateur harmonique** tout système à un degré de liberté dont l'évolution au cours du temps (en l'absence d'amortissement) est régie par une équation différentielle dont l'équation homogène sans second membre est de la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

quelle que soit la nature physique de la variable x .

Le paramètre ω_0 est appelé **pulsation propre de l'oscillateur**, on remarque grâce à l'équation différentielle que sa dimension est telle que :

$$[\omega_0^2] = T^{-2} \Rightarrow [\omega_0] = T^{-1}$$

La pulsation propre s'exprime en rad.s⁻¹.

Considérons un oscillateur harmonique horizontal ¹, constitué d'un mobile de masse m attaché à un ressort de constante de raideur k qui oscille sans frottements le long d'un axe horizontal dont l'origine O correspond au point de fixation gauche du ressort. L'axe vertical (Oz) est ascendant (figure 1). Les forces appliquées au mobile sont le poids :

$$\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad g = \|\vec{g}\|$$

la réaction du support :

$$\vec{N} = N \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad N = \|\vec{N}\|$$

et la force de rappel élastique du ressort :

$$\vec{T} = -k(\ell(t) - \ell_0) \vec{e}_x$$

On note $x(t)$ l'abscisse du point de fixation M du ressort au mobile, définie par $\vec{OM} = x \vec{e}_x$. On remarque que $x(t)$ correspond alors à la longueur instantanée du ressort $\ell(t)$. La vitesse du mobile est :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x = \dot{x} \vec{e}_x$$

Son accélération est :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt} \vec{e}_x = \ddot{x} \vec{e}_x$$

Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}$$

$\vec{g} = \vec{g} \cdot \vec{e}_z$
même algébrique
 ici : $\vec{g} = -\|\vec{g}\| \vec{e}_z$

1. https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php

En projetant cette relation sur l'axe horizontal et l'axe vertical, on obtient :

$$\begin{cases} \text{sur } \vec{e}_x : m\ddot{x} = -k(x - \ell_0) \\ \text{sur } \vec{e}_z : 0 = N - mg \end{cases}$$

◇ La projection sur $\vec{e}_z$ montre que le poids est exactement compensé par la réaction du support :

$$N = mg$$

◇ La projection sur $\vec{e}_x$ nous donne l'**équation différentielle du mouvement** que l'on peut mettre sous la forme :

$$\ddot{x} + \overset{\omega_0^2}{\frac{k}{m}}x = \frac{k}{m}\ell_0 \quad (1)$$

On reconnaît alors la **pulsation propre** de cet oscillateur harmonique qui est telle que :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3 Résolution de l'équation du mouvement

3.1 Position d'équilibre et solution particulière

Définition d'une position d'équilibre

Le mobile est dans une position d'équilibre notée $x = x_{eq}$ si **à tout instant** $\dot{x} = 0$ (vitesse nulle) et $\ddot{x} = 0$ (accélération nulle)

En reportant les grandeurs correspondant à une position d'équilibre dans l'équation du mouvement (1) on obtient :

$$\Rightarrow \underbrace{\ddot{x}_{eq}}_0 + \omega_0^2 x_{eq} = \omega_0^2 \ell_0 \Rightarrow \omega_0^2 x_{eq} = \omega_0^2 \ell_0 \Rightarrow x_{eq} = \ell_0$$

ce qui correspond à un ressort au repos (ni étiré, ni comprimé).

L'équation différentielle du mouvement s'écrit alors :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$$

La solution particulière, notée x_p de cette ED (1) doit être de même nature que le terme de droite, c'est-à-dire constante, on en déduit que :

$$\ddot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \omega_0^2 x_{eq} \Rightarrow x_p = x_{eq} = \ell_0$$

3.2 Solution de l'équation homogène sans second membre

La solution de l'équation homogène sans second membre, notée x_h est :

$$x_h(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

ou encore

$$x_h(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ ou bien $C > 0$ et $\varphi \in]-\pi; \pi]$ dont des constantes réelles déterminées grâce à deux conditions initiales connues.

