Définition 5 : Une suite arithmétique (u_n) est définie par :

- un premier terme u_0 ou u_p
- une relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$, r raison de la suite

Une suite arithmétique est donc définie par 2 termes : premier terme et raison.
Une suite arithmétique est le phénomène discret d'une **progression linéaire**.

Exemple : Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $r = 5$. Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4.

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r = 2 + 5 = 7 \\ u_2 &= u_1 + r = 7 + 5 = 12 \\ u_3 &= u_2 + r = 12 + 5 = 17 \\ u_4 &= u_3 + r = 17 + 5 = 22 \end{aligned}$$

Propriété 1 : Une suite est arithmétique lorsque la différence entre deux termes consécutifs est constante. On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = r$.

Exemple : Montrer que la suite définie par : $u_n = 2n + 3$ est arithmétique.
On calcule la différence entre deux termes consécutifs quelconques :

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 3 - (2n+3) = 2n + 2 + 3 - 2n - 3 = 2$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = 2$.
La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$.

Propriété 2 : Le terme général u_n d'une suite arithmétique s'exprime en fonction de n de la façon suivante :

- Si le premier terme est u_0, alors : $u_n = u_0 + n\,r$
- Si le premier terme est u_p, alors : $u_n = u_p + (n-p)\,r$

Exemple : Soit une suite (u_n) arithmétique de raison r.
On donne : $u_{17} = 24$ et $u_{40} = 70$. Trouver la raison r et le premier terme u_0.

1) On exprime u_{40} en fonction de u_{17}, on a alors :

$$u_{40} = u_{17} + (40-17)\,r \;\Leftrightarrow\; u_{40} = u_{17} + 23\,r \;\Leftrightarrow\; 23r = u_{40} - u_{17} \;\Leftrightarrow$$

$$r = \frac{u_{40} - u_{17}}{23} = \frac{70 - 24}{23} = 2$$

2) On peut alors trouver u_0.

$$u_{17} = u_0 + 17\,r \;\Leftrightarrow\; u_0 = u_{17} - 17 \times r \;\Leftrightarrow\; u_0 = 24 - 17 \times 2 = -10$$

Définition 6 : Une suite géométrique (u_n) est définie par :

- un premier terme u_0 ou u_p
- une relation de récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n$ $\quad q$ raison de la suite

Une suite géométrique est donc définie par 2 termes : premier terme et raison.

Une suite géométrique est le phénomène discret d'une **progression exponentielle**.

Exemple : Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $q = 2$. Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4.

$$\begin{aligned}
u_1 &= q \times u_0 = 2 \times 3 = 6 \\
u_2 &= q \times u_1 = 2 \times 6 = 12 \\
u_3 &= q \times u_2 = 2 \times 12 = 24 \\
u_4 &= q \times u_3 = 2 \times 24 = 48
\end{aligned}$$

Propriété 4 : Une suite de termes non nuls est géométrique lorsque le rapport entre deux termes consécutifs est constant. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

Exemple : Montrer que la suite définie par : $u_n = 5^{n+3}$ est géométrique.
On calcule le rapport entre deux termes consécutifs quelconques :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1+3}}{5^{n+3}} = 5^{n+1+3-n-3} = 5$$

La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $u_0 = 5^3 = 125$.

Propriété 5 : Le terme général u_n d'une suite géométrique s'exprime en fonction de n de la façon suivante :

- Si le premier terme est u_0 alors : $u_n = q^n\, u_0$
- Si le premier terme est u_p alors : $u_n = q^{n-p}\, u_p$

Exemple : Soit une suite (u_n) géométrique de raison q. On donne : $u_7 = 4\,374$ et $u_5 = 486$. Trouver la raison q, le premier terme u_0 et u_{10} sachant que la raison est positive.

