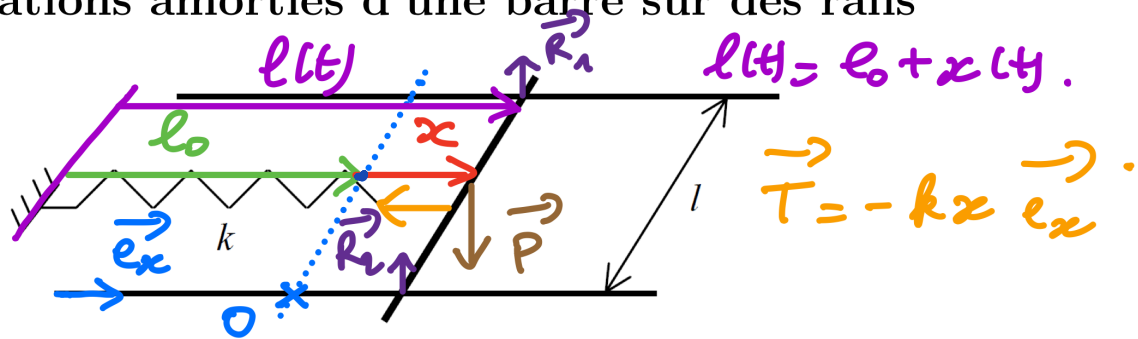


1 Oscillations amorties d'une barre sur des rails



$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{T} \quad \vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x$$

(1.1) Le PFD en projection sur (Ox) donne:

$$m \ddot{x} = -kx \Rightarrow m \ddot{x} + kx = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

(1.2) Conditions initiales:

$$x(0) = a \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = 0$$

Solution générale : $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

Première CI: $x(0) = a$

$$\Leftrightarrow A \cos(\omega_0 \times 0) + B \sin(\omega_0 \times 0)$$

$$A = a$$

2nd CI: $\dot{x}(0) = 0$

$$\Leftrightarrow -A\omega_0 \sin(0) + B\omega_0 \cos(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow B\omega_0 = 0$$

$$B = 0$$

Donc $x(t) = a \cos(\omega_0 t)$ et $\dot{x}(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t)$

1.3) Energie mécanique: $E_m = E_c + E_p$.

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m (-a\omega_0 \sin(\omega_0 t))^2 + \frac{1}{2} k (a \cos(\omega_0 t))^2$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} k a^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} \cancel{m} a^2 \frac{k}{\cancel{m}} \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} k a^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{k}{2} a^2 (\underbrace{\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)}_{=1})$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \langle E_c(t) \rangle &= \frac{1}{2} k a^2 \underbrace{\langle \sin^2(\omega_0 t) \rangle}_{1/2} \\ &= \frac{1}{4} k a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De même : } \langle E_p(t) \rangle &= \frac{1}{2} k a^2 \underbrace{\langle \cos^2(\omega_0 t) \rangle}_{1/2} \\ &= \frac{1}{4} k a^2 = \langle E_c(t) \rangle. \end{aligned}$$

1.5 Trouver quelle est la dimension de $\hbar$ et donner son unité S.I.

$$\text{On a } \vec{f} = -\hbar \vec{v} \Rightarrow [f] = [\hbar] \times [v].$$

$$\Rightarrow [h] = \frac{M \cdot \cancel{L} \cdot T^{-2}}{\cancel{L} \cdot T^{-1}} = M \cdot T^{-1} \text{ s'exprime en kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

1.6 Établir l'équation différentielle du mouvement et donner l'expression du facteur de qualité Q .

Comparé au 1.1, une force supplémentaire a été prise en compte : $\vec{f} = -h \vec{v} = -h \dot{x} \vec{e}_x$

Le PFD en projection sur (Ox) donne :

$$m \ddot{x} = -kx - h \dot{x}$$

$$(1) \quad 1 \times \ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad) \text{ forme canonique.}$$

$$2\alpha \omega_0 = \frac{\omega_0}{Q} = 2\alpha \omega_0$$

1.7 On suppose $\alpha \ll \omega_0$. Déterminer l'expression de l'abscisse x de la barre en fonction du temps t .

Equation caractéristique associée à (1) :

$$r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = (2\alpha)^2 - 4\omega_0^2 = 4(\alpha^2 - \omega_0^2) \ll 1$$

$$\text{d'où } r = \frac{-2\alpha \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2} = -\alpha \pm j\frac{\sqrt{4(\omega_0^2 - \alpha^2)}}{2}$$

$$r = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad \omega_2 : \text{pseudo-pulsation} \quad \alpha^2 \ll \omega_0^2$$