On se référera à l'annexe mathématique 6 pour trouver la correspondance entre ces deux expressions de x_h qui permet de trouver l'amplitude C du mouvement lorsqu'on a résolu l'ED (1) à l'aide de la première expression.

3.3 Solution générale de l'équation différentielle

On suppose connues les conditions initiales les plus générales suivantes :

- A l'instant $t = 0$, le mobile est écarté d'une valeur **algébrique** connue d de sa position d'équilibre, soit $x(0) = \ell_0 + d$: C.I.1
- A l'instant $t = 0$, on communique également au mobile une vitesse **algébrique** connue v_0 , soit $\dot{x}(0) = v_0$: C.I.2

La solution générale de l'ED (1) est :

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \underbrace{A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)}_{x_h} + \underbrace{x_{eq}}_{x_p}$$

La vitesse s'écrit alors :

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

◇ La condition initiale sur la position nous donne :

C.I.1: $x(0) = A \cos(0) + B \sin(0) + x_{eq} \Rightarrow \ell_0 + d = A + \ell_0 \Rightarrow A = d$

◇ La condition initiale sur la vitesse nous donne :

C.I.2: $\dot{x}(0) = -A\omega_0 \sin(0) + B\omega_0 \cos(0) \Rightarrow v_0 = B\omega_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$

Au final la solution du l'ED (1) est :

$$x(t) = \underbrace{d}_{A} \cos(\omega_0 t) + \underbrace{\frac{v_0}{\omega_0}}_B \sin(\omega_0 t) + x_{eq}$$

4 Analyse de la solution obtenue

La solution obtenue peut également se mettre sous la forme (voir annexe mathématique 6, équation (7)) :

$$x(t) = \sqrt{d^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \cos(\omega_0 t + \varphi) + x_{eq}$$

avec d'après (5) et (6) :

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{d}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}} \text{ et } \sin \varphi = -\frac{v_0}{\omega_0 \sqrt{d^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}} \\ &= A/C \qquad \qquad \qquad = -B/C \end{aligned}$$

◇ On voit que le mobile a un mouvement sinusoïdal d'**amplitude** notée X_0 autour de la position d'équilibre $x_{eq} = \ell_0$, avec :

$$X_0 = \sqrt{d^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$$

◇ **La période propre** T_0 des oscillations est indépendante des conditions initiales ; c'est une propriété importante de l'oscillateur harmonique appelée *isochronisme* des oscillations :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

◇ φ est la **phase initiale** de la sinusoïde $x(t) - x_{eq}$.

On pourra se référer à l'animation Flash pour le tracé de la solution dans le cas général (attention sur l'animation l'origine de l'axe horizontal est pris à la position d'équilibre donc cela revient à prendre $x_{eq} = 0$), néanmoins, on a tracé $x(t)$ dans le cas où $d = 0$ et $v_0 > 0$ sur la figure 2.

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + x_{eq}$$

$$\Rightarrow A = 0 \text{ et } B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