1) On exprime u_7 en fonction de u_5, on a alors :

$$u_7 = q^{7-5}u_5 \quad \Leftrightarrow \quad q^2 = \frac{u_7}{u_5} \quad \Leftrightarrow \quad q^2 = \frac{4\,374}{486} = 9 \overset{q>0}{\Rightarrow} \quad q = 3$$

2) On peut alors trouver u_0 : $u_5 = q^5\,u_0 \;\Leftrightarrow\; u_0 = \dfrac{u_5}{q^5} = \dfrac{486}{243} = 2$

3) $u_{10} = q^{10-7}\,u_7 = 3^3 \times 4\,374 = 27 \times 4\,374 = 118\,098$

Suites arithmétiques et géométriques

> Les suites arithmétiques

Exercice n°1 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + 7$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Donner le sens de variation de cette suite.
3. Représenter, par un nuage de points, les cinq premiers termes de la suite (u_n).

Exercice n°2 On considère une suite arithmétique (u_n) de raison 10 et de premier terme -1.

1. Déterminer les quatre premiers termes de cette suite.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n.

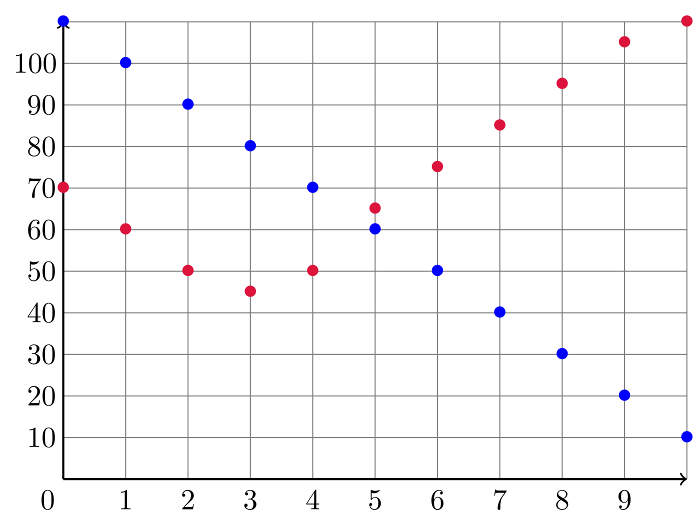
Exercice n°3 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n + 2$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Quelle semble-être la nature de la suite (u_n) ?
3. Calculer $u_{n+1} - u_n$ et prouver le résultat de la question précédente.

Exercice n°4

On considère les deux représentations graphiques ci-contre.
La représentation graphique bleue est celle d'une suite (v_n) et la rouge est celle d'une suite (w_n).

1. Déterminer graphiquement v_0, v_1, v_2.
2. Déterminer graphiquement w_0, w_1, w_2.
3. Laquelle de ces représentations est celle d'une suite arithmétique ?
4. Donner la valeur du premier terme et la raison de cette suite arithmétique et en déduire ses variations.



Exercice n°5

1. Pour chacune des suites ci-dessous dont on donne le terme général, montrer qu'elle est, ou n'est pas, arithmétique.

   a. $u_n = 7 - 4n$ **b.** $v_n = n^2 - 1$ **c.** $w_n = (n+1)^2 - n^2$

2. Pour les suites arithmétiques trouvées à la question précédente, donner la raison, le premier terme et déterminer ses variations sur $\mathbb{N}$.

> Les suites géométriques

Exercice n°6 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = v_n \times 2$.

1. Déterminer v_1, v_2 et v_3.
2. Voici un extrait de tableur qui permet de générer les premiers termes de la suite (v_n).
   Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 avant d'être étirée vers le bas ?
3. À l'aide du tableur, quelles semblent être les variations de la suite (v_n) ?
4. Prouver ce résultat.
5. Répondre à cette question a l'aide d'un tableur : à partir de quelle valeur de n le terme v_n est-il supérieur à 1 000 ?

