

MF2 – Actions mécaniques d'un fluide en mouvement

A – Travaux dirigés

MF21 - Plan incliné

1.

- a) Vu la symétrie du problème, le vecteur vitesse est dirigé suivant (Ox).

$$\text{Donc } \operatorname{div} \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow v = v(y, z)$$

On suppose invariance suivant l'axe Oz (on néglige les effets de bords) d'où

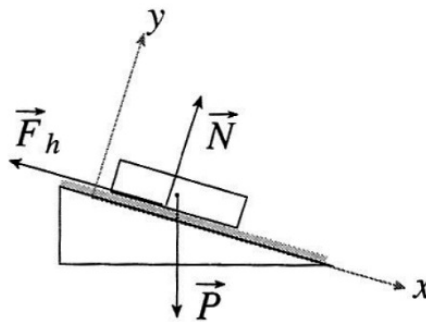
$$\Rightarrow \vec{v} = v(y) \vec{u}_x$$

- b) Or
- $v(0) = 0$
- et
- $v(e) = v_0 \Rightarrow \vec{v} = \frac{v_0}{e} y \vec{u}_x$

- c)
- $\vec{F}_h = -\eta S \frac{\partial v}{\partial y} \vec{u}_x = -\eta S \frac{v_0}{e} \vec{u}_x$

2.

- a) Le pave est soumis à son poids, l'action normale et à la force de frottement fluide.



- b) La vitesse du pavé est constante donc :
- $\vec{P} + \vec{F}_h + \vec{N} = \vec{0}$

En projection sur (Ox) :

$$Mg \sin(\alpha) - \eta S \frac{v_0}{e} = 0 \Rightarrow v_0 = \frac{Mge \sin(\alpha)}{\eta S}$$

3. Le modèle affirme que l'épaisseur est constante, sans donner sa valeur. On peut penser qu'il y aura une accumulation d'huile à l'avant du bloque...Un peu comme un bateau qui avance dans l'eau.

MF22 – Coefficient de traînée d'un cycliste

Prenons $v_f = 50 \text{ km.h}^{-1}$ et une longueur caractéristique de 1m, alors :

$$Re = \frac{\mu v L}{\eta} = 1,3 \times \frac{50}{3.6} \times \frac{1}{18.10^{-6}} = 10^6$$

On n'est pas à faible vitesse (nombre de Reynolds petit), où le coefficient de traînée C_x est inversement proportionnel à la vitesse. La puissance développée par le cycliste pour contrarier les forces de frottements quadratiques est donc :

$$P = F_t v_f = \frac{1}{2} \mu C_x A v_f^3$$

En observant la photo, on peut estimer le maître couple à : $A = 0,4 \text{ m}^2$

Sur le graphique, on lit pour $v_f = 50 \text{ km.h}^{-1}$, une puissance aérodynamique de 600 W soit : $C_x = \frac{P}{\frac{1}{2} \mu A v_f^3} = 0,86$

On obtient l'ordre de grandeur des coureurs cyclistes. L'ajout des microbilles et des techniques aérodynamiques (casque en forme de goutte, vélo ultra-plat, combinaison à base de téflon...) permettent de baisser ce coefficient.

B – Exercices supplémentaires

MF23 – Parachutisme

1. Supposons le nombre de Reynolds suffisamment grand pour que la traînée soit donnée par la formule $\vec{F} = -\frac{1}{2} \mu C_x S v \vec{v}$. On néglige la poussée d'Archimède devant le poids du parachutiste. Celui-ci n'est alors soumis qu'à son poids et à la force de traînée. Quand il a atteint sa vitesse limite, les deux forces se compensent et :

$$v_l = \sqrt{\frac{mg}{0,5 \mu C_x S}} = \sqrt{\frac{120 \times 9.8}{0,5 \times 1,3 \times 1,2 \times \pi \times 3^2}} = 7,3 \text{ m.s}^{-1}$$

en prenant la masse volumique de l'air égale à $1,3 \text{ kg.m}^{-3}$.

Il reste à valider l'hypothèse en calculant de nombre de Reynolds (la viscosité dynamique de l'air est égale à $1,8 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$) :

$$Re = \frac{\mu D v_l}{\eta} = \frac{1,3 \times 6 \times 7,3}{1,8 \times 10^{-5}} \simeq 3 \times 10^6 \gg 1.$$

L'hypothèse de départ est donc valable.