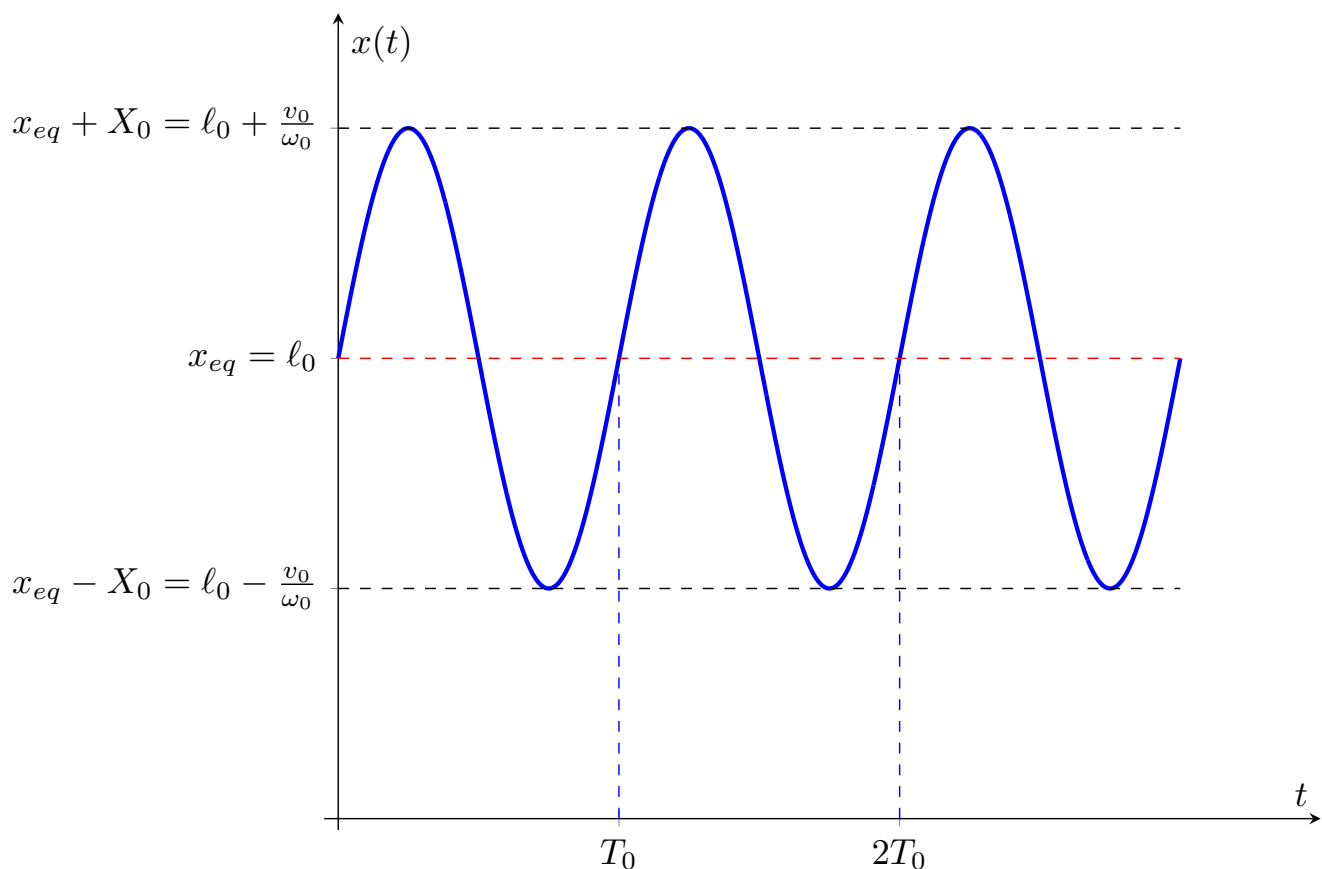


Figure 2 – Tracé de $x(t)$ pour $d = 0$ et $v_0 > 0$

5 Étude énergétique

Définition de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique de l'OH

L'énergie cinétique $E_c(t)$ du mobile de l'oscillateur harmonique horizontal est définie par :

$$E_c(t) = \frac{1}{2}m \|\vec{v}(t)\|^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)$$

L'énergie mécanique $E_m(t)$ du mobile de l'oscillateur harmonique horizontal est définie par :

$$E_m(t) = E_c(t) + E_{pe}(t)$$

On va chercher à déterminer l'expression des différentes énergies.