	A	B
1	n	v_n
2	0	3
3	1	6
4	2	12
5	3	24
6	4	48
7	5	96
8	6	192
9	7	384

Exercice n°7 On considère la suite géométrique (v_n) de premier terme -2 et de raison 5.

1. Déterminer les quatre premiers termes de cette suite.
2. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier naturel n.
3. Donner les variations de la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$.

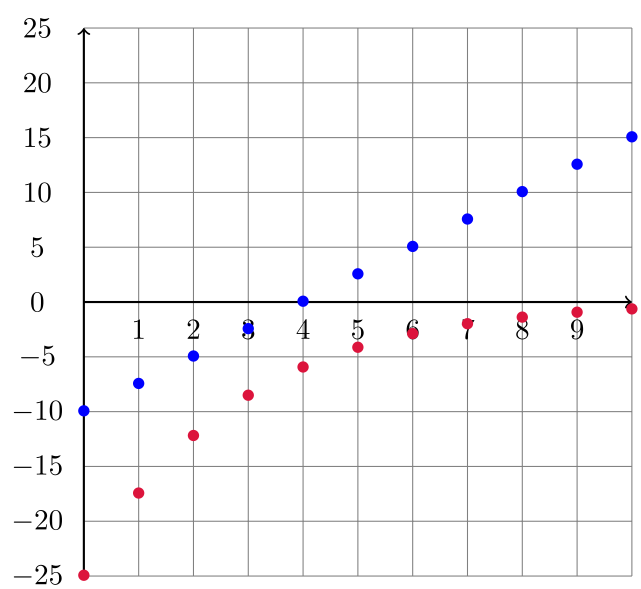
Exercice n°8 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. La suite (u_n) est-elle géométrique ?
3. On définie la suite (v_n) pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3$. Calculer u_0, u_1, u_2.
4. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. Pour cela, on pourra exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
5. Donner les variations de la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$.

Exercice n°9

On considère deux suites (u_n) et (v_n) respectivement représentée graphiquement en bleu et en rouge sur le repère ci-contre.

1. Lire graphiquement les valeurs de u_0 et v_0.
2. Quelles semblent être les variations des deux suites ?
3. Laquelle des suites semble arithmétique ? Et géométrique ?
4. Pour la suite arithmétique, donner sa raison. En déduire ses variations sur $\mathbb{N}$.
5. La suite géométrique a pour raison $\frac{7}{10}$. Calculer la valeur exacte du deuxième et troisième terme de cette suite.
6. Donner les variations de la suite géométrique sur $\mathbb{N}$.



Exercice n°10

1. Pour chacune des suites ci-dessous dont on donne le terme général, montrer qu'elle est, ou n'est pas, géométrique.

   a. $u_n = -\dfrac{2}{5^n}$ **b.** $v_n = \dfrac{2^{2n}}{3^{3n}}$ **c.** $w_{n+1} = -w_n + 3$ et $w_0 = -4$

2. Pour les suites géométriques trouvées à la question précédente, donner la raison, le premier terme et déterminer ses variations sur $\mathbb{N}$.

> Utiliser les suites pour modéliser

Exercice n°11

Jean-Kevin place 150€ sur un compte épargne rémunéré au taux mensuel de 0,4% à intérêts simples.
Ainsi, chaque mois, le capital acquis augmente de 0,4% du capital initial.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le capital acquis, en euros, au bout de n mois.

1. Déterminer u_0 puis u_1.
2. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).

   Jean-Kevin décide d'utiliser un tableur pour effectuer les calculs plus rapidement.
   On en donne un extrait ci-contre.

3. Quelle formule doit-il saisir dans la cellule B3 pour ensuite l'étirer vers la droite ?
4. Répondre aux questions suivantes à l'aide d'un tableur :
   (a) Quel est le capital acquis par Jean-Kevin au bout de 1 an ?
   (b) Au bout de combien de mois aura-t-il dépassé les 200€ sur son livret ?

