

I	Révisions sur les suites numériques	3
I.1	Généralités	3
I.2	Convergence de suites	4
I.3	Étudier la convergence d'une suite	5
I.4	Suites récurrentes linéaires	15
I.5	Étude de suites définies par récurrence	18
I.6	Cas particuliers de suites définies par récurrences	20
	Suites arithmétiques	20
	Suites géométriques	21
	Suites arithmético-géométriques	21
I.7	Suites implicites	22
II	Généralités sur les séries numériques	24
II.1	Définition	24
II.2	Condition nécessaire de convergence	25
II.3	Exemples fondamentaux	27
	Séries géométriques	27
	Séries télescopiques : lien suite-série	27
II.4	Propriétés élémentaires	29
III	Séries à termes positifs	31
III.1	Généralités	31
III.2	Théorèmes de comparaison	31
III.3	Théorème de comparaison aux séries géométriques : la règle de D'Alembert	33
III.4	Comparaison série-intégrale	35
III.5	Séries de Riemann	36
IV	Séries absolument convergentes	39
V	Critère spécial des séries alternées	43
VI	Produit de Cauchy de deux séries	45
VII	Formule de Stirling	47
VIII	Annexe	51
VIII.1	À la fin de ce chapitre,...	51

Suites et séries de fonctions

A - Compléments sur les séries numériques

Cette section a pour objectif de consolider et d'élargir les acquis de première année sur les séries, notamment la convergence absolue, en vue de l'étude des probabilités discrètes et des séries de fonctions.
L'étude de la semi-convergence n'est pas un objectif du programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Compléments sur les séries numériques	
Technique de comparaison série-intégrale.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas d'une fonction monotone. La démonstration n'est pas exigible.
Formule de Stirling : équivalent de $n!$.	
Règle de d'Alembert.	
Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste.	La transformation d'Abel est hors programme.
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	La démonstration n'est pas exigible.

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Révisions sur les suites numériques

I.1. Généralités



Définition 4.1 – Suites numériques

Une **suite à valeurs dans** $\mathbb{K}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{K} \\ n &\mapsto u_n. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est appelé le n -ième terme de la suite.

L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Remarque 4.1

L'ensemble des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Dans la suite, les notions et résultats seront énoncés pour des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mais peuvent être adaptés aux suites $(u_n)_{n \geq n_0}$ définies à partir d'un certain rang n_0 .



Définition 4.2 – Monotonie d'une suite

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles est :

- ▶ **croissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$;
- ▶ **strictement croissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$;
- ▶ **décroissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$;
- ▶ **strictement décroissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$;
- ▶ **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante ;
- ▶ **strictement monotone** lorsqu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarque 4.2 – Méthode pour étudier la monotonie d'une suite

Pour étudier la monotonie d'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut :

- ▶ déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- ▶ si la suite est à valeurs strictement positives, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.



Définition 4.3 – Suites majorées, suites minorées

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles est :

- ▶ **majorée** lorsque : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$;
- ▶ **minorée** lorsque : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$;

**Définition 4.4 – Suites bornées**

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est **bornée** lorsque :

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$$

Remarque 4.3

Pour une suite réelle, être bornée est équivalent à être minorée et majorée.

I.2. Convergence de suites**Définition 4.5 – Suites convergentes, suites divergences**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- Soit $\ell \in \mathbb{K}$. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge vers** ℓ (ou **tend vers** ℓ) et on note $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

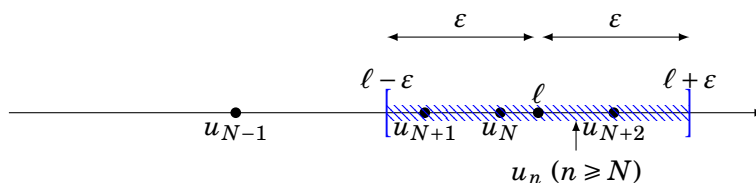
- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** (ou **admet une limite finie**) lorsqu'il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que la suite converge vers ℓ .
- Quand la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Remarque 4.4 – Visualisation dans le cas d'une suite réelle

La définition de « u converge (ou tend) vers ℓ » se réécrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \underbrace{\forall n \in \mathbb{N}, [n \geq N \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon]}_{\substack{\text{à partir du rang } N, \text{ tous les termes de la suite } u \\ \text{sont à une distance inférieure à } \varepsilon \text{ de } \ell}}.$$

On lira alors : pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite u sont à une distance inférieure à ε de ℓ .

**Remarque 4.5**

L'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

**Définition 4.6 – Limites infinies**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs **réelles**.

- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$ (ou **diverge vers** $+\infty$) lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A.$$

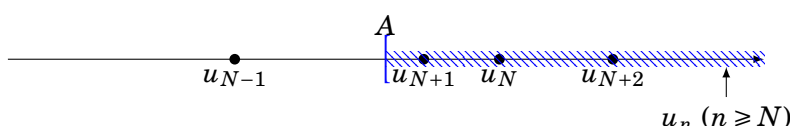
► On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tend vers** $-\infty$ (ou **diverge vers** $-\infty$) lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq A.$$

Remarque 4.6 – Visualisation

La définition de « u tend vers $+\infty$ » se réécrit :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{[n \geq N \Rightarrow u_n \geq A]}_{\substack{\text{à partir du rang } N, \text{ tous les termes} \\ \text{de la suite } u \text{ sont supérieurs à } A}}.$$



Théorème 4.1 – Unicité de la limite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente. Sa limite ℓ est unique : s'il existe $\ell_1 \in \mathbb{K}$ et $\ell_2 \in \mathbb{K}$ tels que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et ℓ_2 , alors $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de limite, il existe N_1 et N_2 des entiers tels que, pour tout $n \geq N_1$, $|u_n - \ell_1| \leq \varepsilon$ et pour tout $n \geq N_2$, $|u_n - \ell_2| \leq \varepsilon$.

D'où, par inégalité triangulaire, pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, $|\ell_1 - \ell_2| \leq |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2| \leq 2\varepsilon$.

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $|\ell_1 - \ell_2| = 0$ (sinon en prenant $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} > 0$, on aboutit à une contradiction).

Ainsi, $\ell_1 = \ell_2$.

Remarque 4.7

Le théorème 4.1 s'étend au cas des suites réelles tendant vers $-\infty$ ou $+\infty$

I.3. Étudier la convergence d'une suite

On rappelle dans ce paragraphe les différentes méthodes vues en première année pour étudier la convergence d'une suite.

Méthode 4.1 – Premier réflexe!

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est convergente, on cherche un équivalent simple de u_n qui converge.

 Proposition 4.1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{K}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs positives telle que : $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq v_n,$$

alors, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|v_n - 0| \leq \varepsilon$. Or, v_n est à valeurs positives, donc, pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq v_n \leq \varepsilon$.
Donc, par définition de limite, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ . □

Remarque 4.8 – Quand utiliser la proposition 4.1 ?

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Si on a une idée quant à la limite ℓ de cette suite, on peut majorer $|u_n - \ell|$ par une quantité qui tend vers 0.

Théorème 4.2 – Théorème de majoration/minoration

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On suppose qu'il existe $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles telle que : $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n,$$

alors, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

- On suppose qu'il existe $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles telle que : $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n,$$

alors, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

Démonstration

- Soit $A > 0$. On sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $v_n \geq A$. Donc, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq A$.
Donc, par définition de limite, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.
► Même méthode (ou appliquer le point précédente à $(-u_n)$ et $(-v_n)$). □

Théorème 4.3 – Théorème d'encadrement

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites à valeurs réelles. On suppose que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers la même limite ℓ .

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n \leq u_n \leq w_n,$$

alors, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_1$, $|v_n - \ell| \leq \varepsilon$ et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_2$, $|w_n - \ell| \leq \varepsilon$.
On note $N = \max(N_1, N_2)$. On a alors, pour tout $n \geq N$,

$$-\varepsilon \leq v_n - \ell \leq u_n - \ell \leq w_n - \ell \leq \varepsilon.$$

Donc, par définition de limite, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ . □

Théorème 4.4 – Théorème de la limite monotone

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs **réelles**.

- Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors elle converge et a pour limite : $\sup(\{u_n | n \in \mathbb{N}\})$.
► Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, alors elle tend vers $+\infty$.
► Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors elle converge et a pour limite : $\inf(\{u_n | n \in \mathbb{N}\})$.

► Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée, alors elle tend vers $-\infty$.

Démonstration

Cas d'une suite croissante majorée.

Soit (u_n) une suite croissante majorée, montrons que (u_n) converge vers $\ell = \sup(\{u_n | n \in \mathbb{N}\})$. C'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque.

La borne supérieure ℓ de $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ est le plus petit des majorant de cet ensemble.

Donc, $\ell - \varepsilon < \ell$ ne majore pas $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$.

D'où, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\ell - \varepsilon \leq u_N$.

Or, (u_n) est croissante, donc, pour tout $n \geq N$, $\ell - \varepsilon \leq u_N \leq u_n$.

De plus, la borne supérieure ℓ de $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ est un majorant de ce ensemble, donc, pour tout $n \geq N$, $u_n \leq \ell \leq \ell + \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$. Donc, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Cas d'une suite croissante non majorée.

Soit (u_n) une suite croissante non majorée, montrons que (u_n) tend vers $+\infty$. C'est-à-dire :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A.$$

Soit $A \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) n'est pas majorée, donc l'ensemble $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas majoré. D'où A n'est pas un majorant de $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $A < u_N$.

Or, la suite (u_n) est croissante, donc, pour tout $n \geq N$, $A < u_N \leq u_n$.

Ainsi, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq A$. Ceci est vrai pour tout $A \in \mathbb{R}$. Donc, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. □

Remarque 4.9

1. Le théorème de la limite monotone ne donne pas la valeur de la limite. Il permet uniquement de conclure qu'une suite converge ou tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Par exemple, la suite de terme général $\frac{1}{n}$ est décroissante et minorée par -1 , donc par théorème de la limite monotone, elle converge. Par contre, elle converge vers 0 et non -1 .

2. Il existe des suites non monotones qui convergent ! Par exemple la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.
3. Si (u_n) est une suite décroissante qui converge vers ℓ , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \ell$.
Si (u_n) est une suite croissante qui converge vers ℓ , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell$.

Exemple 4.1

On considère la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$. Donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Soit $n \geq 2$. Pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $k^2 \geq k \times (k-1) > 0$.

D'où, $u_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \times (k-1)}$.

Or, $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \times (k-1)} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n}$.

Donc, $u_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$.

On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par 2.

Par le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie $\ell \leq 2$.

 Attention

On sait que $\ell \leq 2$ et on **ne connaît pas** la valeur de ℓ .

Il ne faut **surtout** pas dire que $\ell = 2$. C'est archi-faux, en effet, on peut montrer que $\ell = \frac{\pi^2}{6}$.

 Définition 4.7 – Suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes lorsque :

- ▶ la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante ;
- ▶ la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante ;
- ▶ la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

 Théorème 4.5 – Théorème des suites adjacentes

Deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ adjacentes convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et, dans le cas où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n \leq \ell \leq v_n \leq v_0.$$

Démonstration

On se place dans le cas où : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. D'après la monotonie de (u_n) et de (v_n) , la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante. De plus, cette suite tend vers 0, donc, tous les termes de la suite sont positifs ou nuls. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

La suite (u_n) est croissante et majorée (par v_0) donc, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers une limite finie ℓ_1 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell_1$.