On en déduit la sol. générale de (1) :

$$x(t) = e^{-\alpha t} (A \cos(\omega_2 t) + B \sin(\omega_2 t)) \text{ avec } \omega_2 \approx \omega_0$$

$$\bullet \text{ Or } x(0) = a \Rightarrow A = a. \quad \omega_2 \approx \sqrt{\omega_0^2} = \omega_0.$$

- Donc $\ddot{x}(t) = -\alpha e^{-\alpha t} (A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)) + e^{-\alpha t} \omega_0 (-A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t))$.

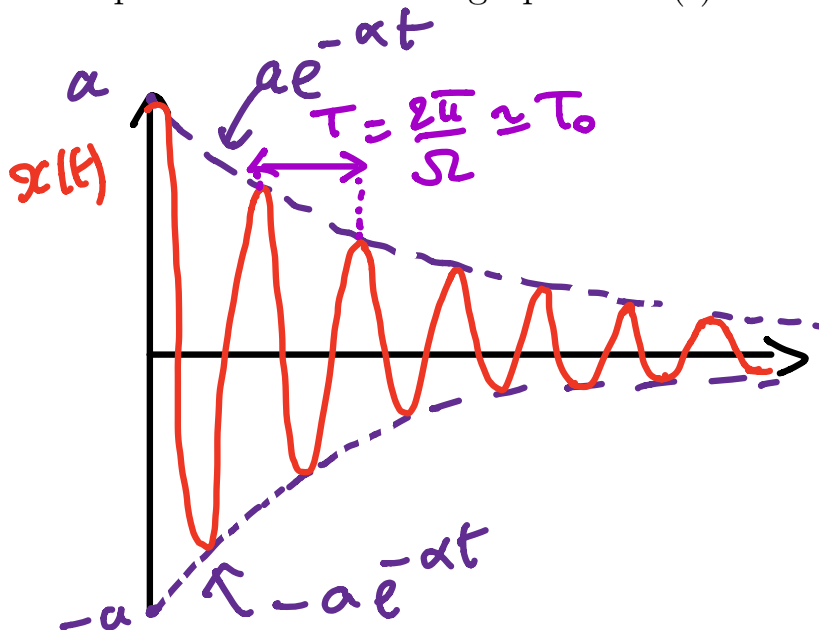
On $\ddot{x}(0) = 0 \Rightarrow -\alpha A + \omega_0 B = 0$
 $\Rightarrow B = \frac{\alpha A}{\omega_0} \ll A$ car $\frac{\alpha}{\omega_0} \ll 1$.

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\alpha t} \left(\underbrace{a \cos(\omega_0 t)}_{f(t)} + \underbrace{\frac{\alpha a}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}_{g(t)} \right).$$

$\frac{\text{amplitude de } g(t)}{\text{amplitude de } f(t)} = \frac{\alpha}{\omega_0} \ll 1$: on va négliger $g(t)$ comparé à $f(t)$.

Au final : $x(t) = a e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)$

1.8 Représenter l'allure du graphe de $x(t)$ en fonction de t .



à la TI prendre :
 $a = 3$; $\omega_0 = 2\pi$ ($T_0 = 1$)
 $\alpha = \frac{\omega_0}{10} = \frac{2\pi}{10}$.

