

Nombres complexes – Exercices – Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

$$(1 - i)X^3 - (5 + i)X^2 + (4 + 6i)X - 4i = 0$$

1. Montrer que cette équation admet une racine réelle.
2. Résoudre cette équation.

Exercice 2 corrigé disponible

1. Montrer que

$$X^3 + (1 - 2i)X^2 - 3(1 + i)X - 2 + 2i = 0 \quad (E)$$

Admet une ou plusieurs racines réelles.

2. Résoudre (E)

Exercice 3 corrigé disponible

1. Calculer les racines n -ième de $-i$ et de $1 + i$.
2. Résoudre $z^2 - z + 1 - i = 0$.
3. En déduire les racines de $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

Exercice 4 corrigé disponible

Pour tout nombre complexe z différent de 1, on définit $Z = \frac{z-2i}{z-1}$.

On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ avec x, y, X et Y réels

1. Exprimer X et Y en fonction de x et y .
2. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que Z soit réel.
3. Déterminer l'ensemble C des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 5 corrigé disponible

Pour tout nombre complexe z différent de i , on définit $Z = \frac{z+3}{z-i}$.

On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ avec x, y, X et Y réels

1. Exprimer X et Y en fonction de x et y .
2. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que Z soit réel.
3. Déterminer l'ensemble C des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 6 corrigé disponible

Représenter les ensembles suivants sur un graphique

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \left\{ M(z) / \arg(z - 2i + 1) = \frac{2\pi}{3} \quad (2\pi) \right\} & \mathcal{C}_3 &= \left\{ M(z) / Z = i \frac{z - 2i + 1}{z - 3 + i} \in \mathbb{R}_+ \right\} \\ \mathcal{C}_2 &= \left\{ M(z) / \arg\left(\frac{z - 2i + 1}{z - 3 + i}\right) = \pi \quad (2\pi) \right\} & \mathcal{C}_4 &= \{ M(z) / |z + 2 + i| = |z - 2i| \} \end{aligned}$$

Exercice 7 corrigé disponible

1. Calculer sous forme algébrique les racines carrées de i
2. Calculer sous forme algébrique les racines carrées de $1 + \sqrt{3} \cdot i$
3. Calculer sous forme exponentielle les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$
4. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Exercice 8 corrigé disponible

Linéariser les expressions suivantes :

1. $A = \sin^3 x,$
2. $B = \cos(2x) \sin(x),$
3. $C = \sin^4 x \cos x,$
4. $D = \sin(4x) \cos(x).$

Exercice 9 corrigé disponible

On considère le nombre complexe $\omega = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

1. Calculer les racines carrées de ω en les cherchant sous la forme algébrique.
2. Donner la forme exponentielle de ω .
3. Calculer les racines carrées de ω en les cherchant sous la forme exponentielle.
4. En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

On considère le nombre complexe $\Delta = -5 + 12i$.

5. Vérifier que le nombre complexe $2 + 3i$ est une racine carrée de Δ .
6. Résoudre l'équation

$$z^2 - (4 + 5i)z - 1 + 7i = 0.$$

Exercice 10 corrigé disponible

1. Soit $\Delta = 8 - 6i$. Déterminer les racines carrées de Δ sous forme cartésienne.
2. Soit $P(X) = X^2 + (-5 - i)X + (4 + 4i)$.
Déterminer les racines de P .
3. Soit $Q(X) = X^3 + (-6 - i)X^2 + (9 + 5i)X + (-4 - 4i)$.
Ecrire $Q(X)$ comme produit de polynômes de degré 1.

Exercice 11 corrigé disponible

1. Quelles sont les racines cubiques sur $\mathbb{C}$ sous forme algébrique de $A = 27i$? Combien vaut leur somme ?
2. Calculer les racines quatrièmes sur $\mathbb{C}$ sous forme algébrique de $B = 16$
3. Quelles sont les racines cubiques de $C = 1$ sur $\mathbb{C}$? Combien vaut leur somme ?

Exercice 12 corrigé disponible

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^3 dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi} (\cos 2x)^2 \cdot \sin 3x dx$$