La suite (v_n) est décroissante et minorée (par u_0) donc, d'après le théorème de la limite monotone, (v_n) converge vers une limite finie ℓ_2 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell_2 \leq v_n$.

Par opération sur les limites, la suite $(v_n - u_n)$ tend $\ell_2 - \ell_1$. Or elle converge aussi vers 0. Par unicité de la limite, on a $\ell_1 = \ell_2$.

Ainsi, (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ_1 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n \leq \ell_1 \leq v_n \leq v_0$.

 Remarque 4.11

Le théorème des suites adjacentes ne donne pas la valeur de la limite. Il permet uniquement de conclure que les suites convergent.

 Exercice 4.1

Soit $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de segments non vides indexées par $\mathbb{N}$ vérifiant :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$.
- $b_n - a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ est un singleton.

Ce résultat hors programme s'appelle : le théorème des segments emboîtés.

Résolution

- ▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$. D'où $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$.
Donc, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

De plus, $b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Par théorème, elles convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

► Montrons par double inclusion que : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\ell\}$.

- Montrons que $\ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$.

On sait que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq \ell \leq b_n$.

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell \in [a_n, b_n]$. Donc, $\ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$.

Donc, $\{\ell\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$.

- Soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq x \leq b_n$.

D'où, en passant à la limite dans les inégalités, $\ell \leq x \leq \ell$. Donc, $x = \ell$. Autrement dit $x \in \{\ell\}$.

Donc, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \subset \{\ell\}$.

Ainsi, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\ell\}$.



Exercice 4.2

On considère les suites définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ et que $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que ℓ est irrationnel.

Résolution

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

► $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ donc la suite (u_n) est croissante et même strictement croissante.

► $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} = \frac{-1}{n \times n! \times (n+1)!} < 0$ donc la suite (v_n) est décroissante et même strictement décroissante.

► $0 \leq v_n - u_n = \frac{1}{n \times n!} \leq \frac{1}{n}$. Or, $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc par théorème d'encadrement, (u_n) tend vers 0.

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes donc, par théorème, elles convergent vers la même limite ℓ .

De plus, comme (u_n) est croissante, on a : $2 = u_1 \leq \ell$. Donc $\ell > 0$.

2. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $\ell = \frac{p}{q}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La suite (u_n) est strictement croissante donc, $u_n < u_{n+1} \leq \ell$ et la suite (v_n) est strictement décroissante donc, $\ell \leq v_{n+1} < v_n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < \ell < v_n$.

Par définition de v_q , on a : $u_q < \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{q \times q!}$.

D'où, $q \times q! \times u_q < q! \times p < q \times q! \times u_q + 1$.

Or,

$$q! \times u_q = \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} = \frac{q!}{0!} + \frac{q!}{1!} + \dots + \frac{q!}{(q-1)!} + 1.$$

De plus, pour tout $k \in [0, q-1]$, $\frac{q!}{k!} = q \times (q-1) \times \dots \times (q-k+1) \in \mathbb{N}$.

Donc, $q! \times u_q \in \mathbb{N}$, puis $q \times q! \times u_q \in \mathbb{N}$.

On en déduit que l'entier $q! \times p$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs : $q \times q! \times u_q$ et $q \times q! \times u_q + 1$.

Contradiction. Donc, $\ell \notin \mathbb{Q}$.

Remarque : on peut montrer que $\ell = e$.

 Définition 4.8 – Suites extraites

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)},$$

où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

 Exemple 4.2

Les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

 Théorème 4.6

- Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la même limite.
- Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), alors toute suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Démonstration

► On suppose que (u_n) tend vers ℓ .

Soit $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Montrons que la suite extraite $(u_{\phi(n)})$ converge vers ℓ .

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Comme ϕ est strictement croissante et à valeurs dans $\mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n) \geq n$ (**la démonstration se fait par récurrence**).

Donc, pour tout $n \geq N$, $\phi(n) \geq n \geq N$, puis, $|u_{\phi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$.

Donc, $u_{\phi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

► On suppose que (u_n) tend vers $+\infty$.

Soit $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Montrons que la suite extraite $(u_{\phi(n)})$ tend vers $+\infty$.

Soit $A > 0$. Par définition de limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq A$.

Donc, pour tout $n \geq N$, $\phi(n) \geq n \geq N$, puis, $u_{\phi(n)} \geq A$. □

 Exercice 4.3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Résolution

On sait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante.

Donc, par le théorème de la limite monotone, il y a deux cas :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Par l'absurde, si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, alors la suite extraite $u_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Or, $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Contradiction.

Donc,

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

 Remarque 4.12 – Prudence !

La convergence d'une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'entraîne pas la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Par contre on a le résultat suivant dont il faut connaître la démonstration.

Théorème 4.7

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite. Si les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{K}$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .
- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Si les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Démonstration

Voir la démonstration dans le chapitre : Espaces vectoriels normés.

Exercice 4.4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Résolution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{2n}$, $w_n = u_{2n+1}$ et $z_n = u_{3n}$. Par hypothèse, les suites (v_n) , (w_n) et (z_n) convergent. Notons ℓ_1 , ℓ_2 et ℓ_3 leurs limites respectives.

Pour montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, il suffit que de montrer que $\ell_1 = \ell_2$.

Étape 1 : montrons que $\ell_1 = \ell_3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{3n} = u_{6n} = z_{2n}.$$

Or, comme (v_n) converge vers ℓ_1 , la suite extraite (v_{3n}) de (v_n) converge aussi vers ℓ_1 . De même, la suite (z_{2n}) converge vers ℓ_3 . D'où, la suite (u_{6n}) converge vers ℓ_1 et vers ℓ_3 . Par unicité de la limite, on en déduit que $\ell_1 = \ell_3$.

Étape 2 : montrons que $\ell_2 = \ell_3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$w_{3n+1} = u_{6n+3} = z_{2n+1}.$$

Or, comme (w_n) converge vers ℓ_2 , la suite extraite (w_{3n+1}) de (w_n) converge aussi vers ℓ_2 . De même, la suite (z_{2n+1}) converge vers ℓ_3 . D'où, la suite (u_{6n+3}) converge vers ℓ_2 et vers ℓ_3 . Par unicité de la limite, on en déduit que $\ell_2 = \ell_3$.

Ainsi $\ell_1 = \ell_2$. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite donc la suite (u_n) converge.

Exercice 4.5

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On suppose que les suites extraites $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{K}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Résolution

Rédaction similaire à celle du théorème 4.7 page 11.

Théorème 4.8 – Sommes de Riemann

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Alors,

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Démonstration

Démonstration dans le cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$.

► Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$ des réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$ où

$$a_k = a + k \times \frac{b-a}{n}.$$

► La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$ donc, par l'inégalité des accroissements finis, il existe $M > 0$ tel que f est M -lipschitzienne. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt - (a_{k+1} - a_k) \times f(a_k) \right| &= \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) - f(a_k) dt \right| \\ &\leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)| dt \\ &\leq M \times \int_{a_k}^{a_{k+1}} |t - a_k| dt \\ &\leq \frac{M \times (a_{k+1} - a_k)^2}{2}. \end{aligned}$$

► D'où, par la relation de Chasles.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - R_n(f) \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt - (a_{k+1} - a_k) \times f(a_k) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{2} \times (a_{k+1} - a_k)^2 \\ &\leq \frac{M \times (b-a)^2}{2n} \quad (\text{car } a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}) \end{aligned}$$

Or, $\frac{M \times (b-a)^2}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc,

$$R_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

□

Remarque 4.13

On se place sous les hypothèses du théorème des sommes de Riemann.

► On a $\frac{b-a}{n} \times f(b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{b-a}{n} \times f(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc,

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^n f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt \quad \text{et} \quad \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

► Lorsque $a = 0$ et $b = 1$ le théorème donne :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt.$$

Exemple 4.3

Déterminons la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$.

Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

En notant $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, on a : pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Or, f est continue sur $[0, 1]$, donc par théorème (somme de Riemann),

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt.$$

De plus,

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\text{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi,

$$(u_n)_{n \geq 1} \text{ converge vers } \frac{\pi}{4}.$$

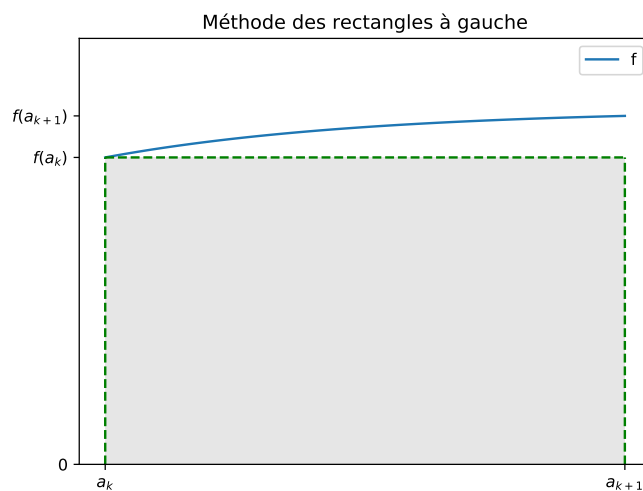
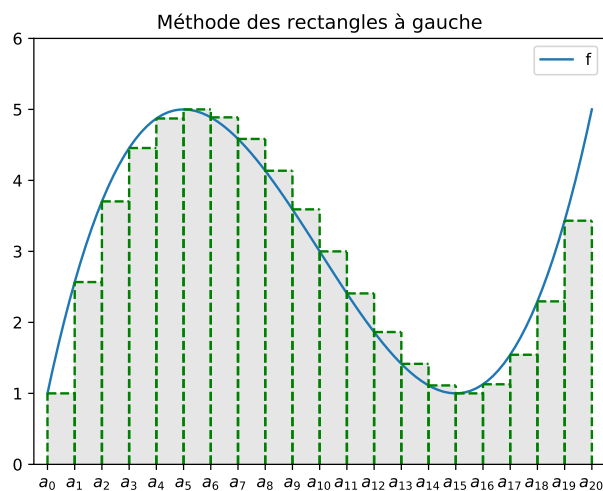
Remarque 4.14 – Méthode numérique : méthode des rectangles à gauche, des rectangles à droite

Le théorème précédent justifie l'utilisation des sommes de Riemann pour déterminer une valeur approchée de $\int_a^b f(t) dt$. En utilisant la subdivision $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ et la relation de Chasles, on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt.$$

Méthode des rectangles à gauche. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on approche $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt$ par $f(a_k) \times (a_{k+1} - a_k)$:

$$\int_a^b f(t) dt \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right).$$