1.9 La condition d'amortissement faible précédente étant toujours vérifiée, montrer que l'énergie mécanique à l'instant t peut se mettre sous la forme approchée :

$$E_m(t) = \frac{ka^2}{2} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On donnera l'expression de τ .

$$\text{On a } \ddot{x}(t) = \underbrace{-\alpha a e^{-\alpha t}}_{A_1} \cos(\omega_0 t) + \underbrace{-a e^{-\alpha t} \omega_0}_{B_1} \sin(\omega_0 t)$$

$$\text{On a } \left| \frac{B_1}{A_1} \right| = \frac{\omega_0}{\alpha} \gg 1$$

$$\text{d'où } \ddot{x}(t) \approx -a \omega_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)$$

$$\text{Alors } E_m = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$= \frac{1}{2} k (a e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t))^2 + \frac{1}{2} m (-a \omega_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t))^2$$

$$= \frac{1}{2} k a^2 e^{-2\alpha t} \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 e^{-2\alpha t} \sin^2(\omega_0 t)$$

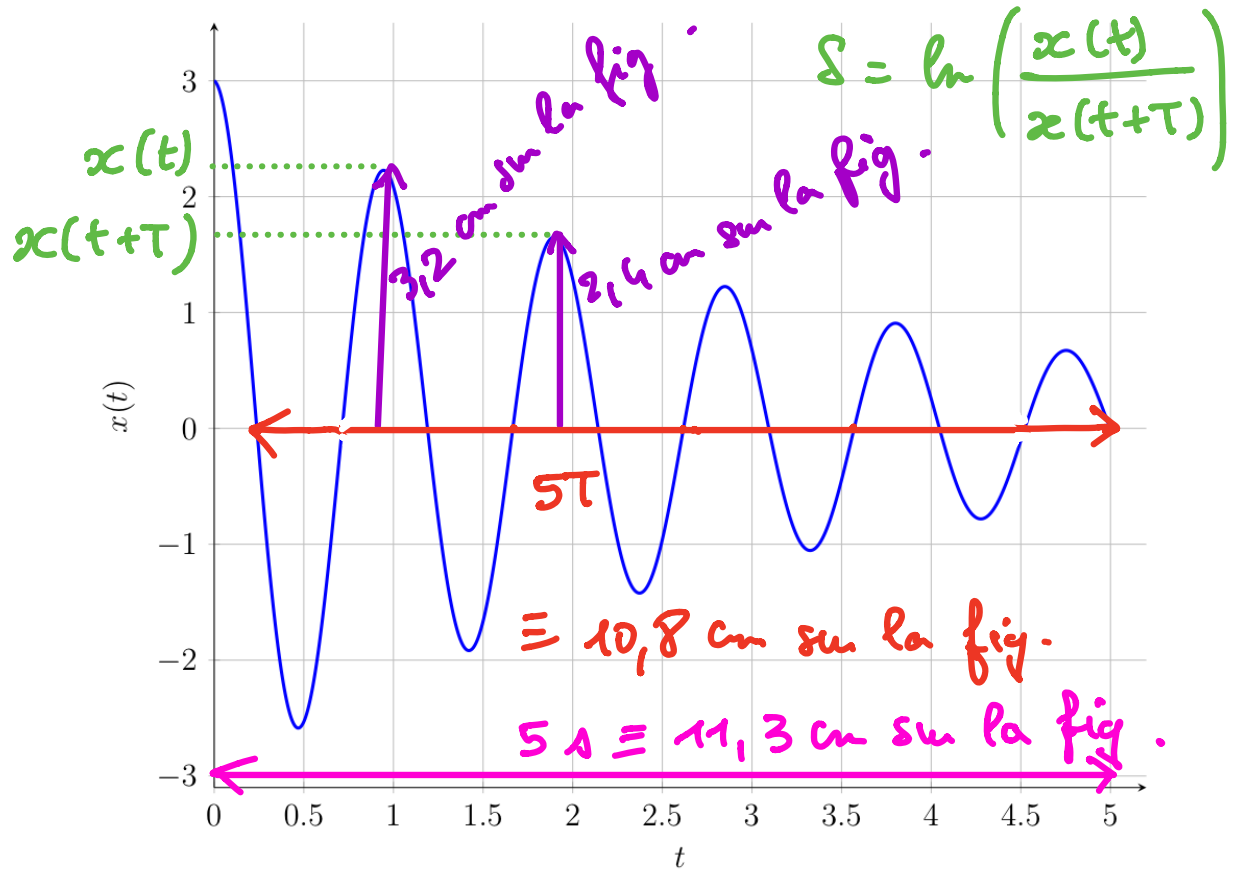
, or $m \omega_0^2 = k$

$$= \frac{1}{2} k a^2 e^{-2\alpha t} (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t))$$

$$= \frac{1}{2} k a^2 e^{-2\alpha t}$$

par identification $\tau = \frac{1}{2\alpha}$

Position $x(t)$ de la barre



1.10 Montrer que le décrément logarithmique défini par $\delta = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right)$ peut s'exprimer en fonction de Q par la formule :

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \approx \frac{\pi}{Q}$$

En déduire la valeur de Q grâce au relevé expérimental.