L'expression de la norme algébrique de la vitesse est :

$$x(t) = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) + \ell_0 \Rightarrow \dot{x}(t) = -X_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Calculons l'énergie mécanique à un instant t quelconque :

$$E_m(t) = E_c(t) + E_{pe}(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}k(x(t) - \ell_0)^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_m(t) &= \frac{1}{2}mX_0^2 \underbrace{\omega_0^2}_{\frac{k}{m}} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kX_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2}kX_0^2 [\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_m(t) = \frac{1}{2}kX_0^2 = \frac{1}{2}k \left(d^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0} \right)^2 \right) = \underbrace{\frac{1}{2}kd^2}_{E_{pe}(0)} + \underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2}_{E_c(0)} = E_m(0)$$

Propriété : Conservation de l'énergie mécanique

On vient de démontrer que l'énergie mécanique du mobile est constante au cours du temps et qu'elle est égale à l'énergie mécanique initiale.

Calculons la valeur moyenne de E_{pe} :

$$\langle E_{pe}(t) \rangle \triangleq \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} E_p(t) dt = \frac{kX_0^2}{2} \underbrace{\langle \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \rangle}_{1/2} = \frac{kX_0^2}{4}$$

de même

$$\langle E_c(t) \rangle = \frac{kX_0^2}{4}$$

Propriété : Valeur moyenne des énergies

La valeur moyenne de l'énergie cinétique et la valeur moyenne de l'énergie potentielle sont égales :

$$\langle E_{pe}(t) \rangle = \langle E_c(t) \rangle = \frac{E_m}{2}$$

6 Annexe mathématique : les deux expressions d'un signal sinusoïdal

On peut écrire un signal sinusoïdal non amorti de deux manières, soit sous la forme :

$$s(t) = C \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

où $C > 0$ est l'amplitude du signal et $\varphi \in]-\pi; \pi]$ est la phase initiale du signal.

On peut également écrire ce même signal sous la forme :

$$s(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (3)$$

où A et B sont des constantes réelles qui peuvent être positives ou négatives.

On peut alors transformer l'expression (2) grâce à la formule de trigonométrie $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ et l'identifier à la formule (3) :

$$s(t) = C \cos(\omega t) \cos \varphi - C \sin(\omega t) \sin \varphi = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (4)$$

L'équation (4) ne peut être vérifiée $\forall t$ uniquement si :

$$C \cos \varphi = A \Rightarrow \cos \varphi = \frac{A}{C} \quad (5)$$

et

$$C \sin \varphi = -B \Rightarrow \sin \varphi = -\frac{B}{C} \quad (6)$$

◇ On peut déduire de (5) et (6), en élevant ces équations au carré puis en les additionnant membre à membre ((5)² + (6)²), que :

$$C^2 \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_1 = A^2 + B^2 \Rightarrow C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (7)$$

◇ Pour déterminer φ , on peut remarquer que (6) / (5) nous donne :

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \Rightarrow \tan \varphi = -\frac{B}{A} \quad (8)$$

Alors $\varphi = -\arctan\left(\frac{B}{A}\right)$ si $\cos \varphi > 0$ ou $\varphi = -\arctan\left(\frac{B}{A}\right) \pm \pi$ si $\cos \varphi < 0$

Ou encore $\varphi = \arccos\left(\frac{A}{C}\right)$ si $\sin \varphi > 0$ ou $\varphi = -\arccos\left(\frac{A}{C}\right)$ si $\sin \varphi < 0$

Schéma explicatif (à compléter en cours) utilisant le cercle trigonométrique sachant que par définition $\arccos\left(\frac{A}{C}\right)$ renvoie un angle $\in [0; \pi]$ (zone **bleue** sur le cercle trigo.) et que $\arctan\left(-\frac{B}{A}\right) = -\arctan\left(\frac{B}{A}\right)$ renvoie un angle $\in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ (zone **rouge** sur le cercle trigo.). **Les angles représentés ne diffèrent que par le signe de A et/ou B, la valeur de C est donc la même pour tous.** On a choisi $A_1 = A_2 = -A_3 = -A_4 > 0$ et $B_1 = B_4 = -B_2 = -B_3 < 0$.

Rappel : $A = C \cos \varphi$ et $B = -C \sin \varphi$