 Python

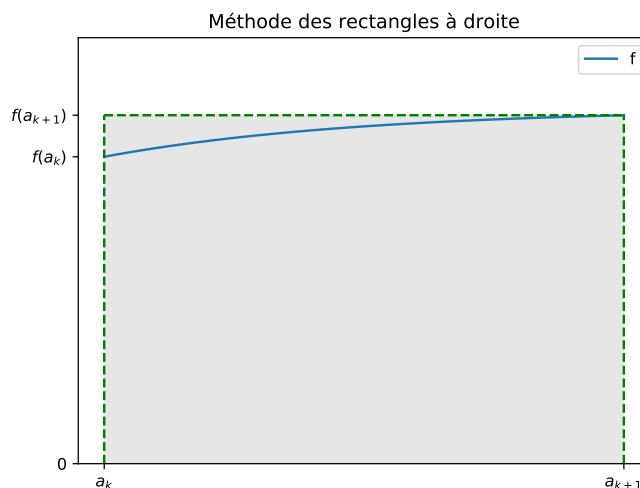
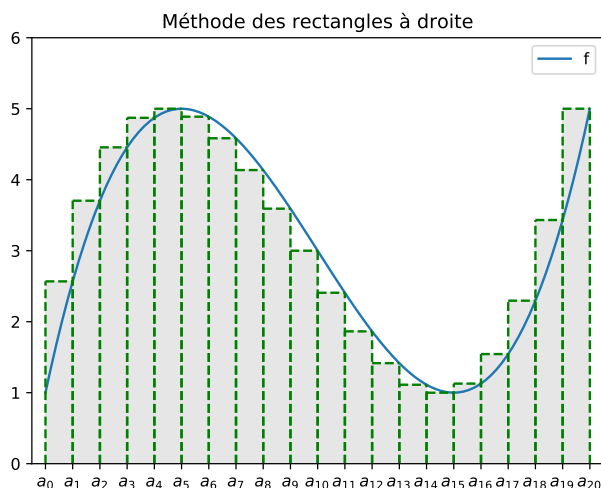
```

1  def rectangleG(f,a,b,n):
2      """
3      Entrée : f une fonction, a<b deux réels (bornes d'intégration)
4      et n le nombre de sous-intervalles
5      Sortie : Valeur approchée de l'intégrale de f entre a et b
6      par la méthode des rectangles à gauche
7      """
8      I = 0
9      for k in range(n):
10         I = I + f(a+k*(b-a)/n)
11     I = ((b-a)/n)*I
12     return I

```

Méthode des rectangles à droite. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on approche $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt$ par $f(a_{k+1}) \times (a_{k+1} - a_k)$:

$$\int_a^b f(t) dt \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right).$$


 Python

```

1  def rectangleD(f,a,b,n):
2      """
3      Entrée : f une fonction, a<b deux réels (bornes d'intégration)
4      et n le nombre de sous-intervalles
5      Sortie : Valeur approchée de l'intégrale de f entre a et b
6      par la méthode des rectangles à droite
7      """
8      I = 0
9      for k in range(n):
10         I = I + f(a+(k+1)*(b-a)/n)
11     I = (b-a)/n*I
12     return I

```

Ces approximations sont à la base de la **méthode d'Euler**. Cette méthode permet de résoudre numériquement des équations différentielles.

Remarque 4.15 – Utiliser un raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas, on peut supposer qu'elle converge vers une limite finie et aboutir à une contradiction.

Exemple 4.4

Montrons que la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Par l'absurde, on suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos(n+1) + \cos(n-1) = \cos(1) \times \cos(n) - \sin(1) \times \sin(n) + \cos(1) \times \cos(n) + \sin(1) \times \sin(n) = 2 \cos(1) \times \cos(n).$$

D'où, en passant à la limite, on a $2\ell = 2 \cos(1) \times \ell$. Or, $\cos(1) \neq 1$, donc $\ell = 0$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(2n) = 2 \cos(n)^2 - 1$ et la suite extraite $(\cos(2n))$ tend aussi vers ℓ .

D'où, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, $0 = -1$. Absurde.

Ainsi, la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

I.4. Suites récurrentes linéaires

Soient a et b des réels avec $b \neq 0$. On s'intéresse aux suites vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + a \times u_{n+1} + b \times u_n = 0$$

Pour cela, on note

$$E_{a,b} = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + a \times u_{n+1} + b \times u_n = 0\}.$$

**Proposition 4.2**

L'ensemble $E_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Démonstration

L'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{K}^{\mathbb{N}} &\rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto (u_{n+2} + a \times u_{n+1} + b \times u_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

est un endomorphisme de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et son noyau est $E_{a,b}$. Par conséquent, $E_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. □

**Proposition 4.3**

L'espace vectoriel $E_{a,b}$ est isomorphe à $\mathbb{K}^2$. En particulier, $\dim(E_{a,b}) = 2$.

Démonstration

► L'application :

$$\begin{aligned} \psi : \quad E_{a,b} &\rightarrow \mathbb{K}^2 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto (u_0, u_1) \end{aligned}$$

est linéaire (exercice).

► Soit $(x, y) \in \mathbb{K}^2$. Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 est entièrement déterminée par ses deux premiers termes donc, il existe une unique suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que : $u_0 = x$, $u_1 = y$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} + a \times u_{n+1} + b \times u_n = 0.$$

On a montré que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2, \exists! (u_n) \in E_{a,b}, \psi((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (x, y).$$

Autrement dit, ψ est bijective.

► Ainsi, ψ est un isomorphisme de $E_{a,b}$ sur $\mathbb{K}^2$. □

**Proposition 4.4**

Soit $r \in \mathbb{K}$. La suite $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $E_{a,b}$ si, et seulement si, r est solution de l'équation caractéristique :

$$r^2 + a \times r + b = 0.$$

Démonstration

Soit $r \in \mathbb{K}$. On a : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$r^{n+2} + a \times r^{n+1} + b \times r^n = r^n \times (r^2 + a \times r + b)$$

► Si la suite $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $E_{a,b}$, alors l'égalité précédente pour $n = 0$ donne : $0 = r^2 + a \times r + b$.

► Réciproquement, si $r^2 + a \times r + b = 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r^{n+2} + a \times r^{n+1} + b \times r^n = 0$. Donc, $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $E_{a,b}$. $\square$

Remarque 4.16

Comme $b \neq 0$, 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique.

**Théorème 4.9 – Description de $E_{a,b}$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$**

► On suppose que l'équation caractéristique $r^2 + a \times r + b = 0$ possède deux racines r_1 et r_2 distinctes. Alors, la famille $\left((r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}\right)$ est une base de $E_{a,b}$

Autrement dit, pour tout $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_{a,b}$, il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \times r_1^n + \mu \times r_2^n.$$

► On suppose que l'équation caractéristique $r^2 + a \times r + b = 0$ possède une racine double r_0 .

Alors, la famille $\left((r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n \times r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}\right)$ est une base de $E_{a,b}$

Autrement dit, pour tout $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_{a,b}$, il existe une unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \times r_0^n + \mu \times n \times r_0^n.$$

Démonstration

► On suppose que l'équation caractéristique possède deux racines r_1 et r_2 distinctes. Donc, par la proposition 4.4 les suites $(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent à $E_{a,b}$.

Montrons que la famille $\left((r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}\right)$ est libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda \times r_1^n + \mu \times r_2^n = 0.$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on a :

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= 0 & (L_1) \\ \lambda \times r_1 + \mu \times r_2 &= 0 & (L_2). \end{cases}$$

L'opération $(L_2 - r_1 \times L_1)$ donne : $\mu \times (r_2 - r_1) = 0$. Or $r_1 \neq r_2$. D'où, $\mu = 0$, puis en injectant dans le système, on trouve $\lambda = 0$.

La famille $\left((r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}\right)$ de vecteurs de $E_{a,b}$ est libre et possède $2 = \dim(E_{a,b})$ vecteurs. C'est donc une base de $E_{a,b}$ et,

$$E_{a,b} = \text{Vect}\left((r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}\right) = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \times r_1^n + \mu \times r_2^n \right\}.$$

► On suppose que l'équation caractéristique possède une racine double r_0 . Les suites $(r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(n \times r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent à $E_{a,b}$ (à vous de le vérifier).

Montrons que la famille $\left((r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n \times r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}\right)$ est libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda \times r_0^n + \mu \times n \times r_0^n = 0.$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on a :

$$\begin{cases} \lambda &= 0 & (L_1) \\ \lambda \times r_0 + \mu \times r_0 &= 0 & (L_2). \end{cases}$$

D'où $\mu \times r_0 = 0$. De plus, 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique (car $n \neq 0$). Donc $r_0 \neq 0$. D'où, $\mu = 0$.

La famille $\left((r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n \times r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}\right)$ de vecteurs de $E_{a,b}$ est libre et possède $2 = \dim(E_{a,b})$ vecteurs. C'est donc une base de $E_{a,b}$ et,

$$E_{a,b} = \text{Vect}\left((r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n \times r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}\right) = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \times r_0^n + \mu \times n \times r_0^n \right\}.$$

 $\square$

Théorème 4.10 – Description de $E_{a,b}$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

► On suppose que l'équation caractéristique $r^2 + a \times r + b = 0$ possède deux racines **réelles** r_1 et r_2 distinctes. Alors, la famille $\left((r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}\right)$ est une base de $E_{a,b}$.

Autrement dit, pour tout $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_{a,b}$, il existe une unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \times r_1^n + \mu \times r_2^n.$$

► On suppose que l'équation caractéristique $r^2 + a \times r + b = 0$ possède une racine double r_0 . Alors, la famille $\left((r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n \times r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}\right)$ est une base de $E_{a,b}$.

Autrement dit, pour tout $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_{a,b}$, il existe une unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \times r_0^n + \mu \times n \times r_0^n.$$

► On suppose que l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = \rho \times e^{i\theta}$ et $\overline{r_1} = \rho \times e^{-i\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta \notin 0[\pi]$ (ces conditions assurent que $r \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$).

La famille $\left((\rho^n \times \cos(n \times \theta))_{n \in \mathbb{N}}, (\rho^n \times \sin(n \times \theta))_{n \in \mathbb{N}}\right)$ est une base de $E_{a,b}$.

Autrement dit, pour tout $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_{a,b}$, il existe une unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \times \rho^n \times \cos(n \times \theta) + \mu \times \rho^n \times \sin(n \times \theta) = \rho^n \times (\lambda \times \cos(n \times \theta) + \mu \times \sin(n \times \theta))$$

Démonstration

► On suppose que l'équation caractéristique possède deux racines réelles r_1 et r_2 distinctes. Comme dans le cas complexe, on montre que la famille $\left((r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}\right)$ est une base de $E_{a,b}$ et,

$$E_{a,b} = \text{Vect}\left((r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}\right) = \left\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \times r_1^n + \mu \times r_2^n\right\}.$$

► On suppose que l'équation caractéristique possède une racine réelle r_0 double. Comme dans le cas complexe, on montre que la famille $\left((r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n \times r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}\right)$ est une base de $E_{a,b}$ et,

$$E_{a,b} = \text{Vect}\left((r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n \times r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}\right) = \left\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \times r_0^n + \mu \times n \times r_0^n\right\}.$$

► On suppose que l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = \rho \times e^{i\theta}$ et $\overline{r_1} = \rho \times e^{-i\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta \notin 0[\pi]$. Les suites $(\rho^n \times \cos(n \times \theta))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\rho^n \times \sin(n \times \theta))_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent à $E_{a,b}$ (à vous de le vérifier).