On a $\frac{x(t)}{x(t+T)} = \frac{e^{-\alpha t} \times \cancel{\cos(\Omega t)}}{e^{-\alpha(t+T)} \times \cancel{\cos(\Omega(t+T))}} \quad \Omega \approx \omega_0$

$= e^{\alpha T} \quad 2\alpha = \frac{\omega_0}{Q}$

d'où $\delta = \alpha T = \frac{\omega_0}{2Q} \times \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad \Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

$= \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \quad T = \frac{2\pi}{\Omega}$

On mesure $\delta = \ln\left(\frac{3.2}{2.4}\right) = 0.29$

$$\text{En } \delta \approx \frac{\pi}{Q} \Rightarrow Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{3,14}{0,29} = 10,8$$

1.11 Mesurer la valeur de la pseudo-période T puis en déduire les valeurs de m et h .

$$5T = 10,8 \times \frac{5}{11,3} \Rightarrow T = 0,96 \text{ s} \approx T_0$$

$$\text{puis } \omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \Rightarrow m = \frac{kT_0^2}{4\pi^2} = 0,23 \text{ kg}.$$

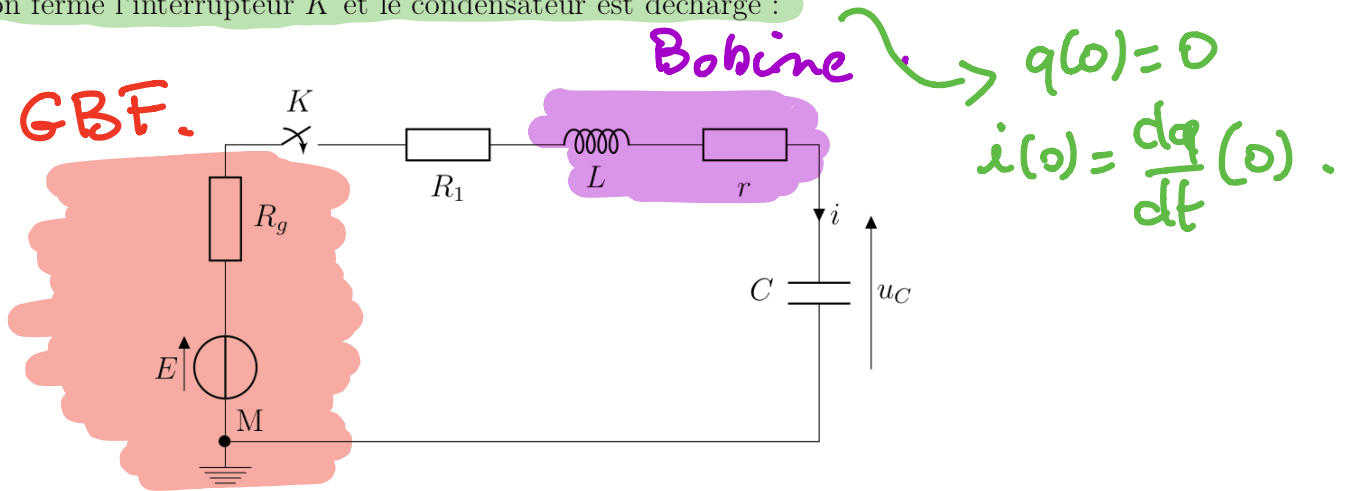
$$\text{Ensuite on a } \frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m} \Rightarrow Q = \frac{m\omega_0}{h} = \frac{m}{h} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{km}}{h}.$$

$$\Rightarrow h = \frac{\sqrt{km}}{Q} = \frac{(10 \times 0,23)^{1/2}}{10,8} = 0,14 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

