

Correction CB2 type HEC/ESSEC

Exercice 1. D'après ESSEC 2004

Dans tout l'exercice, N désigne un nombre entier supérieur ou égal à 1.

I. Etude d'un endomorphisme

On note $\mathbb{R}_N[X]$ l'espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à N et du polynôme nul; on désigne par Id l'application identique de $\mathbb{R}_N[X]$ dans $\mathbb{R}_N[X]$.

1. Soit a un nombre réel non nul et P un élément de $\mathbb{R}_N[X]$.

Si P est un polynôme de degré N alors $P(X) = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ avec $a_N \neq 0$.

Donc $P(aX + 1 - a) = \sum_{k=0}^N a_k (aX + 1 - a)^k$ dont le terme de plus haut degré est $a_N a X^N$ (avec $a_N a \neq 0$).

Donc $P(aX + 1 - a)$ est bien un polynôme de même degré que P .

(Si P est nul, $P(aX + 1 - a)$ le sera aussi).

Dans toute la suite de l'exercice, pour tout réel a non nul, on note f_a l'application de $\mathbb{R}_N[X]$ dans $\mathbb{R}_N[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $P(ax + 1 - a)$.

2. Soient a et b des nombres réels non nuls.

- (a) Pour tout polynôme P : $f_a(P)(x) = P(ax + 1 - a)$ donc

$$\begin{aligned} f_b \circ f_a(P)(x) &= P(a(bx + 1 - b) + 1 - a) \\ &= P(abx + a - ab + 1 - a) \\ &= P(abx + 1 - ab) \\ &= f_{ab}(P)(x) \end{aligned}$$

Conclusion : $f_b \circ f_a = f_{ab}$

- (b) On remarque que si $a = 1$ on a $f_1(P)(x) = P(1x + 1 - 1) = P(x)$ alors $f_1(P) = P$

Donc $f_a \circ f_{1/a} = f_1 = Id$ et $f_{1/a} \circ f_a = Id$.

Donc f_a admet pour réciproque $f_{1/a}$.

Conclusion : f_a est donc bijective de réciproque $(f_a)^{-1} = f_{1/a}$.

De plus d'après 1), f_a est une application qui va de $\mathbb{R}_N[X]$ dans $\mathbb{R}_N[X]$.

Il nous reste à voir que f_a est linéaire ce qui est simple à voir par propriétés sur les fonctions polynômes, on a :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_N[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}, f_a(\lambda P + Q)(X) = (\lambda P + Q)(ax + 1 - a) = \lambda P(ax + 1 - a) + Q(ax + 1 - a) = \lambda f_a(P)(x) + f_a(Q)(x).$$

Conclusion : f_a est un automorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$.

- (c) On pose : $(f_a)^0 = Id$ et, pour tout entier naturel n : $(f_a)^{n+1} = (f_a)^n \circ f_a$.

Montrons alors par récurrence que pour tout entier naturel, $(f_a)^n = f_{a^n}$.

Initialisation : $(f_a)^0 = Id = f_{a^0}$.

Donc l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : on suppose que pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$ fixé, $(f_a)^n = f_{a^n}$;

alors $(f_a)^{n+1} = (f_a)^n \circ f_a = f_{a^n} \circ f_a = f_{a^{n+1}}$.

L'hérédité est donc vérifiée.

Conclusion : Pour tout entier naturel n : $(f_a)^n = f_{a^n}$.

3. Pour tout réel a non nul, on note M_a la matrice de f_a dans la base canonique $(1, X, \dots, X^N)$ de $\mathbb{R}_N[X]$.

(a) Explicitons M_a dans le cas $N = 3$.

On calcule les images des vecteurs de la base puis leurs coordonnées dans la base canonique :

$$f_a(1)(x) = 1(\cdots) = 1 \text{ coordonnées : } (1, 0, 0, 0)$$

$$f_a(X)(x) = X(ax + 1 - a) = ax + 1 - a \text{ coordonnées } (1 - a, a, 0, 0)$$

$$f_a(X^2)(x) = (ax + 1 - a)^2 = a^2 x^2 + 2(1 - a)ax + (1 - a)^2 \text{ coordonnées } ((1 - a)^2, 2a(1 - a), a^2, 0)$$

$$\text{et } f_a(X^3)(x) = (ax + 1 - a)^3 = a^3 x^3 + 3(1 - a)a^2 x^2 + 3(1 - a)^2 ax + (1 - a)^3 \text{ coordonnées } ((1 - a)^3, 3a(1 - a)^2, 3a^2(1 - a), a^3)$$

Donc la matrice de f_a dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-a & (1-a)^2 & (1-a)^3 \\ 0 & a & 2a(1-a) & 3a(1-a)^2 \\ 0 & 0 & a^2 & 3a^2(1-a) \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}. \text{ Dans le cas}$$

général, les coefficients de la $j+1^{\text{ème}}$ colonne sont les coordonnées de $f_a(X^j)$ avec

$$\begin{aligned} f_a(X^j)(x) &= (ax + (1 - a))^j \\ &= \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (1 - a)^{j-k} a^k x^k \text{ d'après la formule du binôme} \end{aligned}$$

Conclusion : On trouve donc en $j+1^{\text{ème}}$ colonne et $i+1^{\text{ème}}$ ligne :
 0 si $i > j$ et $\binom{j}{i} (1 - a)^{j-i} a^i$ si $i \leq j$

(b) n désignant un entier naturel,

$(M_a)^n$ est la matrice associée à $(f_a)^n = f_{a^n}$ dont la matrice est M_{a^n} .

Conclusion : $(M_a)^n = M_{a^n}$.

Pour $-n$ négatif, f_{a^n} a pour réciproque $f_{1/a^n} = f_{a^{-n}}$ donc la matrice associée à la réciproque est d'une part, l'inverse de la matrice associée à f_{a^n} , et d'autre part la matrice associée à $f_{a^{-n}}$.

Conclusion : $[(M_a)^n]^{-1} = (M_{a^{-n}})$ et la formule reste vraie pour n négatif.

4. Précisons l'ensemble des valeurs propres de f_a

Comme la matrice de f_a est triangulaire, ses valeurs propres sont sur sa diagonale, à savoir :

$$\{1, a, a^2, a^3, \dots, a^N\}, \text{ (qui ne sont distinctes que si } a \neq 1 \text{ et } a \neq -1 \text{ et } a \neq 0).$$

Pour tout entier k compris au sens large entre 0 et N ,

$$\begin{aligned} f_a((X-1)^k)(x) &= (ax + 1 - a - 1)^k \\ &= a^k (x-1)^k \\ f_a((X-1)^k) &= a^k (X-1)^k \end{aligned}$$

Les $(X-1)^k$ sont donc des vecteurs propres de f_a .

Comme la famille $(1, X-1, \dots, (X-1)^N)$ est échelonnée donc libre et a pour cardinal $N+1$ vecteurs ($= \dim(\mathbb{R}_N[X])$), on a alors une base de vecteurs propres.