Montrons que la famille $\left((\rho^n \times \cos(n \times \theta))_{n \in \mathbb{N}}, (\rho^n \times \sin(n \times \theta))_{n \in \mathbb{N}}\right)$ est libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda \times \rho^n \times \cos(n \times \theta) + \mu \times \rho^n \times \sin(n \times \theta) = 0.$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on a :

$$\begin{cases} \lambda & = & 0 & (L_1) \\ \lambda \times \rho \times \cos(\theta) + \mu \times \rho \times \sin(\theta) & = & 0 & (L_2). \end{cases}$$

D'où, $\lambda = 0$, puis $\mu \times \rho \times \sin(\theta) = 0$. Or, r_1 n'est pas réel donc $\rho \times \sin(\theta) \neq 0$. Donc $\mu = 0$.

La famille $\left((\rho^n \times \cos(n \times \theta))_{n \in \mathbb{N}}, (\rho^n \times \sin(n \times \theta))_{n \in \mathbb{N}}\right)$ de vecteurs de $E_{a,b}$ est libre et possède $2 = \dim(E_{a,b})$ vecteurs. C'est donc une base de $E_{a,b}$ et,

$$\begin{aligned} E_{a,b} &= \text{Vect}\left((\rho^n \times \cos(n \times \theta))_{n \in \mathbb{N}}, (\rho^n \times \sin(n \times \theta))_{n \in \mathbb{N}}\right) \\ &= \left\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \times \rho^n \times \cos(n \times \theta) + \mu \times \rho^n \times \sin(n \times \theta)\right\}. \end{aligned}$$

□

Remarque 4.17 – Comment trouver les constantes λ et μ ?

Les deux premiers termes de la suite u_0 et u_1 sont connus. Selon le cas dans lequel on se trouve, on est alors ramené à résoudre un des trois systèmes :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda \times r_1 + \mu \times r_2 = u_1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda = u_0 \\ \lambda \times r_0 + \mu \times r_0 = u_1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda = u_0 \\ \rho \times (\lambda \times \cos(\theta) + \mu \times \sin(\theta)) = u_1 \end{cases}$$

Dans les trois cas le couple (λ, μ) trouvé est unique. Si ce n'est pas le cas, il y a une erreur quelque part.

💡 Exemple 4.5 – Suite de Fibonacci

On considère la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Donnons l'expression de u_n en fonction de n .

L'équation caractéristique est $r^2 = r + 1$. Autrement dit, $r^2 - r - 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 5$.

Donc, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes $r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Donc, il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda \times r_1^n + \mu \times r_2^n.$$

Il reste à déterminer λ et μ .

Or,

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 & L_1 \\ \lambda \times r_1 + \mu \times r_2 = 1 & L_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda + \mu = 0 & L_1 \\ \mu \times (r_2 - r_1) = 1 & L_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = -\mu & L_1 \\ \mu = \frac{1}{r_2 - r_1} & L_2 \end{cases}$$

D'où, en utilisant les expressions de r_1 et r_2 , $\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ et $\mu = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \times (r_2^n - r_1^n) = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Remarque : comme u_0 et u_1 sont des entiers, on peut montrer à l'aide de la relation de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}$. Ce résultat n'est pas évident en observant uniquement l'expression de u_n donnée de manière explicite (c'est-à-dire, en fonction de n).

I.5. Étude de suites définies par récurrence

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux suites définies par une relation de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

🔍 Remarque 4.18

Avant même de commencer à étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on commence par dresser le tableau de variations, tracer la courbe représentative de f et tracer la droite d'équation $y = x$.

🔧 Proposition 4.5

Si $J \subset I$ est un intervalle stable de f (c'est-à-dire $f(J) \subset J$) et $u_0 \in J$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$.

Démonstration

On procède par récurrence sur n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n : u_n \in J$.

Initialisation : $n = 0$. C'est clair, $u_0 \in J$ par hypothèse. Donc, $\mathcal{H}_0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{H}_n$ et on montre $\mathcal{H}_{n+1}$.

On sait que $u_{n+1} = f(u_n)$. Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \in J$. Donc, $u_{n+1} = f(u_n) \in f(J)$. Or, $f(J) \subset J$, donc $u_{n+1} \in J$. D'où, $\mathcal{H}_{n+1}$.
Ce qui achève la récurrence. $\square$

 Remarque 4.19

Il faut savoir refaire la démonstration précédente au cas par cas.

**Proposition 4.6 – Cas où f est croissante**

On suppose que I est un intervalle stable de f et que la fonction f est **croissante** sur I .

► La suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

est monotone.

► De plus,

- si $f(u_0) - u_0 \geq 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- si $f(u_0) - u_0 \leq 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Démonstration

► **Cas 1** : $f(u_0) - u_0 \geq 0$.

On procède par récurrence sur n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n : u_n \leq u_{n+1}$.

Initialisation. $n = 0$. On a $u_1 = f(u_0) \geq u_0$. Donc, $\mathcal{H}_0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{H}_n$ et on montre $\mathcal{H}_{n+1}$.

Par hypothèse de récurrence, $u_n \leq u_{n+1}$. D'où, comme f est croissante $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$. Donc, $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. D'où, $\mathcal{H}_{n+1}$.

Ce qui achève la récurrence.

► **Cas 2** : $f(u_0) - u_0 \leq 0$. Même méthode. □

 Remarque 4.20 – En pratique

► Pour déterminer la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque la fonction f est croissante, on étudie le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$. Pour cela, on peut dresser son tableau de variations par exemple. On peut alors déterminer la monotonie de (u_n) en étudiant le signe de $g(u_0) = f(u_0) - u_0$.

► Une fois la monotonie acquise, il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de la limite monotone pour conclure. Le calcul de la limite éventuelle peut alors être effectué en utilisant le résultat suivant.

**Proposition 4.7**

On suppose que I est un intervalle stable de f et que la suite la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

converge vers une limite $\ell \in I$.

Si la fonction f est **continue** sur I , alors, on a : $f(\ell) = \ell$. Autrement dit, ℓ est un **point fixe** de f .

Démonstration

La fonction f est continue sur I donc en ℓ . De plus, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Donc, $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et, par caractérisation séquentielle de la continuité, $u_{n+1} = f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$.

Par unicité de la limite, on a : $\ell = f(\ell)$. □

 Remarque 4.21 – En pratique

► Il ne faut pas oublier de vérifier l'hypothèse de continuité de f !

► Pour déterminer la limite éventuelle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il suffit de résoudre l'équation $f(x) = x$.

Remarque 4.22 – Que faire lorsque la fonction f est décroissante ?

Dans ce cas, on considère la fonction $h = f \circ f$ et les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Ces suites vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} = h(u_{2n}) \text{ et } u_{2n+3} = h(u_{2n+1}).$$

Comme la fonction f est décroissante, la fonction h est croissante. D'après la proposition 4.6 appliquée à h , les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones.

En fait, les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont de monotonies contraires.

En effet, si la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} \geq u_{2n}$$

et, par décroissance de f , on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) \leq f(u_{2n}) = u_{2n+1}.$$

Le cas où la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante se traite de la même manière.

D'après la proposition 4.7, si les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, leurs limites sont à chercher parmi les points fixes de $f \circ f$. On peut alors conclure en utilisant ou bien la contraposée du théorème 4.6 si les limites sont différentes, ou bien la proposition 4.7 si les limites sont identiques.

Remarque 4.23 – Cas particulier où la fonction f est contractante

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle stable de f .

On suppose que la fonction f est **contractante** : il existe $k \in [0, 1[$ tel que :

$$\forall (x, y) \in I \times I, |f(x) - f(y)| \leq k \times |x - y|.$$

On suppose qu'il existe $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$.

On peut montrer que ℓ est unique.

Si ℓ' vérifie $f(\ell') = \ell'$, alors $|\ell - \ell'| = |f(\ell) - f(\ell')| \leq k \times |\ell - \ell'|$. Comme $k \in [0, 1[$, on a : $\ell = \ell'$.

On peut montrer que la suite (u_n) tend vers ℓ .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq k \times |u_n - \ell|$.

Donc, par récurrence (à savoir rédiger rapidement mais proprement), on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq k^n \times |u_0 - \ell|$.

Comme $k \in [0, 1[$, on a $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Connaissant un majorant $M > 0$ de $|u_0 - \ell|$, on peut déterminer un entier n vérifiant $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ où $\varepsilon > 0$.

En effet, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq k^n \times |u_0 - \ell| \leq M \times k^n$.

Il suffit alors d'avoir $k^n \times M \leq \varepsilon$. On résout ensuite l'inéquation : il vient $n \geq \frac{\ln(\frac{\varepsilon}{M})}{\ln(k)}$.

Pour montrer qu'une fonction f est contractante, on peut utiliser le théorème des accroissements finis et vérifier que $|f'|$ est majorée par une constante $k \in [0, 1[$.

I.6. Cas particuliers de suites définies par récurrences**Suites arithmétiques****Définition 4.9 – Suite arithmétique**

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *arithmétique de raison $b \in \mathbb{K}$* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + b$.

 Théorème 4.11**Expression du terme général en fonction de n**

On a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times b$.

Plus généralement, on a : pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0} + (n - n_0) \times b$.

Convergence

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $b = 0$. Dans ce cas, la suite est constante égale à u_0 .

Suites géométriques**Définition 4.10 – Suite géométrique**

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite géométrique de raison $a \in \mathbb{K}$** lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a \times u_n.$$

 Théorème 4.12**Expression du terme général en fonction de n**

On a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times a^n$.

Plus généralement, on a : pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0} \times a^{n-n_0}$.

Convergence

- Lorsque $u_0 = 0$, la suite (u_n) est la suite nulle, donc elle converge vers 0.
- On suppose que $u_0 \neq 0$. Dans ce cas, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $|a| < 1$ ou $a = 1$.
 - Lorsque $|a| < 1$, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
 - Lorsque $a = 1$, la suite est constante égale à u_0 .
 - Lorsque $a > 1$, la suite (u_n) tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de u_0 .
 - Lorsque $a \leq -1$, la suite (u_n) ne possède pas de limite finie ou infinie.

Somme de termes en progression géométrique

- Si $a = 1$, alors, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$, $\sum_{k=m}^n u_k = u_m \times (n - m + 1)$.
- Si $a \neq 1$ alors, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$,

$$\sum_{k=m}^n u_k = u_m \times \frac{1 - a^{n-m+1}}{1 - a} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}.$$

Suites arithmético-géométriques**Définition 4.11 – Suite arithmético-géométrique**

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **arithmético-géométrique de paramètres a et b** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a \times u_n + b$.

**Méthode 4.2 – Étudier une suite arithmético-géométrique**

Pour étudier une suite (u_n) arithmético-géométrique de paramètres $a \neq 1$ et b ,

- on cherche ω tel que $\omega = a \times \omega + b$ et on trouve $\omega = \frac{b}{1-a}$,
- on montre que la suite $(u_n - \omega)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a ,

► on exprime $u_n - \omega$ en fonction de n et on déduit l'expression de u_n en fonction de n .

De plus, pour étudier la limite éventuelle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il suffit de déterminer la limite de $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

💡 Exemple 4.6

Étudions la convergence de la suite définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} \times u_n + 3$.

► On cherche ω tel que $\omega = \frac{1}{2} \times \omega + 3$. Après résolution, on trouve $\omega = 6$.

► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - \omega = \frac{1}{2} \times u_n + 3 - \left(\frac{1}{2} \times \omega + 3 \right) = \frac{1}{2} \times (u_n - \omega).$$

On en déduit que la suite $(u_n - \omega)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

► D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - \omega = \frac{1}{2^n} \times (u_0 - \omega)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \omega + \frac{1}{2^n} \times (u_0 - \omega) = 6 - \frac{4}{2^n} = 6 - \frac{1}{2^{n-2}}.$$

► Or, $0 < \frac{1}{2} < 1$, donc, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 6$.

I.7. Suites implicites



Définition 4.12 – Suite implicite

Une *suite implicite* est une suite dont les termes sont définis comme étant l'unique solution d'une équation.

🔍 Remarque 4.24

On ne saura pas en général exprimer le terme général de la suite en fonction de n .



Exercice 4.6

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^3 + n \times x = 1$ possède une unique solution réelle.
Dans la suite, on note u_n cette unique solution. On définit ainsi une *suite implicite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et déterminer sa monotonie.
- En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ et donner un encadrement de ℓ .
- Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Résolution

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction $f_n : x \mapsto x^3 + n \times x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale) et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_n(x) = 3x^2 + n$.
Lorsque $n \geq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_n(x) \geq n > 0$. Donc, f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Lorsque $n = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'_0(x) = 3x^2 > 0$ et $f'_0(0) = 0$. Donc, f_0 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty$.

D'autre part f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc, par le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (la dernière égalité découle du tableau de variations de f).

Ainsi, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = 1 + n - 1 = n \geq 0$.

Donc, par stricte croissante de f_n , on a : $u_n \in]0, 1]$ (utiliser le tableau de variations de f).

Ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x$.

D'où, avec $x = u_{n+1}$, il vient $f_{n+1}(u_{n+1}) - f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}$.

Or, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ (question 1) et $u_{n+1} \in]0, 1]$ (question 2). Donc, $f_n(u_{n+1}) = -u_{n+1} < 0$.

Or, $f_n(u_n) = 0$, donc par stricte croissante de f , on a $u_{n+1} < u_n$ (utiliser le tableau de variations de f).

Ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

4. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0), donc, par le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \geq 0$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq 1$. Donc, en passant à la limite dans les inégalités, $0 \leq \ell \leq 1$.

5. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^3 + n \times u_n = 1$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1 - u_n^3}{n}$.

Or, $u_n \in]0, 1]$, donc $1 - u_n^3 \in [0, 1]$, puis, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.

D'où, par théorème d'encadrement, la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.



Méthode 4.3 – Études de suites implicites

On considère des fonctions f_n , avec $n \in \mathbb{N}$, définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$

Existence de la suite. Pour montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution réelle notée u_n , on peut utiliser le théorème de la bijection et dresser le tableau de variations de f_n .

Une fois l'unicité de la solution obtenue, on sait que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$.

Caractère borné. Lorsque la fonction f est strictement monotone, pour montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, on peut évaluer f_n en deux points a et b tels que $f_n(a) \times f_n(b) < 0$ (autrement dit, tels que $f_n(a)$ et $f_n(b)$ sont de signes contraires). On pourra alors conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est compris entre a et b .

Monotonie. Lorsque la fonction f est strictement monotone, on peut étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

Existence de la limite. On peut utiliser le théorème de la limite monotone.

Valeur de la limite. On peut utiliser la relation $f_n(u_n) = 0$.

II. Généralités sur les séries numériques

Exercice 4.7 – Pourquoi les séries ?

Pour détruire l'anneau unique, Frodon doit se rendre à la montagne de destin. Celle-ci se trouve à une distance ℓ de la Comté.

Le premier jour de son périple, Frodon parcourt la moitié du chemin. Cependant, le poids de l'anneau sur son porteur ne lui permet de parcourir que la moitié du chemin parcouru la veille.

Remarquant cela, son ami Sam (un mathématicien à ses heures perdues sûrement...) lui dit « à ce rythme, ce voyage va nous prendre une éternité ! »

Quelle est la distance parcourue par Frodon au bout de n jour(s) ? Pouvez-vous expliquer la remarque de Sam ?

Résolution

Le premier jour, Frodon parcourt une distance égale à $\frac{\ell}{2}$.

À cause de l'anneau, il ne parcourt qu'une distance égale à $\frac{\ell}{4} = \frac{\ell}{2^2}$ le deuxième jour.

Jour après jour la distance parcourue est divisée par 2. Le n -ème jour, Frodon parcourt alors une distance égale à $\frac{\ell}{2^n}$.

Depuis le départ, Frodon a parcouru :

$$\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2^2} + \cdots + \frac{\ell}{2^n} = \ell \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2^k} \right) = \frac{\ell}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \ell \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right).$$

Sam sous-entend que le nombre de jour pour arriver est infini, et il n'a pas tort :

$$\ell \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

II.1. Définition



Définition 4.13 – Série, série convergente, somme de série

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

► On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $S_n(u) = \sum_{k=0}^n u_k$. Cette suite est notée $\sum u_n$.

► Lorsque la suite $(S_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie dans $\mathbb{K}$, on dit que la série $\sum u_n$ **converge** et cette limite est appelée la **somme de la série**. On la note $S(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Lorsque la suite $(S_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite finie dans $\mathbb{K}$, on dit que la série $\sum u_n$ **diverge**.

► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est appelé la **somme partielle d'ordre n** , ou **n -ième somme partielle**, de la série.

Remarque 4.25

► Étudier la **nature** d'une série signifie déterminer si la série est convergente ou divergente.

► Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, $(S_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ est simplement notée $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

► Parfois le terme général u_n d'une série n'est défini qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$. L'étude de la série de terme général u_n , notée $\sum_{n \geq n_0} u_n$, est alors l'étude de la suite $(S_n(u))_{n \geq n_0}$ des sommes partielles définies, pour tout

$$n \geq n_0, \text{ par : } S_n(u) = \sum_{k=n_0}^n u_k.$$

Lorsque la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge, sa somme est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Remarque 4.26 – Toute série est une suite, et réciproquement

► La série de terme général u_n est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En conséquence, on peut appliquer les résultats des suites numériques.

► Avec la convention $u_{-1} = 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la série $\sum_{n \geq 0} (u_{n-1} - u_n)$.

Par télescopage, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^n (u_k - u_{k-1})$. Donc, (u_n) est la série $\sum_{n \geq 0} (u_n - u_{n-1})$.

Proposition 4.8

On ne change pas la nature d'une série en changeant un nombre **fini** de ses termes.

Démonstration

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite. Soit $N \in \mathbb{N}$. On considère une suite $(v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \geq N$, $u_n = v_n$.

Pour tout $n \geq N$, on a $S_n(u) - S_n(v) = \sum_{k=0}^{N-1} (u_k - v_k)$.

Comme $\sum_{k=0}^{N-1} (u_k - v_k)$ est une constante, la suite $(S_n(u))$ converge, si, et seulement si, la suite $(S_n(v))$ converge. □

Remarque 4.27

Soit $(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2$ avec $n_0 \geq n_1$. D'après la proposition précédente, les séries $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_1} u_n$ sont de même nature (en cas de convergence, les sommes des deux séries peuvent être différentes).

II.2. Condition nécessaire de convergence

Théorème 4.13

Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Démonstration

Pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$.

Or, (S_n) converge vers S . Donc, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S - S = 0$. □

Remarque 4.28

Cette proposition est souvent utilisée sous sa forme contraposée : si la suite (u_n) ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.

**Définition 4.14 – Série grossièrement divergente**

Lorsque le terme général d'une série ne tend pas vers 0, on dit que cette série **diverge grossièrement** ou qu'elle est **grossièrement divergente**.

Remarque 4.29 – Prudence!

Une série peut très bien être divergente bien que son terme général tende vers 0.

Exemple 4.7 – Série harmonique

On considère la série de terme général h_n défini à partir du rang 1 par $u_n = \frac{1}{n}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on note $H_N = S_N(u)$ et on a :

$$H_{2N} - H_N = \underbrace{\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2N}}_{\text{somme de } N \text{ termes tous supérieurs à } \frac{1}{2N}} \geq \frac{1}{2}.$$

Par l'absurde, supposons que la série $\sum \frac{1}{n}$ converge. On note S sa somme. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, il vient :

$$0 = S - S \geq \frac{1}{2}.$$

Absurde. Ainsi, la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge bien que $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Remarque : de plus, la suite $(S_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, donc par le théorème de la limite monotone, elle tend donc vers $+\infty$.

II.3. Exemples fondamentaux

Séries géométriques



Définition 4.15 – Série géométrique

Soit $q \in \mathbb{K}$. La série $\sum q^n$, de terme général q^n , est appelée *série géométrique* de raison q .

Théorème 4.14

Soit $q \in \mathbb{K}$.

- La série géométrique $\sum q^n$ converge si, et seulement si, $|q| < 1$. De plus, lorsque $|q| < 1$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

- Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Lorsque $|q| < 1$, la série $\sum_{n \geq n_0} q^n$ converge et

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q}.$$

Démonstration

- On sait que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$.

Si $|q| < 1$, alors $\sum_{n=0}^N q^n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-q}$. Donc, la série $\sum q^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ converge.

Si $|q| \geq 1$, alors la suite (q^n) ne tend pas vers 0, donc la série $\sum q^n$ diverge grossièrement.

- On suppose que $|q| < 1$. Pour tout $N \geq n_0$, $\sum_{n=n_0}^N q^n = q^{n_0} \times \frac{1-q^{N-n_0+1}}{1-q} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{q^{n_0}}{1-q}$ (car $|q| < 1$). □

Remarque 4.30

Coup de chance ! Le calcul des sommes partielles était possible.

Séries télescopiques : lien suite-série

Théorème 4.15 – Lien suite-série

Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La série $\sum (w_{n+1} - w_n)$ converge si, et seulement si, la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (w_{n+1} - w_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n - w_0.$$

Démonstration

Par télescopage, on a : pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^N (w_{n+1} - w_n) = w_{N+1} - w_0$. D'où l'équivalence de la proposition. □

 Remarque 4.31

Encore un coup de chance ! Le calcul des sommes partielles était possible.

 Remarque 4.32

Quitte à effectuer un glissement d'indice, on peut énoncer le théorème sous la forme suivante : la série $\sum (w_n - w_{n-1})$ converge si, et seulement si, la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

 Exercice 4.8

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \times (n-1)}$.

Résolution

Pour tout $k \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \times (k-1)} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Donc, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \times (n-1)}$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \times (n-1)} = 1$.

 Exercice 4.9

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$.

Résolution

Pour tout $k \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc, la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ diverge.

Remarque : on peut répondre à la question en utilisant les théorèmes de comparaison des séries à terme général positif donnés plus loin.

Série exponentielle **Théorème 4.16**

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Démonstration

 **Astuce intéressante.** Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé. On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto e^{z \times t}$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$. Donc, par la formule de Taylor avec reste intégral, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(1) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \times f^{(n+1)}(t) dt$$

Or, $f(1) = e^z$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(t) = z^k e^{z \times t}$. Donc,

$$e^z = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \times z^{n+1} \times e^{z \times t} dt.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \times z^{n+1} \times e^{z \times t} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{|1-t|^n}{n!} \times |z|^{n+1} \times |e^{z \times t}| dt$$

Or, $|e^{z \times t}| = e^{\operatorname{Re}(z \times t)} = e^{t \times \operatorname{Re}(z)}$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $t \times \operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)|$.