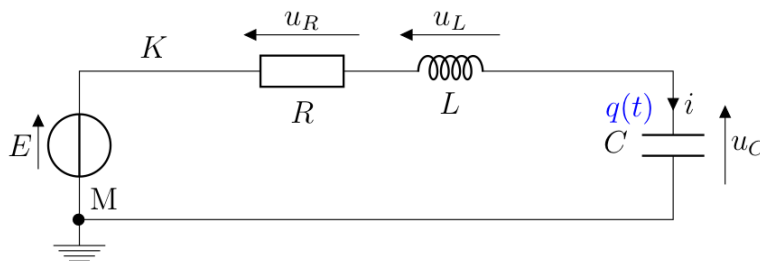
Exo 2 voir page suivante sup.

2 Réponse indicielle d'un circuit RLC série

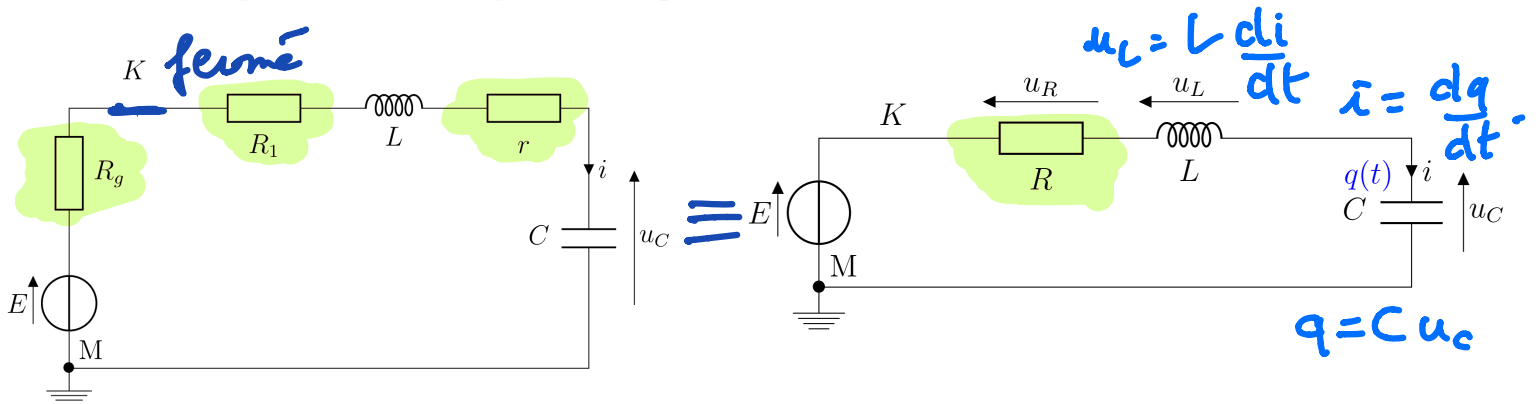
Dans le circuit représenté ci-dessous le générateur de tension a une force électromotrice constante $E = 1 \text{ V}$, $C = 0,1 \mu\text{F}$, $L = 0,15 \text{ H}$ et R est la résistance totale du circuit quand K est fermé. Pour évaluer la résistance totale du circuit, on doit prendre en compte la résistance interne du générateur $R_g = 50 \Omega$, la résistance interne de la bobine $r = 13 \Omega$ plus une boîte à décade dont on peut faire varier la résistance R_1 qui est placée en série avec L et C . A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K et le condensateur est déchargé :



Ainsi, une fois l'interrupteur K fermé, le circuit est équivalent au circuit ci-dessous avec $R = R_1 + R_g + r$:



2.1 Trouver l'équation différentielle vérifiée par $q(t)$ à la fermeture de K . Quelle est le paramètre mécanique de l'exercice 1 qui est analogue à R .



La loi des mailles donne: $u_C + u_L + u_R = E$

$$\Rightarrow \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} + R i = E$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{CE}{LC}$$

$$\Rightarrow \ddot{q} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{\frac{\omega_0}{Q}} \dot{q} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} q = \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} \times CE$$

2.2 Exprimer la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q de cette oscillateur amorti.

On déduit de l'E.D : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 8165 \text{ rad.s}^{-1}$

et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Rightarrow Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{L}{R} \times \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

2.3 Trouver l'expression de la résistance critique, notée R_c , qui est la valeur de la résistance totale du circuit pour laquelle on a le régime critique. Exprimer Q en fonction de R_c puis calculer R_c .