2. En altitude, la masse volumique de l'air est plus faible. Si le parachutiste garde le même équipement, sa vitesse limite augmente. La vitesse calculée à la première question correspond à la vitesse qu'il atteindrait en sautant d'une hauteur de 2,7 m ce qui est déjà beaucoup. Si on adopte un modèle d'atmosphère en équilibre isotherme, la masse volumique de l'air à une altitude h est donnée par $\mu(h) = \mu(0) \exp\left(-\frac{h}{H}\right)$ avec $H \simeq 8 \text{ km}$, ce qui donne, à 4200 mètres d'altitude, $\mu \simeq 0,6 \mu(0)$ (même si le modèle est simpliste, l'ordre de grandeur est bon). La vitesse limite serait donc multipliée d'un facteur environ 1,3, ce qui est beaucoup trop. Le parachutiste a donc intérêt à choisir un parachute de surface plus grande pour arriver au sol avec une vitesse raisonnable.

MF24 – Trajectoire d'une balle

1. Écrivons les dimensions des différents paramètres : $[U] = \text{LT}^{-1}$; $[g] = \text{LT}^{-2}$ et $[\mathcal{L}_g] = \text{L}$. On dispose de trois paramètres pour deux dimensions indépendantes. Il est donc possible de former un nombre sans dimension C :

$$C = \frac{U^2}{\mathcal{L}_g g}.$$

La constante C est de l'ordre de l'unité⁴ et l'on écrit : $\mathcal{L}_g = \frac{U^2}{g}$. Le tableau ci-dessous donne les valeurs de $\mathcal{L}_g$ pour les différents sports considérés.

4. Il est aisé de montrer que pour un angle de tir α , la constante C est égale à $\sin(2\alpha)$. Elle est donc bien de l'ordre de l'unité.

Sport	$\mathcal{L}_g$ (m)
Golf	830
Tennis	500
Football	90
Handball	41

2. a. Le nombre de Reynolds est $\text{Re} = \frac{U(2R)}{\nu}$, avec $\nu = \frac{\eta}{\mu} = 1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ pour l'air.

Le tableau qui suit présente les valeurs du nombre de Reynolds pour les différents cas envisagés.

Sport	Re
Golf	$2,5 \times 10^5$
Tennis	$3,0 \times 10^5$
Football	$4,2 \times 10^5$
Handball	$2,5 \times 10^5$

Dans tous les cas, on obtient un nombre de Reynolds de l'ordre de 10^5 . On choisit donc d'exprimer la force de traînée avec une dépendance quadratique en vitesse : $F_T = \frac{\pi}{2} C_x \mu_a R^2 U^2$, avec $C_x \simeq 0,4$.

b. On écrit la loi de la quantité de mouvement pour la balle, en mouvement rectiligne selon un axe horizontal (Ox) :

$$m \frac{dU}{dt} = -0,2\pi\mu_a R^2 U^2.$$

Écrivons $\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} = U \frac{dU}{dx}$. Alors, après simplification par U , on obtient :

$$m \frac{dU}{dx} = -0,2\pi\mu_a R^2 U,$$

ou encore :

$$\frac{dU}{dx} + \frac{0,2\pi\mu_a R^2}{m} U = 0.$$

On pose $\mathcal{L}_a = \frac{m}{0,2\pi\mu_a R^2}$. Alors, la solution de l'équation différentielle précédente peut s'écrire : $U(x) = U(x=0) \exp\left(-\frac{x}{\mathcal{L}_a}\right)$.

c. Les valeurs de la distance caractéristique de freinage aérodynamique pour les différents sports envisagés sont regroupées dans le tableau suivant (on a pris $\mu_a = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$).

Sport	$\mathcal{L}_a$ (m)
Golf	120
Tennis	70
Football	50
Handball	60

3. Afin de conclure, on regroupe dans un même tableau les différentes distances caractéristiques : la longueur L du terrain, la portée $\mathcal{L}_g$ d'un tir et la distance de freinage aérodynamique $\mathcal{L}_a$.

Sport	L (m)	$\mathcal{L}_g$ (m)	$\mathcal{L}_a$ (m)
Golf	200	830	120
Tennis	24	500	70
Football	100	90	50
Handball	40	41	60

De façon assez sommaire, on pourra considérer que les effets de la gravité sur la trajectoire d'une balle sont sensibles si $\mathcal{L}_g \leq L$. De même, le freinage aérodynamique peut être observé si $\mathcal{L}_a \leq L$. On conclut alors :

- pour le golf, les effets de freinage aérodynamique limitent la portée des tirs.
- pour le tennis, le terrain est trop court pour que soient observés les effets de la gravité et du freinage aérodynamique. Afin que la balle de tennis retombe sur le court alors que sa vitesse est de l'ordre de 70 m.s^{-1} , le joueur ne peut pas compter sur la gravité : il doit user d'effets aérodynamiques liés à la mise en rotation de la balle sur elle-même.
- pour le football, on constate que les longs dégagements du gardien ont une portée limitée par le freinage aérodynamique et que la distance atteinte correspond en gros à la moitié de la longueur du terrain, ce que l'on observe effectivement. Pour les tirs plus courts (coups-francs), la gravité et le freinage aérodynamique jouent peu, le joueur ne peut pas compter sur la gravité pour que le ballon retombe où il le souhaite et il doit user d'effets aérodynamiques, liés à la mise en rotation de la balle sur elle-même, pour contrôler la trajectoire du ballon.
- on constate que les trajectoires des ballons de handball sont contrôlés par la gravité et que les effets aérodynamiques sont peu importants.