Donc, par croissance de l'intégrale,

$$\left| \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \times z^{n+1} \times e^{z \times t} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{1}{n!} \times |z|^{n+1} \times e^{t \times \operatorname{Re}(z)} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{n!} \times |z|^{n+1} \times e^{|\operatorname{Re}(z)|} dt \leq |z|^{n+1} \times e^{|\operatorname{Re}(z)|} \times \frac{1}{n!}.$$

Or, par croissance comparée, $z^{n+1} = o(n!)$, donc $\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \times z^{n+1} \times e^{z \times t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

D'où, par théorème,

$$\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^z.$$

Remarque 4.33 – Pour la culture

Il s'agit là de la définition usuelle de la fonction exponentielle.

II.4. Propriétés élémentaires

Théorème 4.17 – Linéarité de la somme

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la série $\sum (\lambda \times u_n + \mu \times v_n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda \times u_n + \mu \times v_n) = \lambda \times \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration

Conséquence des propriétés sur les sommes finies et des opérations sur les limites. □

Remarque 4.34 – Algèbre linéaire

L'ensemble F des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u_n$ converge est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. De plus, l'application

$$\begin{aligned} F &\rightarrow \mathbb{K} \\ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto S(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{aligned}$$

est une forme linéaire.

Proposition 4.9

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, les séries $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$

convergent. Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_n).$$

Démonstration

Conséquence des propriétés sur les sommes et des opérations sur les limites. □



Définition 4.16 – Reste d'une série

Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum u_n$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le **reste d'ordre n** de la série par :

$$R_n(u) = S(u) - S_n(u) \stackrel{\text{Notation}}{=} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$



Proposition 4.10

Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum u_n$ converge. Alors, la suite $(R_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Démonstration

Conséquence de la définition de convergence d'une série. □



Proposition 4.11

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Alors,

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(u) \leq S_n(v)$
2. De plus, si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Démonstration

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [0, n]$, on a $u_k \leq v_k$. Donc, en sommant les inégalités, $S_n(u) \leq S_n(v)$.
2. Passage à la limite dans l'inégalité du premier point. □

III. Séries à termes positifs

Dans cette partie, on s'intéresse aux séries dont le terme général est positif ou nul.

III.1. Généralités

Théorème 4.18

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite **à termes positifs ou nuls**. Alors,

- ou bien, la série $\sum u_n$ converge.
- ou bien, la suite des sommes partielles $(S_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Dans ce cas, la série $\sum u_n$ diverge et on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_{n+1}(u) - S_n(u) = u_{n+1} \geq 0$.

Donc, la suite $(S_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Le théorème est alors une conséquence du théorème de la limite monotone. □

Remarque 4.35

Lorsqu'une série $\sum u_n$ **à termes positifs ou nuls** converge, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Autrement dit, chaque somme partielle est inférieure ou égale à la somme de la série.

Théorème 4.19

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite **à termes positifs ou nuls**.

La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la suite des sommes partielles $(S_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

Démonstration

Comme dans le théorème précédent, on montre que la suite $(S_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Par le théorème de la limite monotone, on a : $(S_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $(S_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ est majoré. □

III.2. Théorèmes de comparaison

Remarque 4.36

La nature d'une série ne change pas si on modifie un nombre fini de ses termes. Dans les démonstrations de ce paragraphe, on pourra supposer les hypothèses des propositions vraies à partir du rang 0.

Théorème 4.20 – Théorème de comparaison des séries à termes positifs

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang n_0 , on a :

$$0 \leq u_n \leq v_n.$$

- Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge. De plus, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.
- Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

Démonstration

On ne change pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de ses termes : on peut alors supposer l'hypothèse de l'énoncé vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En sommant les inégalités $u_k \leq v_k$, avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a : $S_n(u) \leq S_n(v)$ (*).

► Supposons la série à termes positifs $\sum v_n$ convergente. Alors, par le théorème 4.19 la suite $(S_n(v))$ est majorée.

Donc, d'après (*), la suite $(S_n(u))$ est majorée, puis par le théorème 4.19, la série à termes positifs $\sum u_n$ converge.

► Supposons la série à termes positifs $\sum u_n$ divergente. Alors, par le théorème 4.19 la suite $(S_n(u))$ tend vers $+\infty$.

Donc, par (*) et théorème de comparaison, la suite $(S_n(v))$ tend vers $+\infty$. Donc, la série à termes positifs $\sum v_n$ diverge. $\square$



Exercice 4.10

Soit $\alpha \leq 1$. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

Résolution

Pour tout $n \geq 1$, on a $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$.

Or, la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Donc, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.



Théorème 4.21 – Théorème de comparaison des séries à termes positifs

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs à partir d'un certain rang et telles que $u_n = O(v_n)$.

- Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

Démonstration

On sait que $u_n = O(v_n)$, donc il existe $C > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq C \times v_n$.

Comme $C > 0$ est une constante, la série $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\sum C \times v_n$ converge.

Il suffit alors d'appliquer la proposition précédente. $\square$



Théorème 4.22 – Théorème de comparaison des séries à termes positifs

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs à partir d'un certain rang et telles que $u_n = o(v_n)$.

- Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

Démonstration

On a $u_n = o(v_n)$, donc $u_n = O(v_n)$. Il suffit d'appliquer la proposition précédente. $\square$



Exercice 4.11

Déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{2^{n^2}}$.

Résolution

On a $\frac{1}{2^{n^2}} = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$. De plus, la série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$ converge (car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$) et les séries $\sum \frac{1}{2^n}$ et $\sum \frac{1}{2^{n^2}}$ sont à termes positifs. Donc, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{2^{n^2}}$ converge.

Remarque 4.37

Pour appliquer les résultats précédents, il faut avoir une intuition quant à la nature de la série étudiée.

- Pour montrer la convergence de la série $\sum u_n$, on cherchera à majorer son terme général u_n pour n assez grand.
- Pour montrer la divergence de la série $\sum u_n$, on cherchera à minorer son terme général u_n pour n assez grand.

Théorème 4.23 – Théorème de comparaison des séries à termes positifs

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n \sim v_n$. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **ou** $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de signe constant à partir d'un certain rang.

La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum v_n$ converge.

Démonstration

Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$. Il suffit d'appliquer la proposition précédente. □

Exercice 4.12

Déterminer la nature de la série $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Résolution

On a $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ car $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

La série $\sum \frac{1}{n}$ est à termes positifs et diverge.

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.

Remarque 4.38

Pour étudier la nature d'une série $\sum u_n$ en appliquant la proposition précédent, on cherche d'abord un équivalent simple $u_n \sim v_n$, on vérifie que la suite (v_n) est de signe constant à partir d'un certain rang, puis on étudie la convergence de la série $\sum v_n$.

III.3. Théorème de comparaison aux séries géométriques : la règle de D'Alembert**Théorème 4.24 – Théorème de comparaison aux séries géométriques**

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs à partir d'un certain rang.

- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in [0, 1[$, alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in]1, +\infty[\cup \{+\infty\}$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

► Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ ou si la limite n'existe pas, alors on ne peut pas conclure quand à la convergence de la série $\sum u_n$.

Démonstration

► Supposons dans un premier temps que ℓ est réel. Par hypothèse,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \underbrace{\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right|}_{\iff \ell - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon} \leq \varepsilon.$$

- Cas 1 : $\ell \in [0, 1[$.

Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon + \ell \in]0, 1[$: c'est possible car $\ell \in]0, 1[$ (par exemple $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$).

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon$. Comme (u_n) est à termes strictement positifs, on a : $\forall n \geq N, u_{n+1} \leq (\ell + \varepsilon) \times u_n$.

On montre alors (par récurrence) que :

$$\forall n \geq N, u_n \leq (\ell + \varepsilon)^{n-N} \times u_N \leq (\ell + \varepsilon)^n \times \frac{u_N}{(\ell + \varepsilon)^N}.$$

Or $\varepsilon + \ell \in]0, 1[$, donc la série géométrique $\sum_{n \geq N} (\ell + \varepsilon)^n$ converge. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.

- Cas 2 : $\ell \in]1, +\infty[$.

Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\ell - \varepsilon > 1$: c'est possible car $\ell > 1$ (par exemple $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2}$).

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\ell - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Comme (u_n) est à termes strictement positifs, on a : $\forall n \geq N, u_n \times (\ell - \varepsilon) \leq u_{n+1}$.

On montre alors (par récurrence) que :

$$\forall n \geq N, u_N \times (\ell - \varepsilon)^{n-N} \leq u_n$$

Or $\ell - \varepsilon > 1$, donc la série géométrique $\sum_{n \geq N} (\ell - \varepsilon)^n$ diverge. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ diverge.

► On traite maintenant le cas $\ell = +\infty$. Dans ce cas,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1.$$

Autrement dit, la suite (u_n) est croissante à partir du rang N . Donc, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N$. Or $u_N > 0$, donc la suite (u_n) ne peut pas tendre vers 0. Par conséquent, la série $\sum u_n$ diverge.

► La série à termes strictement positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et $\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

La série à termes strictement positifs $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \times (n-1)}$ converge et $\frac{\frac{1}{(n+1) \times n}}{\frac{1}{n \times (n-1)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Lorsque $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ ou si la limite n'existe pas, alors on ne peut pas conclure quant à la nature de la série $\sum u_n$. □



Exercice 4.13

Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$.

Résolution

Pour tout $n \geq 1$, on note $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

Pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$ et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \in [0, 1[.$$

Donc, par le critère de d'Alembert, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$ converge.

III.4. Comparaison série-intégrale



Exercice 4.14

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ positive, continue et décroissante.

1. Représenter le graphe d'une telle fonction f . Sur l'axe des abscisses, faire apparaître n_0 , n , un entier supérieur ou égal à n_0 et $n+1$.
2. Soit un entier $n \geq n_0$. Comparer l'aire $\int_n^{n+1} f(t) dt$ et l'aire du rectangle défini par les points $A(n, 0)$, $B(n, f(n))$, $C(n+1, f(n))$ et $D(n+1, 0)$.
3. Soit un entier $n \geq n_0 + 1$. En utilisant la même idée que dans la question précédente, montrer que :

$$f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt.$$
4. Montrer que

$$\forall n \geq n_0, \int_{n_0}^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n_0}^n f(k) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^n f(t) dt.$$

Résolution

🏆 Exercice 4.15 – Classique (méthode à retenir)

Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

Résolution

En appliquant la méthode précédente (avec $n_0 = 1$ et $f : t \mapsto \frac{1}{t}$), on a :

$$\forall n \geq 1, \quad \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t} dt.$$

$$\text{Or, } \int_1^n \frac{1}{t} dt = \ln(n) \text{ et } \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt = \ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

D'où, pour tout $n \geq 2$,

$$1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \leq \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

Or, $1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $1 + \frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Donc, par théorème d'encadrement, $\frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
Ainsi,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n).$$

📋 Méthode 4.4 – À quoi sert une comparaison série/intégrale ?

Sous certaines conditions, une comparaison série/intégrale permet de :

1. encadrer les sommes partielles d'une série pour :
 - a. étudier la nature de la série ;
 - b. lorsque la série diverge, donner un équivalent de la suite des sommes partielles.
2. encadrer les restes d'une série convergente.

III.5. Séries de Riemann

⚙️ Théorème 4.25

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée **série de Riemann**.

Cette série converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Démonstration

- Soit $\alpha \in]-\infty, 0]$. Dans ce cas, la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ne tend pas vers 0, donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.
- Soit $\alpha > 0$. En utilisant la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ positive, décroissante et continue sur $[1, +\infty[$, une comparaison série/intégrale donne :

$$\forall n \geq 1, \quad \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt.$$

Or,

$$\int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \times \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(n) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \times \left(1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(n+1) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

- Si $\alpha > 1$, alors $0 \leq \frac{1}{\alpha-1} \times \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leq \frac{1}{\alpha-1}$. Donc, la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est majorée.

Par théorème, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

• Si $\alpha \leq 1$, alors $\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc, par comparaison, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$. □



Exercice 4.16

Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$.

Résolution

On a : $\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2}$.

Or, la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$ converge.



Exercice 4.17 – Constante d'Euler (classique)

Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ converge.

Remarque : la limite de la suite est notée γ et est appelée *constante d'Euler*. On a : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Résolution

Par la relation suite-série, il suffit de montrer que la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Or, pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Or,

$$u \times \frac{1}{1+u} - \ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u \times (1-u) - u + \frac{u^2}{2} + o(u^2) \underset{u \rightarrow 0}{=} -\frac{u^2}{2} + o(u^2) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc, par substitution,

$$u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

On en déduit que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est de signe constant à partir d'un certain rang. De plus, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Donc, par théorème de comparaison, la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Ainsi, la suite (u_n) converge.



Exercice 4.18

- Soit $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent simple de la suite de terme général $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
- Soit $\alpha \in]0, 1[$. Déterminer un équivalent simple de la suite de terme général $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

Résolution

- À faire en classe.

2. On reprend la comparaison série intégrale faite en classe pour montrer la divergence de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. On a :

$$\forall n \geq 1, \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt.$$

Or,

$$\int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha-1} \times \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{1-\alpha} \times (n^{1-\alpha} - 1) \quad \text{et} \quad \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha-1} \times \left(1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{1-\alpha} \times ((n+1)^{1-\alpha} - 1).$$

Donc, comme $\alpha \in]0, 1[$,

$$\forall n \geq 1, \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-\alpha} - \frac{1}{n^{1-\alpha}}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1} \leq \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}}{\frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}} \leq \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}} + 1 - \frac{1}{n^{1-\alpha}}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}.$$

Donc, par théorème d'encadrement,

$$\frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}}{\frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}.$$

IV. Séries absolument convergentes

On rappelle que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.



Définition 4.17 – Série absolument convergente

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On dit que la série $\sum u_n$ **converge absolument**, lorsque la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.



Exemple 4.8

Soit $q \in \mathbb{C}$. La série $\sum q^n$ converge absolument si, et seulement si, $|q| < 1$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument.



Théorème 4.26 – La convergence absolue implique la convergence d'une série

Si une série converge absolument, alors elle converge.

Démonstration

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente.

Cas 1 : on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}$.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ = \max(0, u_n)$ et $u_n^- = \max(0, -u_n)$.

Les suites (u_n^+) et (u_n^-) vérifient : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$.

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_n^+ - u_n^-$. Donc, par opération sur les séries convergentes, la série $\sum u_n$ converge.

Cas 2 : cas général. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \operatorname{Re}(u_n) + i \operatorname{Im}(u_n)$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n|$ et $0 \leq |\operatorname{Im}(u_n)| \leq |u_n|$.

De plus, on sait que la série $\sum u_n$ converge absolument.

Par comparaison des séries à termes positifs, $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ converge absolument et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ converge absolument.

Ces séries sont à termes réels, donc, par le cas 1, les séries $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ convergent.

Donc, la série $\sum u_n$ converge. □

Remarque 4.39 – Prudence !

La réciproque du théorème précédent est fausse !

Contre-exemple : la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

► On a : pour tout $n \geq 1$, $\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \frac{1}{n}$. Or la série harmonique diverge, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ne converge pas absolument.

► Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1} dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^n (-t)^{k-1} dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt.$$

$$\text{Donc, } \left| \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt \right| = \left| \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt \leq \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{Or, } \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \text{ Donc, par théorème d'encadrement, } \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(2).$$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et sa somme vaut $\ln(2)$.

Lorsqu'une série converge mais n'est pas absolument convergente, alors on dit qu'elle est **semi-convergente**.

Théorème 4.27 – Inégalité triangulaire généralisée

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Démonstration

Par inégalité triangulaire, on a : pour tout $n \geq 0$, $\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |u_k|$.

La série, $\sum u_n$ converge absolument, donc, converge.

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient l'inégalité voulue. □

Proposition 4.12

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\sum (\lambda \times u_n + \mu \times v_n)$ converge absolument et

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda \times u_n + \mu \times v_n) \right| \leq |\lambda| \times \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| + |\mu| \times \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|.$$

Démonstration

Par hypothèse, les séries $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ convergent, donc la série $\sum (|\lambda| \times |u_n| + |\mu| \times |v_n|)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (|\lambda| \times |u_n| + |\mu| \times |v_n|) = |\lambda| \times \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| + |\mu| \times \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|.$$

Or, par inégalité triangulaire, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |\lambda \times u_n + \mu \times v_n| \leq |\lambda| \times |u_n| + |\mu| \times |v_n|$.

D'où, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum (\lambda \times u_n + \mu \times v_n)$ converge absolument et

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda \times u_n + \mu \times v_n) \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (|\lambda| \times |u_n| + |\mu| \times |v_n|).$$

□

Remarque 4.40 – Algèbre linéaire

L'ensemble F des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u_n$ est absolument convergente est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Théorème 4.28

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à **termes positifs** à partir d'un certain rang telles que $u_n = O(v_n)$.

Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.

Démonstration

Comme $u_n = O(v_n)$, il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq C \times v_n$. Autrement dit, $|u_n| = O(v_n)$.

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge, donc la série $\sum u_n$ converge absolument, donc converge. $\square$

Remarque 4.41

Le théorème précédent s'applique en particulier lorsqu'on a, à partir d'un certain rang, $|u_n| \leq v_n$ avec $\sum v_n$ qui converge.

Théorème 4.29

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes positifs à partir d'un certain rang telles que $u_n = o(v_n)$.

Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.

Démonstration

Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = O(v_n)$ et il suffit d'appliquer le théorème précédent. $\square$

Théorème 4.30

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes positifs à partir d'un certain rang telles que $|u_n| \sim v_n$.

La série $\sum v_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge absolument.

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème de comparaison des séries à termes positifs. $\square$

Exemple 4.9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left| \frac{e^{in}}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$.

Or, la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in}}{n^2}$ converge absolument, donc converge.

Remarque 4.42 – Prudence !

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ peuvent être de nature différente bien que $u_n \sim v_n$.

Contre-exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

► Montrons que la série $\sum u_n$ converge. On remarque une série télescopique.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^N u_n = \frac{(-1)^{N+1}}{\sqrt{N+1}} + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Donc, la série $\sum u_n$ converge.

► Montrons que la série $\sum v_n$ diverge.

La série $\sum v_n$ est la somme de la série convergente $\sum u_n$ et de la série divergente $\sum \frac{1}{n}$, donc $\sum v_n$ diverge.

► Montrons que $u_n \sim v_n$.

On a $|u_n| = \left| (-1)^{n+1} \times \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \right)$.

D'où, $|u_n| \sim \frac{2}{\sqrt{n}}$. **On remarque au passage que $\sum u_n$ ne converge pas absolument.**

On en déduit que $\frac{1}{n} = o(u_n)$. D'où, $v_n = u_n + \frac{1}{n} = u_n + o(u_n) \sim u_n$.

V. Critère spécial des séries alternées

🔗 Théorème 4.31 – Critère spécial des séries alternées

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Alors,

- La série $\sum (-1)^n u_n$ converge.
- Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=m}^{+\infty} (-1)^n u_n$ est du signe de $(-1)^m$ et $\left| \sum_{n=m}^{+\infty} (-1)^n u_n \right| \leq u_m$.

Démonstration

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$. Montrons que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1} = \underbrace{-u_{2n+3} + u_{2n+2}}_{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante}} \geq 0.$$

La suite (S_{2n+1}) est croissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = \underbrace{u_{2n+2} - u_{2n+1}}_{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante}} \leq 0.$$

La suite (S_{2n}) est décroissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Par théorème, elles convergent vers la même limite.

Les sous-suites des termes d'indice pair et impair de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Donc, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Ainsi, la série $\sum u_n$ converge.

Comme les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ (suite décroissante) et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ (suite croissante) sont adjacentes et convergent vers $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. On a $\sum_{n=m}^{+\infty} (-1)^n u_n = S - S_{m-1}$.

- Cas 1 : $m = 2p + 1$ est impair. On a : $\sum_{n=2p+1}^{+\infty} (-1)^n u_n = S - S_{2p}$.

Or, $S_{2p+1} \leq S \leq S_{2p}$.

En retranchant S_{2p} , on a : $-u_{2p+1} = S_{2p+1} - S_{2p} \leq \sum_{n=2p+1}^{+\infty} (-1)^n u_n \leq 0$.

Donc, $\sum_{n=2p+1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ est négatif, donc est du signe de $(-1)^{2p+1} = -1$. De plus, comme $u_{2p+1} \geq 0$, on a $\left| \sum_{n=2p+1}^{+\infty} (-1)^n u_n \right| \leq u_{2p+1}$.

- Cas 2 : $m = 2p$ est pair. On a : $\sum_{n=2p}^{+\infty} (-1)^n u_n = S - S_{2p-1}$.

Or, $S_{2p-1} \leq S \leq S_{2p}$.

En retranchant S_{2p-1} , on a : $0 \leq \sum_{n=2p}^{+\infty} (-1)^n u_n \leq S_{2p} - S_{2p-1} = u_{2p}$.

Donc, $\sum_{n=2p}^{+\infty} (-1)^n u_n$ est positif, donc est du signe de $(-1)^{2p} = 1$. De plus, comme $u_{2p} \geq 0$, on a $\left| \sum_{n=2p}^{+\infty} (-1)^n u_n \right| \leq u_{2p}$.

Dans les deux cas, $\sum_{n=m}^{+\infty} (-1)^n u_n$ est du signe de $(-1)^m$ et $\left| \sum_{n=m}^{+\infty} (-1)^n u_n \right| \leq u_m$. □

**Exercice 4.19**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$.

Résolution

► Cas 1 : $\alpha > 1$. Dans ce cas $\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \right| = \frac{1}{n^\alpha}$ et on reconnaît le terme général d'une série de Riemann convergente ($\alpha > 1$).

La série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ converge absolument donc converge.

► Cas 2 : $\alpha \in]0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \times u_n = -\frac{1}{n^\alpha} \leq 0$ et la suite $(|u_n|)$ est décroissante et tend vers 0.

Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ converge.

Remarque : la série ne converge pas absolument (la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in]0, 1]$ diverge).

► Cas 3 : $\alpha \leq 0$. La suite $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \right)$ ne tend pas vers 0. Donc, la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

Ainsi,

La série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$.

VI. Produit de Cauchy de deux séries



Définition 4.18 – Produit de Cauchy

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries numériques.

Le **produit de Cauchy** des deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ est la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ avec :

$$\forall n \geq 0, \quad w_n = \sum_{p+q=n} u_p \times v_q = \sum_{k=0}^n u_k \times v_{n-k} = \sum_{k=0}^n u_{n-k} \times v_k.$$

Remarque 4.43

Lorsque le terme général d'une série n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0 , on posera $u_n = 0$, pour tout $n \in \llbracket 0, n_0 - 1 \rrbracket$, pour se ramener à la définition précédente.



Théorème 4.32

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries numériques.

Si les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ convergent absolument, alors la série $\sum_{n \geq 0} \sum_{p+q=n} u_p \times v_q$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} u_p \times v_q \right) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p \right) \times \left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q \right).$$

Démonstration

Admis

Exemple 4.10

Soit $x \in]-1, 1[$. La série $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge absolument. Donc, par le théorème précédent,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n (x^k \times x^{n-k}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \times x^n.$$

Or, on sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Donc,

$$\forall x \in]-1, 1[, \left(\frac{1}{1-x} \right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \times x^n.$$

Exemple 4.11 – Exemple fondamental

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

On sait que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument, donc, par le théorème précédent,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_1^n}{n!} \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_2^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{z_1^k \times z_2^{n-k}}{k! \times (n-k)!} \right).$$

Par la formule du binôme de Newton, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{z_1^k \times z_2^{n-k}}{k! \times (n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k \times z_2^{n-k} = \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!}.$$

Donc,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_1^n}{n!} \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_2^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1 + z_2}.$$

❗ Remarque 4.44 – Prudence !

L'hypothèse « les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ convergent absolument » est fondamentale.

Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $u_0 = v_0 = 0$.

En appliquant le critère spécial des séries alternées, on montre que les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ convergent. Par

contre, elles ne convergent pas absolument ($\sum_{n \geq 0} |u_n|$ est une série de Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$).

Considérons $\sum_{n \geq 0} w_n$ le produit de Cauchy des séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k \times v_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \times \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}} = (-1)^n \times \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k} \times (n-k)}.$$

Or, pour tout $n > 1$ et $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $k \leq n-1$ et $n-k \leq n-1$, d'où, $\frac{1}{\sqrt{k} \times (n-k)} \geq \frac{1}{\sqrt{(n-1)^2}} \geq \frac{1}{n-1}$.

D'où, pour tout $n > 1$, $|w_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k} \times (n-k)} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-1} \geq 1$.

Donc, la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas 0. Donc, la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ diverge grossièrement.

VII. Formule de Stirling

Théorème 4.33

On l'équivalent :

$$n! \sim \sqrt{2n \times \pi} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$



Exercice 4.20 – Démonstration de la formule de Stirling

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \times \sqrt{2\pi \times n}} \quad \text{et} \quad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$

Partie 1 : Étude de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$

- Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n existe et $v_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
- Rappeler le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$.
- En déduire que $v_n \sim -\frac{1}{12n^2}$, puis que la série $\sum v_n$ converge.
- Montrer que la suite $(\ln(u_n))_{n \geq 1}$ converge et en déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers une limite $\ell > 0$. Justifier alors que :

$$n! \sim \ell \times \sqrt{2\pi \times n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Il reste maintenant à déterminer la valeur de ℓ . Pour cela, on utilise les intégrales de Wallis.

Partie 2 : Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n dx.$$

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \times I_n$.
- En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p+1} \times (p!)^2} \times \pi.$$

- Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$

- Montrer que la suite $((n+1) \times I_{n+1} \times I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
- Déduire des questions précédentes que :

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Partie 3 : Valeur de ℓ

- Montrer que :

$$\frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi \times n}}.$$

- En déduire la valeur de ℓ et donner un équivalent de $n!$.

Résolution

1. ► Pour tout $n \geq 1$, le dénominateur et le numérateur de u_n sont strictement positifs. Donc u_n existe et $u_n > 0$.
Or la fonction $\ln$ est définie sur $]0, +\infty[$. Donc,

Pour tout $n \geq 1$, v_n existe.

► Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \times \sqrt{2\pi \times (n+1)}} \times \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \times \sqrt{2\pi \times n}}{n!} = e \times (n+1) \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \times \frac{1}{n+1} \times \sqrt{\frac{n}{n+1}} = e \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} = e \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n-\frac{1}{2}} = e \times \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n-\frac{1}{2}}}_{>0}.$$

Donc, par propriétés de $\ln$,

$$v_n = \ln(e) + \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n-\frac{1}{2}}\right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Ainsi,

$$\text{Pour tout } n \geq 1, v_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

2. On a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3).$$

3. On sait que $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

D'où,

$$v_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi,

$$v_n \sim -\frac{1}{12n^2}$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$.)

D'où, la série $\sum -\frac{1}{12n^2}$ converge et son terme général est de signe constant.

Donc, par théorème de comparaison,

la série $\sum v_n$ converge.

4. Toute suite est une série. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(u_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \ln(u_1) + \sum_{k=1}^{n-1} v_k.$$

Or, la série $\sum v_k$ converge. Donc, par définition, la suite des sommes partielles, $\left(\sum_{k=1}^{n-1} v_k\right)_{n \geq 1}$ converge vers $\sum_{k=1}^{+\infty} v_k$.

Donc, par opération sur les limites,

$$\text{La suite } (\ln(u_n))_{n \geq 1} \text{ converge vers } \lambda = \ln(u_1) + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k.$$

Or, la fonction $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc,

$$\text{la suite } (u_n)_{n \geq 1} \text{ converge vers } \ell = e^\lambda > 0.$$

Comme $\ell \neq 0$, on a $u_n \sim \ell$, en remplaçant u_n par sa définition, par opérations sur les équivalents, il vient :

$$n! \sim \ell \times \sqrt{2\pi n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \times (\sin(x))^{n+1} dx$.

On pose, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $u(x) = (\sin(x))^{n+1}$ et $v(x) = -\cos(x)$.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $u'(x) = (n+1) \times \cos(x) \times (\sin(x))^n$ et $v'(x) = \sin(x)$.

D'où, par intégration par parties,

$$I_{n+2} = \left[-\cos(x) \times (\sin(x))^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1) \times (\cos(x))^2 \times (\sin(x))^n dx.$$

Or, $\cos^2 = 1 - \sin^2$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = (\sin(0))^{n+1} = 0$ (car $n+1 > 0$).

Donc, par linéarité de l'intégrale,

$$I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n - (\sin(x))^{n+2} dx = (n+1) \times I_n - (n+1) \times I_{n+2}.$$

D'où, $(n+2) \times I_{n+2} = (n+1) \times I_n$.

Ainsi $(n+2 \neq 0)$,

$$\text{Pour tout } n \geq 0, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \times I_n.$$

6. On procède par récurrence. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_p : \ll I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p+1} \times (p!)^2} \times \pi \gg$.

Initialisation. $p = 0$. On a $\frac{0!}{2^1 \times (0!)^2} \times \pi = \frac{\pi}{2}$.

De plus, $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$.

Donc, $\mathcal{H}_0$.

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{H}_p$ et on montre $\mathcal{H}_{p+1}$.

Par la question 5, on a :

$$I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} \times I_{2p}.$$

D'où, par hypothèse de récurrence,

$$I_{2(p+1)} = \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p+1} \times (p!)^2} \times \pi = \frac{(2p+2)!}{(2p+2)^2 \times 2^{2p+1} \times (p!)^2} \times \pi = \frac{(2p+2)!}{2^2 \times (p+1)^2 \times 2^{2p+1} \times (p!)^2} \times \pi = \frac{(2(p+1))!}{2^{2(p+1)+1} \times ((p+1)!)^2} \times \pi.$$

Donc $\mathcal{H}_{p+1}$. Ce qui achève la récurrence.

$$\text{Pour tout } p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p+1} \times (p!)^2} \times \pi.$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin(x) \leq 1$, donc $(\sin(x))^{n+1} \leq (\sin(x))^n$.

Par croissance de l'intégrale, il vient $I_{n+1} \leq I_n$. Donc,

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\sin^n$ est continue et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et n'est pas la fonction nulle, donc $I_n > 0$.

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.

De plus, par la question 5. et décroissance de (I_n) , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n+2} \times I_n = I_{n+2} \leq I_{n+1}$.

Donc, $\frac{I_{n+1}}{I_n} \geq \frac{n+1}{n+2}$. Ainsi,

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la question 5.,

$$(n+2) \times I_{n+2} \times I_{n+1} = (n+2) \times \frac{n+1}{n+2} \times I_n \times I_{n+1} = (n+1) \times I_{n+1} \times I_n.$$

Donc,

la suite $((n+1) \times I_{n+1} \times I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

9. De la question 8., on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1) \times I_{n+1} \times I_n = I_1 \times I_0$.

Or, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = \cos(0) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

D'où, $\boxed{\text{pour tout } n \geq 0, (n+1) \times I_{n+1} \times I_n = \frac{\pi}{2} \neq 0}$.

De plus, de la question 7. et du théorème d'encadrement que, il vient : $\frac{I_{n+1}}{I_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc $\boxed{I_{n+1} \sim I_n}$.

Donc, comme $n+1 \sim n$, on a : $\underbrace{(n+1) \times I_{n+1} \times I_n}_{= \frac{\pi}{2}} \sim n \times I_n^2$.

D'où, $n \times I_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \geq 0$.

Comme la fonction $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $I_n \geq 0$, on a : $\sqrt{n} \times I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \neq 0$.

Ainsi,

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

10. D'après la question 6., on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2} = \frac{2}{\pi} \times I_{2n}.$$

D'où, par la question 9., $\frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2} \sim \frac{2}{\pi} \times \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$. Ainsi,

$$\frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi \times n}}.$$

11. D'après la question 4., $n! \sim \ell \times \sqrt{2\pi \times n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

D'où,

$$\frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2} \sim \frac{\ell \times \sqrt{2\pi \times 2n} \times \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n} \times \ell^2 \times 2\pi \times n \times \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \sim \frac{1}{\ell \times \sqrt{\pi \times n}}.$$

Ainsi, par transitivité de la relation d'équivalence, $\frac{1}{\sqrt{\pi \times n}} \sim \frac{1}{\ell \times \sqrt{\pi \times n}}$.

Donc,

$$\ell = 1.$$

Ainsi,

On a démontré la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi \times n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

VIII. Annexe

VIII.1. À la fin de ce chapitre,...

1. ... je sais étudier les suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques ;
2. ... je sais reconnaître une somme de terme en progression géométrique ;
3. ... je sais étudier les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$;
4. ... je connais la forme du terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ;
5. ... je connais le théorème de la limite monotone et le théorème des suite adjacentes ;
6. ... je sais étudier les suites implicites ;
7. ... je sais faire la différence entre convergence et convergence absolue d'une série numérique ;
8. ... je connais la nature des séries de référence (Riemann, exponentielle, géométrique) ;
9. ... les théorèmes de comparaison et leur contraposée n'ont plus de secret pour moi ;
10. ... je sais utiliser une comparaison série-intégrale ;
11. ... je sais utiliser le critère spécial des séries alternées ;
12. ... j'ai compris qu'un produit de Cauchy ressemble à un produit de polynômes.