Lorsque $Q = \frac{1}{2}$ alors $R = R_c : \frac{1}{2} = \frac{1}{R_c} \sqrt{\frac{L}{C}}$

$$\Rightarrow R_c = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} = 2450 \Omega$$

Pour une valeur de Q quelconque on peut alors écrire :

$$Q = \frac{R_c}{2R} \quad \text{car} \quad \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{R_c}{2}$$

2.4 On règle la boîte à décade de résistance de manière à avoir $R_1 = 182 \Omega$. Calculer le facteur de qualité et la pulsation ω .

$$\text{Donc } R = R_1 + R_g + r = 182 + 50 + 13 = 245 \Omega$$

$$\text{d'où } Q = \frac{2450}{2 \times 245} = 5.$$

$$\text{et } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = 8123 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2.5 Donner l'expression de $q(t)$ et de $i(t)$ puis tracer leur allure à l'aide de votre calculatrice préférée. On pourra simplifier les expressions compte tenu du facteur de qualité élevé. Vous devez obtenir les courbes suivantes :

Solution générale de l'ED :

$$q(t) = e^{-\alpha t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) + CE$$

sol. de l'éq. homogène

+ CE
solution particulière

1^{re} condition initiale : sans 2nd. membre.

$$q(0) = 0 \Leftrightarrow e^0 (A \cos(\omega \cdot 0) + B \sin(\omega \cdot 0)) + CE$$

$$\Leftrightarrow A + CE = 0 \Leftrightarrow A = -CE$$

2^e condition initiale :

$$\text{Donc } \frac{dq}{dt} = -\alpha e^{-\alpha t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) + e^{-\alpha t} (-A \omega \sin(\omega t) + B \omega \cos(\omega t))$$

$$\dot{q}(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\alpha e^0 (A \cos(0) + B \sin(0)) + e^0 (-A\omega \sin(0) + B\omega \cos(0)) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\alpha A + B\omega = 0$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{+\alpha A}{\omega} = -\frac{\alpha CE}{\omega}$$

Donc

$$q(t) = e^{-\alpha t} \left(-CE \cos(\omega t) - \frac{\alpha CE}{\omega} \sin(\omega t) \right) + CE$$

$$\text{On } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \simeq \omega_0$$

$$\text{et } 2\alpha = \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{1}{2Q} \ll 1$$

terme
négligeable

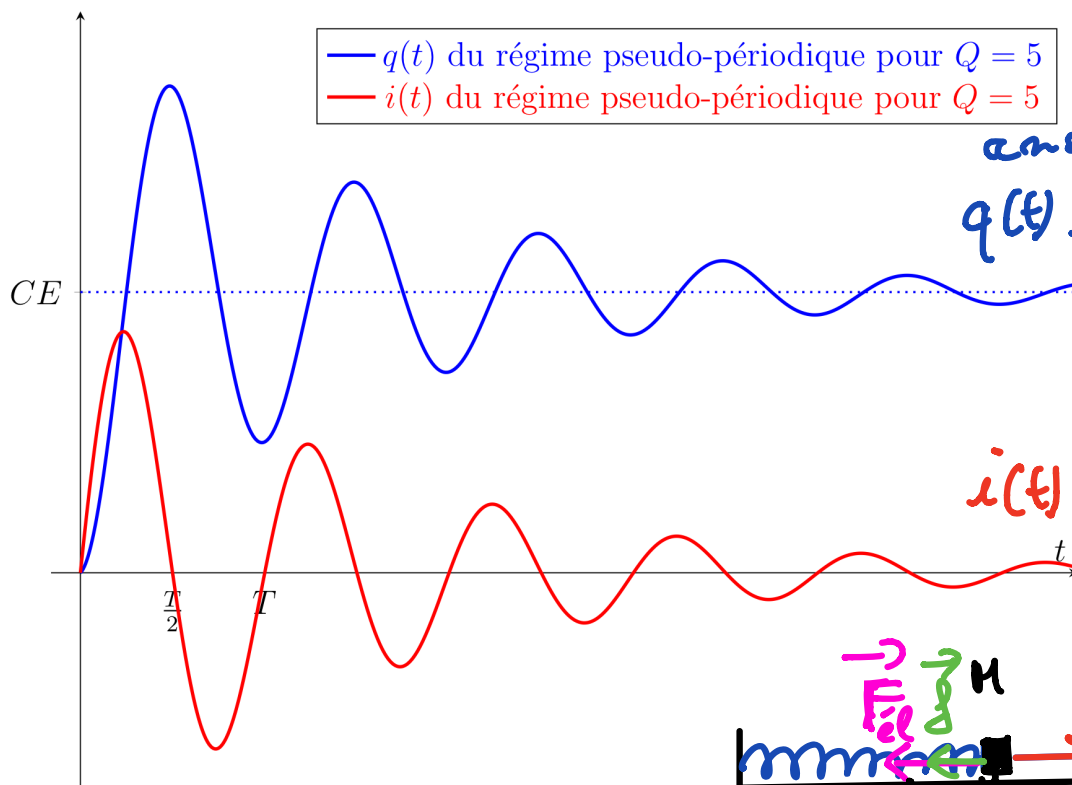
Au final : $q(t) = CE \left(1 - e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t) \right)$