Conclusion : f_a est donc diagonalisable.

II. Etude d'une expérience aléatoire

On dispose de N pièces de monnaie, chacune ayant la probabilité p d'amener pile ($0 < p < 1$) et $1 - p$ d'amener face. On pourra poser : $q = 1 - p$.

On s'intéresse à l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer des lancers successifs selon le protocole suivant :

- à l'étape 1, on lance les N pièces;
- à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené pile à l'étape 1 (s'il en existe);
- à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené pile à l'étape 2 (s'il en existe),

et ainsi de suite.

À chaque étape, les lancers des pièces sont supposés indépendants.

On considère les variables aléatoires suivantes :

- X_0 est la variable aléatoire certaine égale à N ,
- pour tout entier naturel n non nul, X_n est le nombre de côtés pile apparaissant à l'étape n , avec la convention que, si à une certaine étape n_0 aucun côté pile n'apparaît, on considère que pour tous les entiers n supérieurs ou égaux à n_0 l'événement ($X_n = 0$) est réalisé.

Etude des variables aléatoires X_n

Soit n un entier naturel, soient i et j des entiers compris au sens large entre 0 et N .

1. Sachant que l'événement ($X_n = j$), la $n^{\text{ième}}$ expérience consiste à lancer j pièces, on a un compteur de succès (avoir pile) dans une répétition d'épreuves identiques et indépendantes de Bernoulli, ayant toutes la même probabilité p de donner pile.

Conclusion : $X_{n+1}/X_n = j \hookrightarrow \mathcal{B}(j, p)$.

D'après la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $(X_n = k)_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ on a alors

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = i) &= \sum_{j=0}^N P_{X_n=j}(X_{n+1} = i) \cdot P(X_n = j) \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} 0 + \sum_{j=i}^N \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i} P(X_n = j) \end{aligned}$$

découpage nécessaire car les valeurs possibles pour $\mathcal{B}(j, \frac{1}{2})$ sont les $i \leq j$ (c.a.d. $j \geq i$)

Conclusion : $P(X_{n+1} = i) = \sum_{j=i}^N \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i} P(X_n = j)$

2. On a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0) \\ P(X_{n+1} = 1) \\ \vdots \\ P(X_{n+1} = N) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^N \binom{j}{0} p^0 (1-p)^{j-0} P(X_n = j) \\ \sum_{j=1}^N \binom{j}{1} p^1 (1-p)^{j-1} P(X_n = j) \\ \vdots \\ \sum_{j=N}^N \binom{j}{N} p^N (1-p)^{j-N} P(X_n = j) \end{pmatrix} \\ &= M_p \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion : $U_{n+1} = M_p U_n$

On montre ensuite par récurrence (facile à faire) que $U_n = (M_p)^n U_0 = M_{p^n} U_0$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = M_{p^n} U_0$

Et comme $P(X_0 = N) = 1$ et $P(X_0 = i) = 0$ pour les autres valeurs, le produit a pour résultat la dernière colonne de la matrice M_{p^n} .

Donc $P(X_n = k) = \binom{N}{k} (p^n)^k (1-p^n)^{N-k}$ et donc $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(N, p^n)$.

On avait trouvé que X_0 était la variable certaine égale à N et pour $n = 0$: $p^0 = 1$ ce qui est cohérent.

Pour X_1 sachant que $X_0 = N$, on avait une loi binomiale de paramètres N et p , tout comme ici.

Au cours des n premières étapes, on lance $X_0 + X_1 + \dots + X_{n-1}$ pièces (à l'étape n on lance autant de pièces que de pile à l'étape $n-1$.)

3.

```
n=input('entrer n')
p=input('entrer p')
U=[0;0;1]
M=[1 1-p*(1-p) ^{2} (1-p) ^{3} ; 0 p 2p*(1-p) 3*p*(1-p) ^{2} ;
0 0 p^{2} 3*p^{2}*(1-a) ; 0 0 0 p^{3}]
for i=1:n
```

```

U=M*U
end
disp(U)

```

PROBLEME. d'après HEC 2010

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X , et $Cov(X, Y)$ la covariance de deux variables aléatoires X et Y .

Dans les parties I et III, la fonction de répartition et une densité d'une variable aléatoire X à densité sont notées respectivement F_X et f_X .

On admet que les formules donnant l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires discrètes, ainsi que la définition et les propriétés de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires discrètes, s'appliquent au cas de variables aléatoires à densité.

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes si pour tout n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de réels, les événements $[X_1 \leq x_1], [X_2 \leq x_2], \dots, [X_n \leq x_n]$ sont indépendants.

L'objet du problème est double. D'une part, montrer certaines analogies entre les lois géométriques et exponentielles, d'autre part mettre en évidence quelques propriétés asymptotiques de variables aléatoires issues de la loi exponentielle.

La partie II est indépendante de la partie I. La partie III est indépendante de la partie II et largement indépendante de la partie I.

Partie I. Loi exponentielle

1. (a) La densité d'une loi $\varepsilon(1)$ est $f(x) = e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$ et 0 sur $\mathbb{R}^-$ donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

Ensuite plusieurs méthodes :

- soit par critère de négligeabilité des intégrales positives en utilisant le fait que $t^n e^{-t} = o(t^{-2})$ et donc par Riemann on peut conclure...

- ou par un autre critère de négligeabilité des intégrales positives :

$t^n e^{-t} = t^n e^{-t/2} e^{-t/2}$ avec $t^n e^{-t/2} = t^n / e^{t/2} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ ($t^n = o(e^{t/2})$) donc $t^n e^{-t} = o(e^{-t/2})$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-t/2} dt$ converge, donc par critère de négligeabilité des intégrales positives,

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \text{ converge également.}$$

On pose alors $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

- (b) Soit $M \geq 0$ alors on va calculer $\int_0^M t^n e^{-t} dt$ par une IPP.

Soient $u(t) = t^n : u'(t) = nt^{n-1}$ et $v'(t) = e^{-t} : v(t) = -e^{-t}$ avec u et v C^1 sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_0^M t^n e^{-t} dt &= [-t^n e^{-t}]_0^M - \int_0^M -nt^{n-1} e^{-t} dt \\ &= -M^n e^{-M} + n \int_0^M t^{n-1} e^{-t} dt \\ &\rightarrow nI_{n-1} \text{ quand } M \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^* : I_n = nI_{n-1}$

Et comme de plus $I_0 = 1$, on reconnaît alors la suite factorielle (on peut le prouver par récurrence)

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N} : I_n = n!$

Soit λ un réel strictement positif. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ (d'espérance $1/\lambda$).

on pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

2. Si $X_1 \geq X_2$ alors $Y = X_1 - X_2$, $T = X_1$ et $Z = X_2$ donc $|X_1 - X_2| = X_1 - X_2$

et donc $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

Et de même si $X_1 \leq X_2$ on a $|X_1 - X_2| = X_2 - X_1$.