MF25 – Modélisation d'une lubrification

a) Le fluide est visqueux, donc sa vitesse au voisinage d'une paroi est identique à celle de la paroi.

Ainsi,

$$\vec{v}(z=0) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{v}(z=e) = v_0 \vec{u}_x.$$

b) On considère un champ de vitesse linéaire, selon $\vec{u}_x$, soit :

$$\vec{v}(z) = v_0 \frac{z}{e} \vec{u}_x.$$

Les conditions aux limites sont bien satisfaites.

c) La composante horizontale $d\vec{F}$ de la force exercée au travers de dS par le fluide au-dessus de z sur celui au-dessous est :

$$d\vec{F} = \eta \frac{\partial v}{\partial z} dS \vec{u}_x = \eta \frac{v_0}{e} dS \vec{u}_x.$$

D'après le principe des actions réciproques, la force exercée par le fluide du dessous sur celui du dessus est $d\vec{F}' = -d\vec{F}$. En considérant des forces surfaciques, on obtient :

$$\vec{f}_s = \frac{d\vec{F}'}{dS} = -\eta \frac{v_0}{e} \vec{u}_x.$$

Le signe moins traduit le fait que le fluide tend à ralentir la plaque. Le mouvement de cette dernière doit être maintenu par une action extérieure pour compenser.

d) On applique la relation fondamentale de la dynamique au bloc, en projection sur $\vec{u}_x$:

$$m \dot{v} = mg \sin \alpha - \eta \frac{v}{e} a^2$$

d'après ce qui précède.

e) Après le régime transitoire, $\dot{v} = 0$, soit :

$$v = v_f = \frac{m g e \sin \alpha}{\eta a^2}.$$

On déduit :

$$\eta = \frac{m g e \sin \alpha}{v_f a^2} = 1,4 \text{ Pl}.$$

f) L'équation différentielle du mouvement de la masse est du type :

$$\tau \dot{v} + v = v_f$$

où τ est la durée typique du régime transitoire. Numériquement, $\tau = \frac{m e}{\eta a^2} \simeq 0,07 \text{ s}$. On peut ensuite choisir le critère de 3τ pour la durée du régime transitoire.

MF26 – Vent favorable

Un coureur de 100 mètres a une vitesse voisine de 10 m.s^{-1} par rapport au sol et à l'air lorsque celui-ci est immobile. Lorsque le vent est favorable, cela signifie qu'il souffle dans le dos de l'athlète. Pour un vent favorable de 2 m.s^{-1} , la vitesse de l'athlète par rapport au vent n'est plus que de 8 m.s^{-1} : elle a donc diminué de 20%.

Le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement autour de l'athlète est :

$$R_e = \frac{\mu V D}{\eta} = \frac{1,3 \times 8 \times 0,5}{1,8 \cdot 10^{-5}} = 3 \cdot 10^5$$

où D représente la largeur caractéristique de l'athlète (on peut l'assimiler à un cylindre de diamètre D pour effectuer de calcul d'ordre de grandeur).

Vu la valeur élevée du nombre de Reynolds, on choisit un modèle de traînée variant comme la vitesse au carré. Une réduction de la vitesse de 10 à 8 m.s^{-1} correspond à une force de traînée divisée par un facteur voisin de :

$$\alpha = \left(\frac{10}{8}\right)^2 \sim 1,6.$$

L'avantage est donc considérable !

MF27 – Caléfaction

1. Soit : $E_s = \gamma \Sigma$ donc γ a la dimension d'une énergie surfacique :

$$[\gamma] = J m^{-2} = M L^2 T^{-2} L^{-2} = M T^{-2} = kg s^{-2}$$

Si on néglige la hauteur du palet par rapport à R alors la surface peut s'écrire :

$$\Sigma = 2 \pi R^2 = 2 \frac{\Omega}{h}$$

$$\Rightarrow E_s = 2 \gamma \frac{\Omega}{h}$$

2. On a : $E_{pg} = mg z_g = \rho \Omega g \frac{h}{2}$

3. D'où l'énergie potentielle totale : $E_p = 2 \gamma \frac{\Omega}{h} + \rho \Omega g \frac{h}{2}$

Qui sera minimale si et seulement si :

$$\frac{dE_p}{dh} = 0 \Leftrightarrow = -2 \gamma \frac{\Omega}{h^2} + \rho \Omega g \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = \rho \frac{g}{4 \gamma}$$

$$\Leftrightarrow h_e = \sqrt{\frac{4 \gamma}{g \rho}} = 2 l_c = 5 \text{ mm}$$