* Pour le tracé à la TI (pour avoir l'allure de la courbe) prendre $\omega_0 = 2\pi$, sur l'axe des abscisses correspond à $T_0 \simeq T$ (car $\omega \simeq \omega_0$) et $\alpha = \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{2\pi}{10}$.

$$\text{On a } i(t) = \frac{dq}{dt} = CE \left[\alpha e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t) + e^{-\alpha t} \omega_0 \sin(\omega_0 t) \right]$$

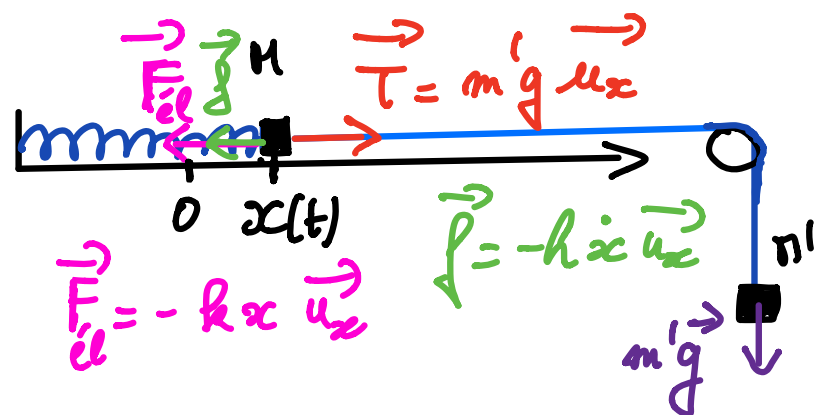
négligé car $\alpha \ll \omega_0$.

$$\text{Soit } i(t) = CE \omega_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)$$