3. (a) Comme $X_1 \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ on a $V(X_1) = 1/\lambda^2$ et $P([X_1 \leq x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

(b) On a donc par linéarité : $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \boxed{2/\lambda}$

et $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = \boxed{2/\lambda^2}$ par indépendance.

et de même, $E(Y) = E(X_1 - X_2) = \boxed{0}$ et $V(Y) = V(X_1) + (-1)^2 V(X_2) = \boxed{2/\lambda^2}$.

4. F_Z est la fonction de répartition de Z .

Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a : $(Z > z) = (\min(X_1, X_2) > z) = (X_1 > z \cap X_2 > z)$ événements indépendants donc

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = 1 - P(\min(X_1, X_2) > z) \\ &= 1 - P(X_1 > z) P(X_2 > z) \text{ par indépendance} \\ &= 1 - (1 - P(X_1 \leq z))(1 - P(X_2 \leq z)) \\ &= \begin{cases} 1 - (e^{-\lambda z})^2 & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

et comme $1 - (e^{-\lambda z})^2 = 1 - e^{-2\lambda z}$, on reconnaît la fonction de répartition de $\varepsilon(2\lambda)$.

Donc Z est à densité et on a en dérivant partout où cela est possible :

$$f_Z(x) = \begin{cases} 2\lambda e^{-2\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Conclusion : $Z \hookrightarrow \varepsilon(2\lambda)$, $E(Z) = \frac{1}{2\lambda}$ et $V(Z) = \frac{1}{4\lambda^2}$.

5. `lambda=input('entrer lambda')`

`Z=grand(1,1,'exp',1/2* lambda)`

6. (a) $(T \leq t) = (\max(X_1, X_2) \leq t) = (X_1 \leq t \cap X_2 \leq t)$ indépendants donc

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(X_1 \leq t) P(X_2 \leq t) \text{ par indépendance} \\ &= \begin{cases} (1 - e^{-\lambda t})^2 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction F_T est continue sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle) et sur $[0, +\infty[$

En 0^- : $F_T(t) = 0 \rightarrow 0 = F_T(0)$ donc F_T est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc T est à densité et une densité

de T est $f_T(t) = \begin{cases} 2\lambda e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t}) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

- (b) On a

$$\begin{aligned} \int_0^M t f_T(t) dt &= \int_0^M t 2\lambda e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t}) dt \\ &= \left(2 \int_0^M t \lambda e^{-\lambda t} dt - \int_0^M t 2\lambda e^{-2\lambda t} dt \right) \\ &\rightarrow \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda} \text{ quand } M \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = 1/\lambda \text{ (espérance de } \varepsilon(\lambda))$$

Conclusion : T a une espérance et $E(T) = \frac{3}{2\lambda}$

Et pour l'espérance de T^2 :

Si $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ alors $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ donc $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2}$

$$\begin{aligned} \int_0^M t^2 f_T(t) dt &= \int_0^M t^2 2\lambda e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t}) dt \\ &= \left(2 \int_0^M t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt - \int_0^M t^2 2\lambda e^{-2\lambda t} dt \right) \\ &\rightarrow \frac{4}{\lambda^2} - \frac{2}{4\lambda^2} = \frac{7}{2\lambda^2} \text{ quand } M \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Donc T^2 a une espérance et $E(T^2) = \frac{7}{2\lambda^2}$ donc T a une variance et

$$\text{Conclusion : } V(T) = \frac{7}{2\lambda^2} - \frac{9}{4\lambda^2} = \frac{5}{4\lambda^2}$$

N.B. cela permet de valider la loi de T

Ou bien, en suivant le conseil donné, avec le changement de variable $x = \lambda t$ ou plus simplement $t = x/\lambda$
 $dt = dx/\lambda$ et $t = 0$ pour $x = 0$ et $t = M$ pour $x = \lambda M$

$$\begin{aligned} \int_0^M t \lambda e^{-\lambda t} dt &= \int_0^{\lambda M} \frac{x}{\lambda} e^{-x} dx \\ &\rightarrow \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \frac{1}{\lambda} I_1 = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

7. On a $X_1 + X_2 = Z + T$ et comme $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$ par indépendance, et que $V(Z + T) = V(Z) + V(T) + 2 \text{cov}(Z, T)$ (admis) alors

$$\begin{aligned} \text{cov}(Z, T) &= \frac{1}{2} [V(Z + T) - V(Z) - V(T)] \\ &= \frac{1}{2} [V(X_1) + V(X_2) - V(Z) - V(T)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{5}{4\lambda^2} \right] \\ &= \frac{1}{4\lambda^2} \end{aligned}$$

et donc, le coefficient de corrélation linéaire est :

$$\begin{aligned} r &= \frac{\text{cov}(Z, T)}{\sqrt{V(Z)V(T)}} \\ &= \frac{\frac{1}{4\lambda^2}}{\sqrt{\frac{1}{4\lambda^2} \frac{5}{4\lambda^2}}} \\ &= \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}} \end{aligned}$$

8. $r = \text{corr}(Z, T, 1) / (\text{stdev}(Z) * \text{stdev}(T))$

9. (a) Comme $Y = X_1 - X_2$ alors $Y(\Omega) = \mathbb{R}$ et $|Y|(\Omega) = \mathbb{R}^+$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{-X_2}(x) = P(-X_2 \leq x) = P(X_2 \geq -x) = \begin{cases} e^{\lambda x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $]-\infty, 0]$ et $]0, +\infty[$ et en $0^+ : F_{-X_2}(x) = 1 \rightarrow 1 = F(0)$ et elle est C^1 sur $\mathbb{R}^*$

Donc $-X_2$ est bien à densité et une densité est $f_{-X_2}(x) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda x} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- (c) Si $y \geq 0$ on a $f_{-X_2}(y - t) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda(y-t)} & \text{si } t \geq y \\ 0 & \text{si } t < y \end{cases}$ donc, pour $t \geq y$:

$$\begin{aligned} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y - t) &= \lambda e^{\lambda(y-t)} \lambda e^{-\lambda t} \\ &= \lambda^2 e^{\lambda y} e^{-2\lambda t} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_y^M f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y - t) dt &= \lambda^2 e^{\lambda y} \int_y^M e^{-2\lambda t} dt \\ &= \lambda^2 e^{\lambda y} \frac{1}{-2\lambda} [e^{-2\lambda M} - e^{-2\lambda y}] \\ &\rightarrow \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda y} \text{ quand } \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Donc, pour $y \geq 0$: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt$ converge et vaut $\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda y} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$

Pour $y < 0$: $f_{-X_2}(y-t) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda(y-t)} & \text{si } t \geq y \\ 0 & \text{si } t < y \end{cases}$

donc $f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) = \begin{cases} \lambda^2 e^{\lambda y} e^{-2\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt &= \lambda^2 e^{\lambda y} \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda t} dt \\ &= \lambda^2 e^{\lambda y} \frac{1}{2\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{2} e^{\lambda y} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} \end{aligned}$$

et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt$ converge et vaut $\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$.

Conclusion : pour tout réel y , l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt$ est convergente et vaut $\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$.

- (d) Soit $f(y) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$ pour tout y réel.
 f est positive et continue sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} dy &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(par densité de $\varepsilon(1)$) et comme f est paire, par changement de variable $u = -y$, on montre que $\int_{-\infty}^0 f(y) dy = \frac{1}{2}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) dy = 1$

Conclusion : $y \mapsto \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$ est une densité de probabilité : celle de Y

- (e) On détermine la fonction de répartition $F_{|Y|}$:
 Pour tout $y < 0$: $P(|Y| \leq y) = 0$ (événement impossible)
 et pour $y \geq 0$: $P(|Y| \leq y) = P(-y \leq Y \leq y) = F_Y(y) - F_Y(-y)$ car $-y \leq y$.
 Comme Y est à densité, F_Y est continue et C^1 sur $\mathbb{R}$ (car f_Y est continue sur $\mathbb{R}$), alors $F_{|Y|}$ est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$.
 De plus $F_{|Y|}(0) = F_Y(0) - F_Y(0) = 0$ et pour $y < 0$: $F_{|Y|}(y) = 0 \rightarrow 0 = F_{|Y|}(0)$ donc $F_{|Y|}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
 Donc $|Y|$ est bien à densité et une densité est

$$f_{|Y|}(y) = F'_{|Y|}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ f_Y(y) + f_Y(-y) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} + \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|-y|} = \lambda e^{-\lambda y} & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

 Donc $|Y| \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$.

- (f)

```
lambda=input('entrer lambda')
|Y|=grand(1,1,'exp',1/ lambda)
```

Partie II. Loi géométrique

Soit p un réel de $]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $1/p$).

on pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$. On rappelle que $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

- (a) On a $V(X_1) = \frac{q}{p^2}$ et de $[X_1 > k] = \ll \text{échec jusqu'au } k^{\text{ième}} \gg$ donc $P[X_1 > k] = q^k$ et $P([X_1 \leq k]) = 1 - q^k$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.

(b) $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{2}{p}$, $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = \frac{2q}{p^2}$ par indépendance,

$E(X_1 - X_2) = 0$, $V(X_1 - X_2) = V(X_1) + (-1)^2 V(X_2) = \frac{2q}{p^2}$

(c) $(X_1 = X_2) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (X_1 = i \cap X_2 = i)$ et par incompatibilité

$$P(X_1 = X_2) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i \cap X_2 = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} (q^{i-1} p)^2 \text{ par indépendance.}$$

$$\begin{aligned} P[X_1 = X_2] &= \sum_{i=1}^{+\infty} (q^{i-1} p)^2 \\ &= p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} (q^2)^{i-1} \\ &= \frac{p^2}{1 - q^2} = \frac{p^2}{(1 - q)(1 + q)}. \end{aligned}$$

Donc $P(X_1 = X_2) = \frac{p}{1 + q}$

2. (a) Pour $i \in \mathbb{N} : [\min(X_1, X_2) > i] = [X_1 > i \cap X_2 > i]$ et

$$\begin{aligned} P(Z > i) &= P(X_1 > i) P(X_2 > i) \text{ par indépendance} \\ &= q^{2i} \text{ (même pour } i = 0 \text{)} \end{aligned}$$

Et comme $[Z > i - 1] = [Z \geq i] = [Z = i] \cap [Z > i]$, par incompatibilité :

$$\begin{aligned} P(Z = i) &= P(Z > i - 1) - P(Z > i) \\ &= q^{2(i-1)} - q^{2i} \text{ pour } i - 1 \geq 0 \\ &= q^{2(i-1)} (1 - q^2) \text{ pour } i \geq 1 \end{aligned}$$

Et comme $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ on a bien

$$\begin{aligned} Z &\hookrightarrow \mathcal{G}(1 - q^2) \text{ d'où } E(Z) = \frac{1}{1 - q^2} = \frac{1}{p(1 + q)} \text{ et } V(Z) = \frac{q^2}{(1 - q^2)^2} \\ \text{d'où } E(T) &= E(X_1 + X_2 - Z) = \frac{2}{p} - \frac{1}{p(1 + q)} = \frac{1 + 2q}{p(1 + q)}. \end{aligned}$$

(b) `p=input('entrer p')`

`q=1-p`

`Z=grand(1,1,'geom',1-q^2)`

(c) $[Z = k] \cup [T = k]$ signifie que le plus petit ou le plus grand de X_1 et de X_2 est égal à k .

Comme l'un est le plus petit et l'autre le plus grand, cela signifie que l'un ou l'autre est égal à k .

$$[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k].$$

et comme

$$\begin{aligned} P(Z = k \cup T = k) &= P(Z = k) + P(T = k) - P(T = k \cap Z = k) \\ &= P(Z = k) + P(T = k) - P(X_1 = k \cap X_2 = k) \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} P(X_1 = k \cup X_2 = k) &= P(X_1 = k) + P(X_2 = k) - P(X_1 = k \cap X_2 = k) \\ &= 2P(X_1 = k) - P(X_1 = k \cap X_2 = k) \end{aligned}$$

car X_1 et X_2 ont la même loi,

$$P(T = k) = 2P(X_1 = k) - P(Z = k)$$

(d) On a alors, $E(T^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 (2P(X_1 = k) - P(Z = k))$ si la série converge.

Or $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(X_1 = k)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(Z = k)$ convergent car X_1 et Z ont une variance, alors

$$\begin{aligned}
E(T^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 2P(X_1 = k) - \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(Z = k) \\
&= 2E(X_1^2) - E(Z^2) \\
&= 2[V(X_1) + E(X_1)^2] - [V(Z) + E(Z)^2] \\
&= 2\left[\frac{q}{p^2} + \frac{1}{p^2}\right] - \left[\frac{q^2}{(1-q^2)^2} + \frac{1}{(1-q^2)^2}\right] \\
&= 2\frac{q+1}{p^2} - \frac{q^2+1}{p^2(1+q)^2} \\
&= \frac{2(1+q)^2(q+1) - q^2 - 1}{p^2(1+q)^2} \\
&= \frac{2q^3 + 5q^2 + 6q + 1}{p^2(1+q)^2}
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
V(T) &= E(T^2) - E(T)^2 \\
&= \frac{2q^3 + 5q^2 + 6q + 1}{p^2(1+q)^2} - \left(\frac{1+2q}{p(1+q)}\right)^2 \\
&= \frac{2q^3 + 5q^2 + 6q + 1 - 1 - 4q - 4q^2}{p^2(1+q)^2} \\
&= \frac{2q^3 + q^2 + 2q}{p^2(1+q)^2} \\
&= \frac{q(2q^2 + q + 2)}{(1-q^2)^2}
\end{aligned}$$

3. (a) $\max(X_1, X_2) \geq \min(X_1, X_2)$ donc $T - Z \geq 0$ et toutes les valeurs entières sont possibles.

Conclusion : $(T - Z)(\Omega) = \mathbb{N}$.

On a $[Z = j] \cap [Z = T] = [X_1 = j] \cap [X_2 = j]$ et pour tout j de $\mathbb{N}^*$

Conclusion : $P(Z = j \cap Z = T) = P(X_1 = j)P(X_2 = j) = q^{2j-2}p^2$ (par indépendance)

- (b) Si (j, ℓ) de $(\mathbb{N}^*)^2$ alors $\ell > 0$ et $[Z = j] \cap [T - Z = \ell] = [Z = j] \cap [T = \ell + j]$ avec $\ell + j \neq j$ donc

$$[Z = j] \cap [T = \ell + j] = (X_1 = j \cap X_2 = \ell + j) \cup (X_2 = j \cap X_1 = \ell + j)$$

et par $\cup$ d'incompatible et $\cap$ d'indépendants,

$$\begin{aligned}
P(Z = j \cap T - Z = \ell) &= P(X_1 = j)P(X_2 = \ell + j) + P(X_2 = j)P(X_1 = \ell + j) \\
&= 2q^{j-1}pq^{\ell+j-1} = 2p^2q^{2j+\ell-2}
\end{aligned}$$

- (c) Si $k = 0$ alors

$$\begin{aligned}
(X_1 - X_2 = 0) &= \bigcup_{i=1}^{+\infty} (X_1 = i \cap X_2 = i) \text{ donc} \\
P(X_1 - X_2 = 0) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i)P(X_2 = i) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2(i-1)}p^2 \text{ avec } j = i - 1 \\
&= p^2 \sum_{j=0}^{+\infty} q^{2j} \text{ et } |q| < 1 \\
&= p^2 \frac{1}{1 - q^2} = \frac{pq^{|0|}}{1 + q}
\end{aligned}$$

Si $k > 0$ alors

$$\begin{aligned}
 (X_1 - X_2 = k) &= (X_1 = X_2 + k) \\
 &= \bigcup_{i=1}^{+\infty} (X_1 = i + k \cap X_2 = i) \text{ donc} \\
 P(X_1 - X_2 = k) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i + k) P(X_2 = i) \text{ avec } i + k \geq 1 \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i+k-1} p q^{i-1} p \\
 &= q^k p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2(i-1)} \text{ avec } j = i - 1 \\
 &= q^k p^2 \frac{1}{1 - q^2} = \frac{q^k p}{1 + q} = \frac{p q^{|k|}}{1 + q}
 \end{aligned}$$

et si $k < 0$:

$$\begin{aligned}
 (X_1 - X_2 = k) &= (X_2 = X_1 - k) \\
 &= \bigcup_{i=1}^{+\infty} (X_1 = i - k \cap X_2 = i) \text{ donc} \\
 P(X_1 - X_2 = k) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i - k) P(X_2 = i) \text{ avec } i - k \geq 1 \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i-k-1} p q^{i-1} p \\
 &= \frac{q^{-k} p}{1 + q} = \frac{p q^{|k|}}{1 + q}
 \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{Z} : P(|X_1 - X_2| = k) = \frac{p q^{|k|}}{1 + q}$

(d) On a $|X_1 - X_2|(\Omega) = \mathbb{N}$

$$(|X_1 - X_2| = 0) = (X_1 - X_2 = 0) \text{ donc } P(|X_1 - X_2| = 0) = \frac{p}{1 + q}$$

et pour $k > 0 : (|X_1 - X_2| = k) = (X_1 - X_2 = k) \cup (X_1 - X_2 = -k)$ incompatibles et

Conclusion :
$$\begin{aligned}
 P(|X_1 - X_2| = k) &= 2 \frac{p q^k}{1 + q} \text{ si } k > 0 \\
 P(|X_1 - X_2| = 0) &= \frac{p}{1 + q}
 \end{aligned}$$

(e) On a vu que $T - Z = |X_1 - X_2|$

Pour tout $(j, \ell) \in [\mathbb{N}^*]^2$:

$$\begin{aligned}
 P(Z = j \cap T - Z = \ell) &= 2 p^2 q^{2j+\ell-2} \text{ et d'autre part} \\
 P(Z = j) P(T - Z = \ell) &= P(Z = j) P(|X_1 - X_2| = \ell) \\
 &= q^{2(j-1)} (1 - q^2) 2 \frac{p q^\ell}{1 + q} \\
 &= 2 q^{2j} q^{-2} (1 + q) (1 - q) \frac{p q^\ell}{1 + q} \\
 &= P(Z = j \cap T - Z = \ell)
 \end{aligned}$$

et pour $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
 P(Z = j \cap T - Z = 0) &= q^{2j-2} p^2 \text{ et d'autre part} \\
 P(Z = j) P(T - Z = 0) &= P(Z = j) P(|X_1 - X_2| = 0) \\
 &= q^{2(j-1)} (1 - q^2) \frac{p}{1 + q} \\
 &= P(Z = j \cap T - Z = 0)
 \end{aligned}$$

Conclusion : Z et $T - Z$ sont indépendantes.

4. (a) Comme Z et $T - Z$ sont indépendantes, leur covariance est nulle.

Et comme $\text{cov}(Z, T - Z) = \text{cov}(Z, T) - \text{cov}(Z, Z) = \text{cov}(Z, T) - V(Z)$ alors

Conclusion : $\text{cov}(Z, T) = V(Z) \neq 0$
et T et Z ne sont pas indépendantes.

On pouvait le dire plus rapidement en remarquant que $T \geq Z$ donc, par exemple $(T = 1 \cap Z = 2) = \emptyset$ alors que $P(T = 1)P(Z = 2) \neq 0$

- (b) $a = -\text{variance}(Z) //$ ou $a = \text{corr}(Z, T, 1)$

- (c) On a

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\text{cov}(Z, T)}{\sqrt{V(T)V(Z)}} = -\sqrt{\frac{V(Z)}{V(T)}} \\ &= -\sqrt{\frac{\frac{q^2}{(1-q^2)^2}}{\frac{q(2q^2+q+2)}{(1-q^2)^2}}} = -\sqrt{\frac{q}{2q^2+q+2}} \end{aligned}$$

- (d) Pour $(i, j) \in \mathbb{N}^*$

— Si $i > j$ alors $(Z = i \cap T = j) = \emptyset$ donc $P(Z = i \cap T = j) = 0$

— Si $i = j$ alors $(Z = i \cap T = i) = (X_1 = i \cap X_2 = i)$ et $P(Z = i \cap T = i) = q^{2i-2}p^2$

— Si $i < j$ alors $(Z = i \cap T = j) = (X_1 = i \cap X_2 = j) \cup (X_1 = j \cap X_2 = i)$ (incompatibilité, puis indépendance)
 $P(Z = i \cap T = j) = 2q^{i+j-2}p^2$

- (e) $P_{Z=j}(T = k) = 0$ si $j > k$ car $Z > T$ est impossible.
Si $j = k$ alors

$$\begin{aligned} P_{Z=j}(T = j) &= \frac{P(Z = j \cap T = j)}{P(Z = j)} \\ &= \frac{q^{2(j-1)}p^2}{q^{2(j-1)}(1-q^2)} \\ &= \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{1+q} \end{aligned}$$

Si $j < k$

$$\begin{aligned} P_{Z=j}(T = k) &= \frac{P(Z = j \cap T = k)}{P(Z = j)} \\ &= \frac{2q^{2(j+k-2)}p^2}{q^{2(j-1)}(1-q^2)} \\ &= \frac{2q^{2k-2}p}{1+q} \end{aligned}$$

- (f) On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.

$$\text{On a donc } P(D_j = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < j \\ \frac{p}{1+q} & \text{si } k = j \\ \frac{2q^{2k-2}p}{1+q} & \text{si } k > j \end{cases}$$

et donc (sous réserve de convergence)

$$\begin{aligned}
 E(D_j) &= \sum_{k=j}^{+\infty} kP(D_j = k) \\
 &= j \frac{p}{1+q} + \sum_{k=j}^{+\infty} k \frac{2q^{2k-2}p}{1+q} \\
 &= j \frac{p}{1+q} + \frac{2pq^{2j-2}}{1+q} \sum_{k=j}^{+\infty} kq^{2(k-j)} \\
 &= j \frac{p}{1+q} + \frac{2pq^{2j-2}}{1+q} \sum_{h=0}^{+\infty} (h+j) q^{2h} \\
 &= j \frac{p}{1+q} + \frac{2pq^{2j-2}}{1+q} \left[\frac{q^2}{(1-q^2)^2} + \frac{j}{1-q^2} \right] \\
 &= j \frac{p}{1+q} + \frac{2pq^{2j-2}}{1+q} \frac{q^2 + j(1-q^2)}{(1-q^2)^2}
 \end{aligned}$$

Qui converge bien, donc D_j a une espérance et

Conclusion :
$$E(D_j) = j \frac{p}{1+q} + \frac{2pq^{2j-2}}{1+q} \frac{q^2 + j(1-q^2)}{(1-q^2)^2}.$$

Partie III. Convergences

Dans les questions 1 à 4, λ désigne un paramètre réel strictement positif, inconnu.

pour n élément de $\mathbb{N}^*$, on considère un n échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ .

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $J_n = \lambda S_n$.

1. On a $E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = n/\lambda$, et $V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k) = n/\lambda^2$ par indépendance.

$$E(J_n) = \lambda E(S_n) = n \text{ et } V(J_n) = \lambda^2 V(S_n) = n.$$

2. On admet qu'une densité f_{J_n} de J_n est donnée par $f_{J_n}(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$

(a) Soit $n \geq 3$. Sous réserve d'absolue convergence (ssi convergence simple car tout est positif), par théorème de transfert avec $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{1}{J_n}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \frac{e^{-x} x^{n-1}}{(n-1)!} dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} x^{n-2}}{(n-1)!} dx \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} I_{n-2} \text{ converge car } n-2 \in \mathbb{N} \\
 &= \frac{(n-2)!}{(n-1)!} \\
 &= \frac{1}{n-1}
 \end{aligned}$$

Et de même par théorème de transfert, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{J_n^2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \frac{e^{-x} x^{n-1}}{(n-1)!} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} x^{n-3}}{(n-1)!} dx \\ &= \frac{1}{(n-1)!} I_{n-3} \text{ converge car } n-3 \in \mathbb{N} \\ &= \frac{(n-3)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

Conclusion : $E\left(\frac{1}{J_n}\right)$ et $E\left(\frac{1}{J_n^2}\right)$ existent et

$$E\left(\frac{1}{J_n}\right) = \frac{1}{n-1} \text{ et } E\left(\frac{1}{J_n^2}\right) = \frac{1}{(n-1)(n-2)}$$

(b) $\widehat{\lambda}_n$ est une fonction du n échantillon. Donc c'est un estimateur de λ .

$$\widehat{\lambda}_n = \lambda \frac{n}{\lambda S_n} = \lambda n \frac{1}{J_n} \text{ donc } E(\widehat{\lambda}_n) = \lambda n E\left(\frac{1}{J_n}\right) = \lambda n \frac{1}{n-1} \neq \lambda$$

Donc le biais est $b = E(\widehat{\lambda}_n) - \lambda = \frac{\lambda}{n-1}$

Conclusion : $\widehat{\lambda}_n$ est biaisé.

$$V(\widehat{\lambda}_n) = V\left(\lambda n \frac{1}{J_n}\right) = \lambda^2 n^2 V\left(\frac{1}{J_n}\right).$$

avec

$$\begin{aligned} V\left(\frac{1}{J_n}\right) &= E\left(\frac{1}{J_n^2}\right) - E\left(\frac{1}{J_n}\right)^2 = \frac{1}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{(n-1)^2} \\ &= \frac{1}{(n-1)^2(n-2)} \\ V(\widehat{\lambda}_n) &= \frac{\lambda^2 n^2}{(n-1)^2(n-2)} \end{aligned}$$

Donc le risque quadratique est

$$\begin{aligned} r &= V(\widehat{\lambda}_n) + b^2 \\ &= \frac{\lambda^2 n^2}{(n-1)^2(n-2)} + \left(\frac{\lambda}{n-1}\right)^2 \\ &= \frac{\lambda^2(n^2 + n - 2)}{(n-1)^2(n-2)} = \frac{\lambda^2(n-1)(n+2)}{(n-1)^2(n-2)} \\ &= \frac{\lambda^2(n+2)}{(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

Conclusion : le risque quadratique $\widehat{\lambda}_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$

3. Dans cette question, on veut déterminer un intervalle de confiance du paramètre λ au risque α . On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et u_α le réel strictement positif tel que $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

(a) Etant donné une suite de variables aléatoires (X_n) indépendantes, de même loi et de variance non nulle, alors la somme centrée réduite des n premiers converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$.

C'est à dire que la fonction de répartition de la somme centrée réduite tends vers Φ .

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \text{ a pour espérance } n/\lambda \text{ et pour variance } n/\lambda^2.$$

Les $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont indépendantes et ont une variance non nulle.

Donc la centrée réduite $\frac{S_n - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}} = N_n$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

- (b) Donc, pour n assez grand, $P(-u_\alpha \leq N_n \leq u_\alpha) \simeq \Phi(u_\alpha) - \Phi(-u_\alpha)$ car $-u_\alpha \leq u_\alpha$ et comme $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ et que $\Phi(-u_\alpha) = 1 - \Phi(u_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$ et que

Conclusion : $P(-u_\alpha \leq N_n \leq u_\alpha) \simeq 1 - \alpha$

- (c) On résout : $\lambda \in \left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \widehat{\lambda}_n, \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \widehat{\lambda}_n \right]$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \frac{n}{S_n} \leq \lambda \leq \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \frac{n}{S_n}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \frac{n}{\lambda} \leq S_n \leq \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \frac{n}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}} \frac{n}{\lambda} \leq S_n - \frac{n}{\lambda} \leq \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}} \frac{n}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow -u_\alpha \leq N_n \leq u_\alpha$$

Donc $P\left(\lambda \in \left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \widehat{\lambda}_n, \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \widehat{\lambda}_n \right]\right) = P(-u_\alpha \leq N_n \leq u_\alpha) \simeq 1 - \alpha$

Conclusion : $\left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \widehat{\lambda}_n, \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \widehat{\lambda}_n \right]$ est un intervalle de confiance de λ au niveau de risque α quand n est grand.

On note λ_0 la réalisation de $\widehat{\lambda}_n$ sur le n -échantillon.

4. Avec le n -échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, on construit un nouvel intervalle de confiance de λ au risque β ($\beta \neq \alpha$), tel que la longueur de cet intervalle soit k ($k > 1$) fois plus petite que celle obtenue avec le risque α .

- (a) Comme la densité φ est continue sur $\mathbb{R}$, Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Et comme $\Phi' = \varphi > 0$ alors Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $\left] \lim_{-\infty} \Phi; \lim_{+\infty} \Phi \right[=]0, 1[$

Conclusion : Φ a une réciproque Φ^{-1} qui est définie sur $]0, 1[$

- (b) L'intervalle de confiance précédent est $\left[\widehat{\lambda}_n - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}} \widehat{\lambda}_n, \widehat{\lambda}_n + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}} \widehat{\lambda}_n \right]$ centré sur $\widehat{\lambda}_n$ et de rayon $\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}} \widehat{\lambda}_n$.

Celui de longueur k fois plus petite est $\left[\widehat{\lambda}_n - \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}} \widehat{\lambda}_n, \widehat{\lambda}_n + \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}} \widehat{\lambda}_n \right]$

et comme précédemment,

$$\lambda \in \left[\widehat{\lambda}_n - \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}} \widehat{\lambda}_n, \widehat{\lambda}_n + \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}} \widehat{\lambda}_n \right]$$

$$\Leftrightarrow -u_\alpha/k \leq N_n \leq u_\alpha/k$$

Donc

$$\begin{aligned} P\left(\lambda \in \left[\widehat{\lambda}_n - \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}} \widehat{\lambda}_n, \widehat{\lambda}_n + \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}} \widehat{\lambda}_n \right]\right) &= \Phi\left(\frac{u_\alpha}{k}\right) - \Phi\left(-\frac{u_\alpha}{k}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{u_\alpha}{k}\right) - 1 \end{aligned}$$

On a $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ donc $u_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ qui ne simplifie pas l'écriture

d'où, astuce : $\Phi(-u_\alpha) = 1 - \Phi(u_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$ et $-u_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha/2)$ soit $u_\alpha = -\Phi^{-1}(\alpha/2)$ d'où

$$\Phi\left(\frac{u_\alpha}{k}\right) = \Phi\left(-\frac{\Phi^{-1}(\alpha/2)}{k}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\alpha/2)}{k}\right)$$

et la probabilité :

$$P(\lambda \in [\dots]) = 1 - 2\Phi\left(\frac{1}{k} \Phi^{-1}(\alpha/2)\right)$$

Conclusion : $\left[\widehat{\lambda}_n - \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}} \widehat{\lambda}_n, \widehat{\lambda}_n + \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}} \widehat{\lambda}_n \right]$ est un intervalle de confiance de λ au niveau de risque $\beta = 2\Phi\left(\frac{1}{k} \Phi^{-1}(\alpha/2)\right)$

On remarque que $\alpha = 2\Phi\left(\Phi^{-1}(\alpha/2)\right)$ et on résout :

$$\beta > \alpha \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{1}{k} \Phi^{-1}(\alpha/2)\right) > \Phi\left(\Phi^{-1}(\alpha/2)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k} \Phi^{-1}(\alpha/2) > \Phi^{-1}(\alpha/2) \text{ et comme } \frac{1}{k} < 1 \text{ et que } \Phi^{-1}(\alpha/2) < 0, \text{ cette inégalité est bien vérifiée.}$$

Conclusion : $\beta > \alpha$ ce qui était prévisible :
La probabilité d'être dans un intervalle plus étroit est plus petite!

Dans les questions 5 à 7, on suppose que $\lambda = 1$.

5. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, pour tout réel x positif ou nul, on pose : $g_n(x) = \int_0^x F_{T_n}(t) dt$ et $h_n(x) = \int_0^x t f_{T_n}(t) dt$

(a) $h_n(x) = \int_0^x t f_{T_n}(t) dt$

On l'intègre par parties pour faire apparaître $\int_0^x F_{T_n}(t) dt$:

Soit $u'(t) = f_{T_n}(t)$: $u(t) = F_{T_n}(t)$ et $v(t) = t$: $v'(t) = 1$

v est C^1 et u est C^1 sur $\mathbb{R}^+$ car la densité f_{T_n} est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^x t f_{T_n}(t) dt &= [t F_{T_n}(t)]_0^x - \int_0^x F_{T_n}(t) dt \\ &= x F_{T_n}(x) - g_n(x) \end{aligned}$$

Conclusion : $h_n(x) = x F_{T_n}(x) - g_n(x)$

- (b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $(T_n \leq t) = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq t = \bigcap_{i=1}^n (X_i \leq t)$ indépendants donc

$$F_{T_n}(t) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq t) = [F_X(t)]^n$$

$$P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq t) = \int_{-\infty}^t f_{T_n}(x) dx = 0 \text{ si } t \leq 0$$

$$\text{et si } t \geq 0 : \int_{-\infty}^t f_{T_n}(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^t e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^t = 1 - e^{-t}$$

Conclusion : $F_{T_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ (1 - e^{-t})^n & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

Soit $n \geq 2$ (pour avoir $n-1 \in \mathbb{N}^*$)

$$\begin{aligned} g_{n-1}(x) - g_n(x) &= \int_0^x (F_{T_{n-1}}(t) - F_{T_n}(t)) dt \\ &= \int_0^x ((1 - e^{-t})^{n-1} - (1 - e^{-t})^n) dt \\ &= \int_0^x (1 - e^{-t})^{n-1} e^{-t} dt \text{ à la volée :} \\ &= \left[\frac{1}{n} (1 - e^{-t})^n \right]_0^x \\ &= \frac{1}{n} (1 - e^{-x})^n - 0 \end{aligned}$$

Conclusion : Pour $n \geq 2$: $g_{n-1}(x) - g_n(x) = \frac{1}{n} F_{T_n}(x)$

- (c) On a donc pour $n \geq 2$: $g_n(x) = g_{n-1}(x) - \frac{1}{n} F_{T_n}(x)$ et par récurrence :

$$g_n(x) = -\frac{1}{n} F_{T_n}(x) - \frac{1}{n-1} F_{T_{n-1}}(x) \cdots - \frac{1}{2} F_{T_2}(x) + g_1(x)$$

et comme

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \int_0^x F_{T_1}(t) dt = \int_0^x (1 - e^{-t}) dt = [t + e^{-t}]_0^x \\ &= x + e^{-x} - 1 \\ &= x - \frac{1}{1} F_{T_1}(x) \end{aligned}$$

Conclusion : $g_n(x) = x - \frac{1}{n} F_{T_n}(x) - \frac{1}{n-1} F_{T_{n-1}}(x) \cdots - \frac{1}{2} F_{T_2}(x) - \frac{1}{1} F_{T_1}(x)$

- (d) Pour $x \geq 0$: $F_{T_n}(x) - 1 = (1 - e^{-x})^n - 1$

Comme $-e^{-x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ et que $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ quand $x \rightarrow 0$ alors ($\alpha = n$)

Conclusion : $F_{T_n}(x) - 1 \sim -n e^{-x}$ quand $x \rightarrow +\infty$

- (e) T_n a une espérance si $\int_0^x t f_{T_n}(t) dt = x F_{T_n}(x) - g_n(x)$ a une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$

Astuce : On réécrit $x F_{T_n}(x) - g_n(x) = x (F_{T_n}(x) - 1) + x - g_n(x)$ pour faire apparaître la quantité dont on a un équivalent.

Or $x (F_{T_n}(x) - 1) \sim -n x e^{-x} \rightarrow 0$ car $x = o(e^x)$ quand $x \rightarrow +\infty$ donc $x (F_{T_n}(x) - 1) \rightarrow 0$.

D'autre part, toute fonction de répartition tend vers 1 en $+\infty$ donc

$$\begin{aligned} x - g_n(x) &= \frac{1}{n} F_{T_n}(x) + \frac{1}{n-1} F_{T_{n-1}}(x) \cdots + \frac{1}{2} F_{T_2}(x) + \frac{1}{1} F_{T_1}(x) \\ &\rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \text{ quand } x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Conclusion : T_n a une espérance et $E(T_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

6. On veut étudier dans cette question la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(G_n)_{n \geq 1}$ définie par : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $G_n = T_n - E(T_n)$.

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\gamma_n = -\ln n + E(T_n)$ et on admet sans démonstration que la suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ est convergente; on note γ sa limite.

- (a) Pour tout x réel :

$$\begin{aligned} F_{G_n}(x) &= P(G_n \leq x) = P(T_n \leq x + E(T_n)) \\ &= F_{T_n}(x + E(T_n)) \end{aligned}$$

avec $x + E(T_n) = x + \gamma_n + \ln(n)$

Et comme $E(T_n) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$, pour n suffisamment grand on aura $E(T_n) - x \geq 0$ et donc $F_{T_n}(\cdots) = (1 - e^{-\cdots})^n$

$$\begin{aligned} F_{T_n}(x + E(T_n)) &= \left(1 - e^{-(x + \gamma_n + \ln(n))}\right)^n \\ &= \left(1 - e^{-\ln(n)} e^{-(x + \gamma_n)}\right)^n \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout x réel et n assez grand, on a :

$$F_{G_n}(x) = \left(1 - \frac{1}{n} e^{-(x + \gamma_n)}\right)^n.$$

- (b) On a une forme indéterminée 1^∞ qu'il faut résoudre :

$$\left(1 - \frac{1}{n} e^{-(x + \gamma_n)}\right)^n = \exp \left[n \ln \left(1 - \frac{1}{n} e^{-(x + \gamma_n)}\right) \right]$$

Comme $e^{-(x + \gamma_n)} \rightarrow e^{-(x + \gamma)}$ et que $-\frac{1}{n} e^{-(x + \gamma_n)} \rightarrow 0$ alors

$$\begin{aligned} \ln \left(1 - \frac{1}{n} e^{-(x + \gamma_n)}\right) &\sim -\frac{1}{n} e^{-(x + \gamma_n)} \text{ et} \\ \left[n \ln \left(1 - \frac{1}{n} e^{-(x + \gamma_n)}\right) \right] &\sim -e^{-(x + \gamma_n)} \rightarrow -e^{-(x + \gamma)} \text{ donc} \\ \left(1 - \frac{1}{n} e^{-(x + \gamma_n)}\right)^n &\rightarrow \exp \left[-e^{-(x + \gamma)} \right] \end{aligned}$$

Et comme $n \rightarrow +\infty$, il sera "suffisamment grand" et

Conclusion : $F_{G_n}(x) \rightarrow \exp \left[-e^{-(x + \gamma)} \right]$ quand $n \rightarrow +\infty$

- (c) Pour tout x réel, $F_G(x) = \exp \left[-e^{-(x + \gamma)} \right]$

F_G est continue et C^1 sur $\mathbb{R}$

En $-\infty$: $-e^{-(x + \gamma)} \rightarrow -\infty$ donc $F_G(x) \rightarrow 0$

En $+\infty$: $-e^{-(x + \gamma)} \rightarrow 0$ et $F_G(x) \rightarrow 1$

Enfin, F_G est croissante sur $\mathbb{R}$. (composée de deux fonctions décroissantes sur $\mathbb{R}$ ou par $F'_G(x) = \exp \left[-e^{-(x + \gamma)} \right] \times -e^{-(x + \gamma)} \times -1 > 0$)

Conclusion : F_G est la fonction de répartition d'une variable à densité G et $(G_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi de G

7. (a) Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X strictement croissante.

Pour tout x réel, $(Y \leq x) = (F_X(X) \leq x)$

Comme F_X est continue sur $\mathbb{R}$ (variable à densité) et qu'elle est strictement croissante, elle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$ et admet une réciproque.

- Si $x \leq 0 : (Y \leq x) = \emptyset$ et $F_Y(x) = 0$
- Si $x \geq 1 : (Y \leq x) = \Omega$ et $F_Y(x) = 1$
- Si $x \in]0, 1[: (Y \leq x) = (X \leq F_X^{-1}(x))$ donc $F_Y(x) = F_X(F_X^{-1}(x)) = x$

et on reconnaît la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$

Conclusion : $Y \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$

- (b) La variable aléatoire G a pour fonction de répartition $F_G : x \rightarrow \exp \left[-e^{-(x+\gamma)} \right]$ continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc $Y = F_G(G) \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$. reste à déterminer G en fonction de Y :

$$Y = F_G(G) \iff Y = \exp \left[-e^{-(G+\gamma)} \right]$$

$$\iff \ln(Y) = -e^{-(G+\gamma)} \text{ car } Y > 0$$

$$\iff \ln(-\ln(Y)) = -G - \gamma \text{ car } -\ln(Y) > 0 \text{ puisque } Y < 1$$

$$\iff G = -\gamma - \ln(-\ln(Y))$$

d'où la simulation :

```
function y=G(x)
x=rand()
y=-gamma-log(-log(x))
endfunction
```