	A	B
1	n	u_n
2	0	150
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	

Exercice n°12

Jean-Kevin décide de placer 1 800€ sur un compte épargne rémunéré au taux annuel de 2,25% à intérêt composé.
Ainsi, chaque année, le capital augmente de 2,25% par rapport au capital de l'année précédente.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le capital, en euros, acquis au bout de n années.

1. Déterminer u_0 puis u_1.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduite la nature de la suite (u_n).
3. Pour effectuer les calculs plus rapidement, Jean-Kevin décide d'utiliser le programme Python suivant :

```python
def Placement(n):
    u=1800
    for i in range(n):
        u=1.0225*u
    return(u)
```

   Quelle sera la somme sur le livret de Jean-Kevin au bout de 5 ans ? et au bout de 10 ans ?

4. Compléter ce programme pour déterminer au bout de combien d'années Jean-Kevin aura au moins doublé son capital inital.

Exercice n°13 Jean-Kevin a un salaire de 1 800€ net en 2018.

Son employeur lui propose une augmentation annuelle de 4%. On admet que son taux de recouvrement de l'impôt ne change pas durant les années à venir. On note s_n le salaire annuel de Jean-Kevin pour l'année 2018 + n.

1. (a) Calculer son revenu annuel en 2018.
   (b) Calculer s_1 et s_2.
2. (a) Pour tout entier naturel n, exprimer s_{n+1} en fonction de s_n.
   (b) En déduire la nature de la suite (s_n) et sa raison.
   (c) Calculer le salaire annuel prévu en 2022.
3. Déterminer le pourcentage d'évolution prévu pour le salaire de Jean-Kevin de 2018 à 2022.

Exercice n°14

On administre un médicament à un patient. On a constaté que la concentration de ce médicament dans le sang est de 1 g/L au bout de la première heure et qu'elle diminue de 9% par heure.

1. Modéliser cette situation par une suite que l'on nommera (c_n). Préciser sa nature, sa raison ainsi que son premier terme.
2. En déduire ses variations sur $\mathbb{N}$.
3. On estime que ce médicament n'est plus efficace lorsque sa concentration dans le sang devient inférieure à 0,2 g/L. Durant combien de temps le médicament a-t-il été efficace ?
4. À l'aide d'un programma Python ou d'un tableur, déterminer la concentration initiale que l'on doit administrer pour que le médicament fasse effet au bout de 24h. La réponse sera donnée à 0,01 g/L près.

Exercice n°15

Un biologiste étudie l'évolution de la population de singes sur un île. En 2025, il estime qu'il y a 1 000 singes sur cette île.

Partie A : Premier modèle Chaque année, la population de singes baisse de 10%.

1. Montrer qu'en 2026, il y aura 900 singes sur l'île.
2. Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de signes sur l'île pour l'année 2025 + n.
   On a donc $u_0 = 1\ 000$.
   (a) Indiquer ce que représente u_2 et calculer sa valeur.
   (b) Déterminer la nature de la suite (u_n) et préciser sa raison.
   (c) Donner les variations de cette suite.
3. Selon ce modèle, la population de singes est-elle menacée d'extinction ?

Partie B : Second modèle

On admet que l'évolution du nombre de singes est modélisée par la suite (v_n) ainsi définie :

$$\begin{cases} v_{n+1} & = & 0,9v_n + 150 \quad ; n \in \mathbb{N} \\ v_0 & = & 1\ 000 \end{cases}$$

1. Avec ce modèle, quelle sera la population de singes en 2026 ?
2. La feuille de calcul ci-contre donne les valeurs arrondies à l'unité des premiers termes de (v_n).
   Quelle formule faut-il saisir en B3 avant de l'étirer vers le bas ?
3. Reproduire cette feuille de calcul puis indiquer en quelle année, la population de singes dépassera pour la première fois les 1 400 individus.

	A	B
1	n	v_n
2	0	1 000
3	1	1 050
4	2	1 095