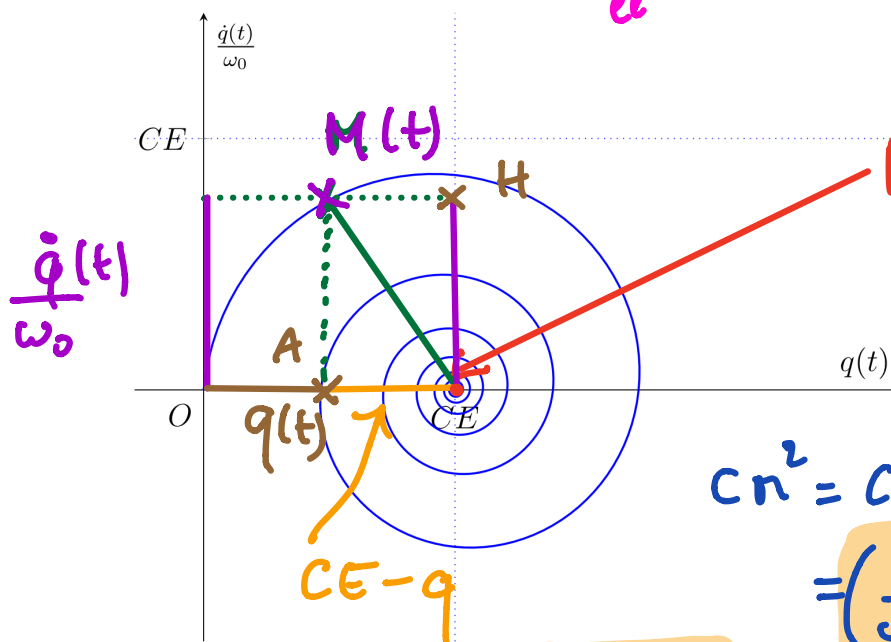


analogie électro-mécan
 $q(t) \equiv x(t)$

$i(t) \equiv v(t)$



2.6 Expliquer l'allure du diagramme de phase :



point attracteur :
 $C(CE, 0)$

$$Cn^2 = CH^2 + AC^2$$

$$= \left(\frac{\dot{q}}{\omega_0}\right)^2 + (CE - q)^2$$

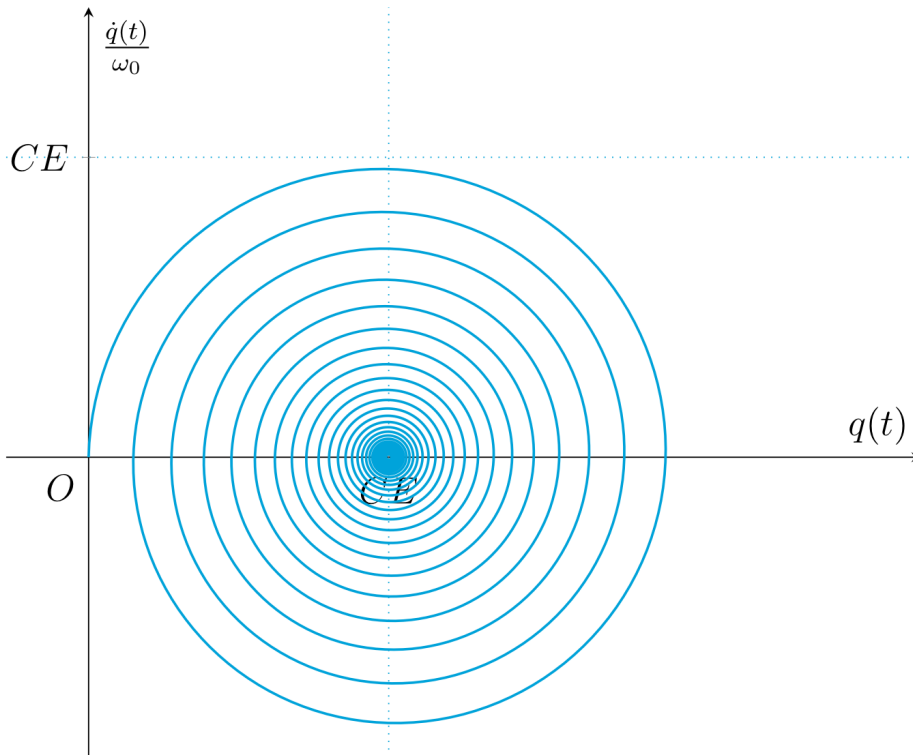
On calcule $(q - CE)^2 + \left(\frac{\dot{q}}{\omega_0}\right)^2$

$$= CE^2 e^{-2\alpha t} \cos^2(\omega_0 t) + CE^2 e^{-2\alpha t} \sin^2(\omega_0 t)$$

$$= (CE)^2 e^{-2\alpha t}$$

d'ou $CM = CE e^{-\alpha t}$: c'est une spirale logarithmique.

2.7 Expliquer la nouvelle allure du diagramme de phase pour $R_1 = 0 \Omega$:



Si $R_1 = 0 \Omega$ alors
 $R = 63 \Omega$

$$\text{d'où } Q = \frac{R_c}{2R}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{2450}{2 \times 63} = 19,4.$$

le facteur de qualité Q est ici bien supérieur et le système met bc plus de temps pour atteindre l'état permanent.

2.8 Tracer l'allure du diagramme de phase pour $R_1 = 5\text{ k}\Omega$:

