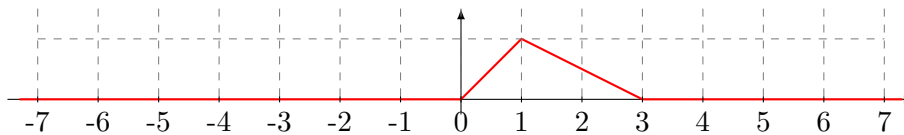


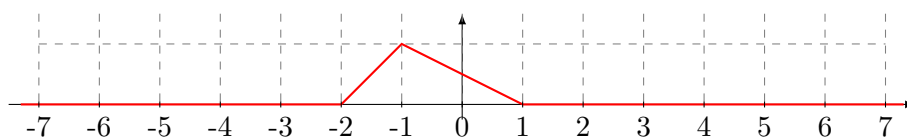
1 Rappel mathématique : composition de fonctions

On considère la fonction f définie sur le graphique suivant :



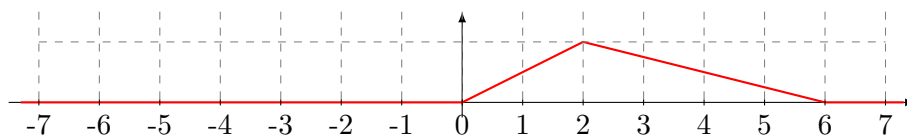
Tracer les graphiques des fonctions composées suivantes :

— $f_1 : x \mapsto f(x+2)$



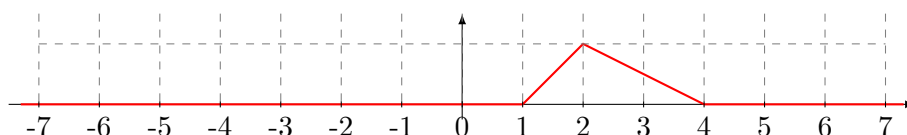
C'est le graphique de f décalé de 2 vers la gauche.

— $f_2 : x \mapsto f(x/2)$



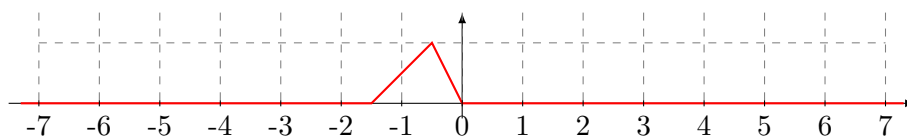
C'est le graphique de f agrandi d'un facteur 2.

— $f_3 : x \mapsto f(x-1)$



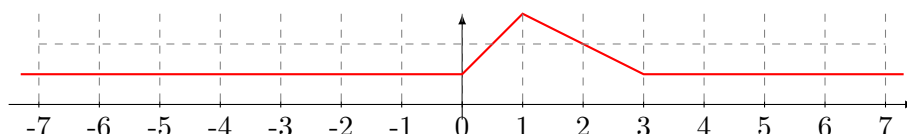
C'est le graphique de f décalé de 1 vers la droite.

— $f_4 : x \mapsto f(-2x)$



C'est le graphique de f en miroir et comprimé d'un facteur 2.

— $f_5 : x \mapsto f(x) + 0,5$



C'est le graphique de f décalé de 0,5 vers le haut.

2 Ondes progressive unidimensionnelle

2.1 Définition et exemples

Définition. Une **perturbation** est une modification locale et temporaire des propriétés d'un milieu.

Une fois la perturbation créée, elle peut se propager dans le milieu de proche en proche : chaque point va subir des modifications temporaires similaires à celle de la source. Après le passage de cette perturbation, chaque point retrouve sa position initiale.

Définition. On appelle **onde** la propagation d'une perturbation, dans un milieu matériel ou dans le vide.

Exemple

- ▷ Lorsqu'un ébranlement est produit à une extrémité d'une corde tendue (**perturbation**), les positions des différents points sont modifiées. Une fois l'onde passée, les points retrouvent leur position initiale.
- ▷ Si l'on jette un caillou dans un lac (**perturbation**), il se forme des rides qui s'éloignent progressivement du point d'impact, mais il n'y a pas de mouvement d'ensemble du fluide.
- ▷ Lorsque la membrane d'un haut-parleur se déplace (**perturbation**), elle provoque une brève compression-dilatation de l'air qui la touche. Cette perturbation se déplace ensuite dans l'air : ce sont les ondes sonores. Elles peuvent aussi se déplacer dans les liquides et dans les solides.
- ▷ La marée à l'entrée d'un canal constitue une perturbation. Celle-ci peut se propager et donner naissance à un mascaret, une onde qui se propage sur de grandes distances en se déformant très peu.
- ▷ La rupture d'une plaque tectonique génère une contrainte localement. Celle-ci se propage et donne naissance à une onde sismique.
- ▷ Une antenne génère localement un champ électrique sinusoïdal en fonction du temps. Dans l'air, il génère une onde qui se propage à la vitesse de la lumière.

Certaines ondes ont besoin d'un milieu matériel pour se propager : ce sont les ondes mécaniques. Les ondes sismiques, les ondes dans une corde ou les ondes sonores en sont des exemples. Certaines ondes peuvent se propager dans le vide, comme les ondes électromagnétiques. Les infrarouges, la lumière visible ou les micro-ondes sont des exemples d'ondes électromagnétiques.

Définition. Une onde est dite **progressive** si sa propagation ne se fait que dans un seul sens depuis sa source. À un instant ultérieur, **on retrouve la perturbation à l'identique plus loin.**

2.2 Onde progressive à une dimension

Définition. Une onde mécanique progressive à une dimension est :

- ▷ une onde qui se propage dans un milieu matériel à une dimension ;
- ▷ ou une onde qui se propage dans un milieu matériel à deux ou trois dimensions, avec une direction de propagation unique.

Exemple

- 1D** onde le long d'une corde, mascaret dans un canal, compression le long d'un ressort ;
- 2D** vagues sur l'eau ;
- 3D** son, lumière.

2.3 Représentations des ondes et célérité

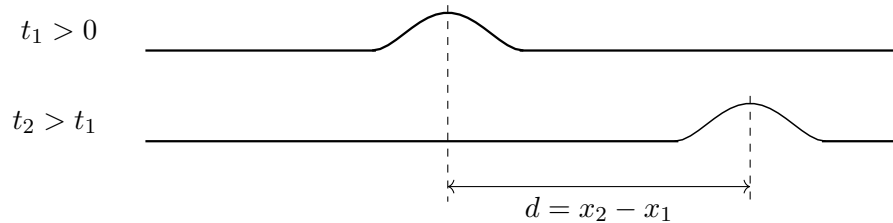
On peut représenter l'état de la perturbation à un instant donné au cours de sa propagation : c'est alors une **représentation spatiale** de l'onde. Par exemple, une photographie est une représentation spatiale : à un instant donné, on observe la disposition des choses.

On peut également placer un détecteur en un endroit précis et observer l'état de l'onde en fonction du temps : c'est alors une **représentation temporelle** de l'onde.

Définition.

- Dans une **représentation spatiale**, on regarde à un temps fixé la perturbation dans tout l'espace.
- Dans une **représentation temporelle**, on regarde à un endroit fixé la perturbation sur toute sa durée.

Deux représentations spatiales :



Célérité des ondes Lorsqu'une onde se propage, on peut définir une vitesse de propagation de la perturbation. Pour la distinguer de la vitesse d'un point matériel, on emploie plutôt le terme célérité. Par convention, celle-ci est toujours positive.

Définition. La célérité c d'une onde est le quotient de la distance d parcourue par la perturbation, sur l'intervalle de temps Δt que dure ce parcours :

$$c = \frac{d}{\Delta t}$$

Sur le schéma ci-dessus :

$$c = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

En première approximation, la célérité ne dépend pas des caractéristiques de la perturbation, mais seulement de la nature et des propriétés du milieu de propagation.

Signal	Célérité
ondes électromagnétiques dans le vide	$3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (vitesse de la lumière)
son dans l'air à 20°C sous 1 bar	$\approx 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
son dans les métaux	quelques $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$
son dans l'eau	$1,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

TABLE 1 – Quelques ordres de grandeurs de célérités à connaître.

Retard On crée à l'instant $t = 0$ une déformation à un endroit M. Cette perturbation se propage le long de la corde avec une célérité c . Elle parvient en un point M', situé à une distance D de M à :

$$t_1 = \frac{MM'}{c}$$

Définition. La grandeur τ est le retard du point M' par rapport au point M :

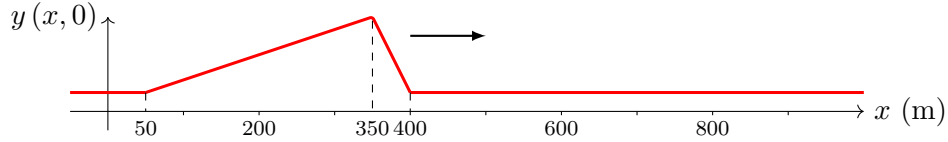
$$\tau = \frac{MM'}{c}$$

2.4 Lien entre les représentations

2.4.1 Deux exemples

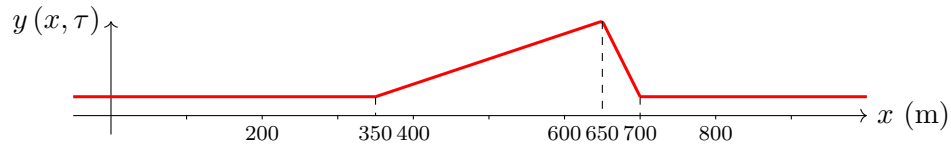
Exemple 1. Un mascaret est une vague solitaire remontant un fleuve au voisinage de son estuaire, et provoqué par une interaction entre son écoulement et la marée montante. On considère ici un mascaret qui se déplace à la vitesse $c = 18 \text{ km/h}$ le long d'un fleuve rectiligne, et on définit un axe (Ox) dans la direction et le sens de sa propagation.

À l'instant $t = 0$, le profil de niveau de l'eau du fleuve a l'allure suivante :



1. Faire un schéma du profil du niveau du fleuve à $\tau = 1 \text{ min}$ en supposant que l'onde se propage sans déformation.

Entre $t = 0$ et $t = \tau$, la vague s'est déplacée vers la droite. On la retrouve à l'identique décalée de $D = c\tau$ vers la droite. Or $c = 18 \text{ km/h} = 300 \text{ m/min}$ et $\tau = 1 \text{ min}$: le décalage est de 300 m.



2. Un détecteur fixe, enregistrant la hauteur du fleuve en fonction du temps, est placé à l'abscisse $x_d = 1,6 \text{ km}$. Dessiner l'allure des variations $y(x_d, t)$ en fonction du temps à cette abscisse.

La tête de la vague arrive avec un retard :

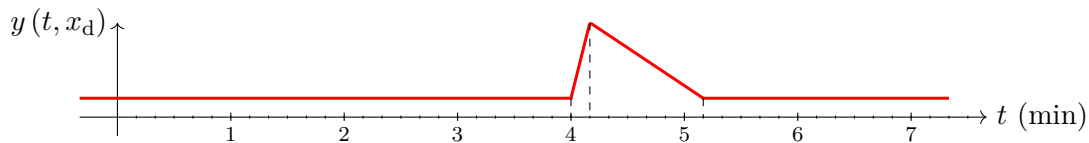
$$\tau_{\text{tête}} = \frac{x_d - x_{\text{tête}, t=0}}{c} = \frac{1,6 - 0,4}{0,3} = 4 \text{ min}$$

Le haut de la vague arrive avec un retard :

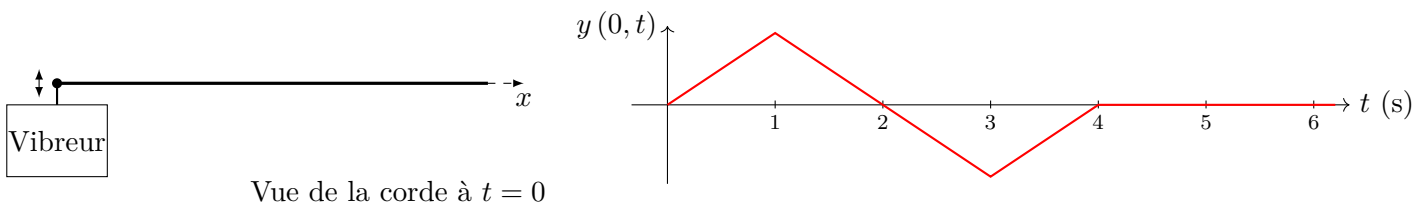
$$\tau_{\text{haut}} = \frac{x_d - x_{\text{haut}, t=0}}{c} = \frac{1,6 - 0,35}{0,3} = 4 \text{ min } 10 \text{ s}$$

La fin de la vague arrive avec un retard :

$$\tau_{\text{fin}} = \frac{x_d - x_{\text{fin}, t=0}}{c} = \frac{1,6 - 0,05}{0,3} = 5 \text{ min } 10 \text{ s}$$



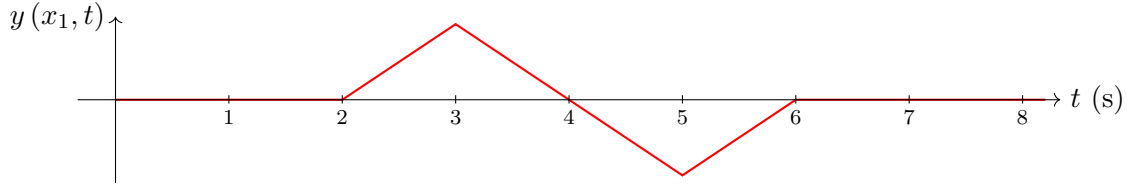
Exemple 2. On dispose à l'extrémité d'une corde un vibreur qui impose la perturbation suivante :



La célérité de l'onde est de 50 cm/s.

1. Représenter l'évolution de la hauteur de la corde en $x_1 = 1$ m.

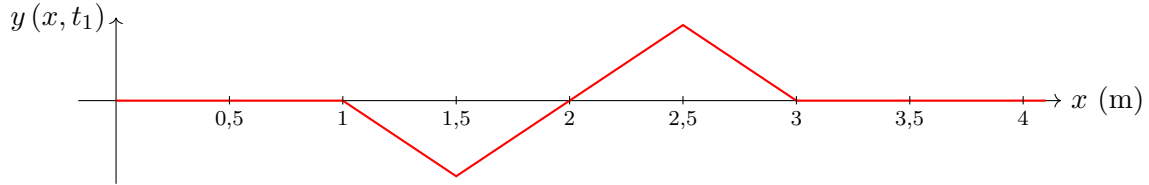
On observe en x_1 la même onde qu'en $x = 0$ avec un retard $x_1/c = 2$ s lié à la propagation. On retrouve la même représentation temporelle décalée de 2 s.



2. Donner l'allure de la représentation spatiale de l'onde à $t_1 = 6$ s.

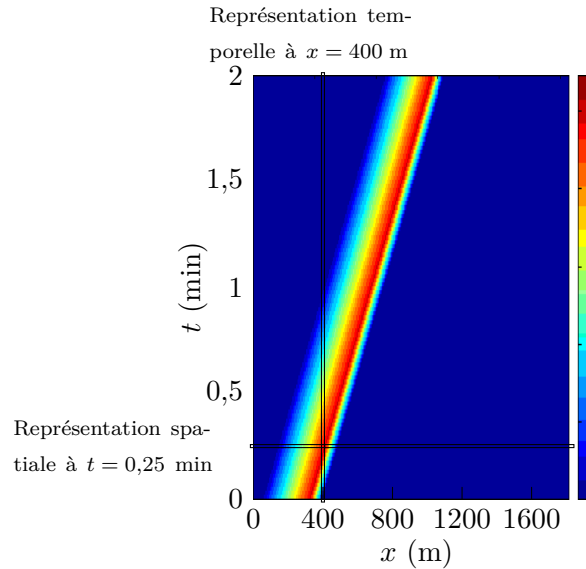
Pour avoir la représentation spatiale, on calcule la distance parcourue par quelques endroits de la perturbation :

- Le début, émis à $t_d = 0$ s, a parcouru à $t = 6$ s la distance $c(t - t_d) = 3$ m ;
- le maximum, émis à $t_{\max} = 1$ s, a parcouru à $t = 6$ s la distance $c(t - t_{\max}) = 2,5$ m ;
- le minimum, émis à $t_{\min} = 3$ s, a parcouru à $t = 6$ s la distance $c(t - t_{\min}) = 1,5$ m ;
- la fin, émise à $t_f = 4$ s, a parcouru à $t = 6$ s la distance $c(t - t_f) = 1$ m.



2.4.2 Visualisation

Nous avons vu deux représentations graphiques : une selon l'espace x , une selon le temps t . En réalité, le signal de l'onde est une fonction de **deux** variables. Pour obtenir une représentation, on fixe une des deux variables.



En réalité, l'onde peut s'exprimer comme une fonction de deux variables :

$$y(x, t)$$

2.4.3 Expression mathématique de l'onde

Partant de la représentation spatiale : l'onde observée à $t = 0$ se déplace vers la droite. La valeur de $y(x, t)$ en x à l'instant t était en $x - ct$ à l'instant $t = 0$. Soit :

$$y(x, t) = y(x - ct, 0)$$

On note $f(x) = y(x, 0)$. C'est la représentation spatiale de l'onde à $t = 0$. On a :

$$y(x, t) = f(x - ct)$$

Partant de la représentation temporelle : lorsqu'une onde se propage sans atténuation ni déformation, les valeurs observées en $x = 0$ au cours du temps sont aussi observées en $x > 0$ mais avec un retard $\tau = \frac{x}{c}$ lié à la propagation. La valeur de $y(x, t)$ en x à l'instant t était en $x = 0$ plus tôt : à l'instant $t - x/c$. Soit :

$$y(x, t) = y\left(0, t - \frac{x}{c}\right)$$

La fonction $y(0, t)$ est la hauteur de la corde en $x = 0$ à l'instant t : c'est la perturbation imposée par la source. On la note $g(t)$. Ainsi :

$$y(x, t) = g\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Représentation temporelle. La représentation temporelle en x_0 est le graphique de la fonction $t \rightarrow y(x_0, t)$, soit :

$$t \rightarrow f(x_0 - ct) = g\left(t - \frac{x_0}{c}\right)$$

Représentation spatiale. La représentation spatiale est le graphique de la fonction $x \rightarrow y(x, t_0)$, soit :

$$x \rightarrow f(x - ct_0) = g\left(t_0 - \frac{x}{c}\right)$$

Remarque. Si l'onde se propage vers la gauche, le raisonnement est le même avec $x + ct$ et $t + x/c$ au lieu de $x - ct$ et $t - x/c$.

3 Ondes progressives sinusoïdale

3.1 Définition

Définition. Une onde progressive est sinusoïdale si la source impose une perturbation sinusoïdale au milieu.

Si on relie un haut-parleur à un GBF délivrant une tension sinusoïdale, on observe le mouvement périodique dont est animé la membrane de l'air, qui génère une perturbation périodique de l'air. Le diapason produit également une onde progressive sinusoïdale : lorsqu'on le frappe, celui-ci vibre à une fréquence bien déterminée, qui se propage ensuite dans l'air pour parvenir à nos oreilles.

3.2 Double périodicité spatiale et temporelle

Observations sur l'animation

- ▷ Lorsque l'on impose une excitation sinusoïdale, la représentation spatiale est aussi sinusoïdale.
- ▷ À célérité constante, lorsque la fréquence de l'excitation augmente (la période diminue), la période spatiale diminue.
- ▷ À fréquence de l'excitation constante, si on augmente la célérité, la période spatiale diminue.

Périodicité temporelle. Si la perturbation créée en S est sinusoïdale avec une période T , alors l'onde en M l'est également (il n'y a qu'un retard entre les deux dû à la propagation).

Périodicité spatiale. Au moment de l'émission du deuxième maximum, le premier maximum a déjà parcouru une distance cT . L'écart entre deux maximum successifs est la période spatiale soit :

$$\lambda = cT$$

Bilan. Une onde progressive sinusoïdale présente à la fois une périodicité spatiale et une périodicité temporelle. La période temporelle T et la période spatiale, nommée longueur d'onde et notée λ sont reliées par la relation

$$\lambda = cT = \frac{c}{f}$$

c désigne la célérité de l'onde.

3.3 Expression mathématique de l'onde progressive sinusoïdale

Par définition, la perturbation $g(t)$ imposée en $x = 0$ est un signal sinusoïdal :

$$g(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Donc :

$$s(x, t) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right) = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x + \varphi\right)$$

On note $k = \frac{\omega}{c}$: c'est le vecteur d'onde.

L'expression générale d'une onde progressive sinusoïdale se propageant sans déformation ni atténuation est :

$$s(x, t) = A \times \cos\left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x}{\lambda} + \varphi\right) = A \times \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

Remarque. On peut vérifier la double périodicité (T et λ). Par exemple :

$$\begin{aligned} s(x + \lambda, t) &= A \times \cos\left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x + \lambda}{\lambda} + \varphi\right) \\ &= A \times \cos\left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x}{\lambda} - 2\pi + \varphi\right) \\ &= A \times \cos\left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x}{\lambda} + \varphi\right) = s(x, t) \end{aligned}$$

3.4 Vitesse de phase

On considère une onde progressive sinusoïdale. La **phase** de l'onde est le terme $\omega t - kx + \varphi$.

On se demande à quelle moment t_2 le signal mesuré en x_2 aura la même phase que le signal mesuré en x_1 à l'instant t_1 . L'intervalle

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

décrit cette vitesse de propagation de la phase. On l'appelle simplement **vitesse de phase** et on la note v_φ .

Résolution : Cela correspond à :

$$\omega t_2 - kx_2 + \varphi = \omega t_1 - kx_1 + \varphi$$

Soit :

$$\omega(t_2 - t_1) = k(x_2 - x_1)$$

$$v_\varphi = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{k}$$

4 Milieux dispersifs

Définition. Un milieu est dit dispersif si la célérité c dépend de la fréquence ou de la longueur d'onde. Si c'est le cas, les différentes composantes spectrales d'un signal ne vont pas à la même vitesse et donc le signal peut se déformer lors de la propagation.

Exemple

▷ Propagation non-dispersive :

— Propagation des ondes acoustiques dans un fluide. La célérité est :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}}$$

où ρ_0 est la masse volumique du fluide au repos et χ_0 sa compressibilité.

— Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide :

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c'est une constante de la physique

▷ Propagation dispersive :

— Propagation des ondes à la surface de l'eau. On a :

$$\omega^2 = gk \quad \text{soit} \quad v_\varphi = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

Elle dépend de k donc de la longueur d'onde.

— Propagation des ondes électromagnétiques dans le verre :

$$v_\varphi = \frac{c}{n(\lambda)}$$

où $n(\lambda) = A + B/\lambda^2$. La dispersion du verre permet la décomposition du spectre par un prisme.

5 Transmission d'un signal physique par une onde

5.1 Les signaux acoustiques

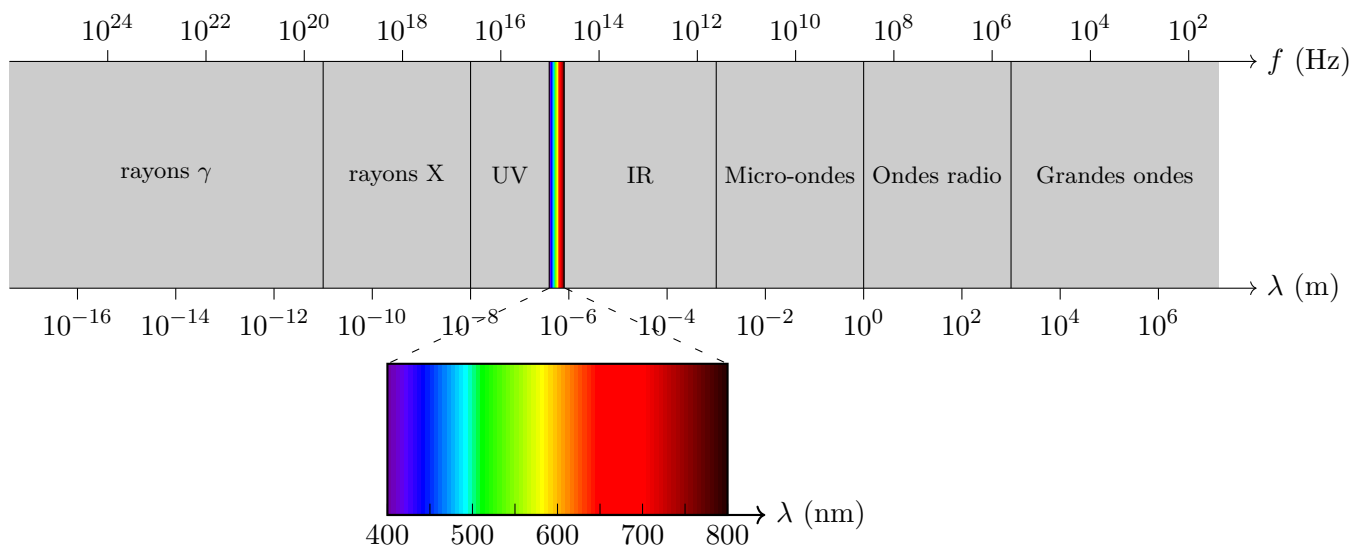
Les signaux acoustiques se propagent par une modification locale de la pression et de la vitesse locale du milieu. Il se propagent dans l'air ($\approx 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ à 20°C sous 1 bar) et dans les solides ou les liquides. Les fréquences audibles sont situées entre 20 Hz (grave) et 20 kHz (aigu) mais ces valeurs varient selon les individus.

5.2 Les signaux électriques

Ils se propagent dans les conducteurs électriques (métaux notamment) et correspondent à une modification locale du courant I et de la tension U .

5.3 Les signaux électromagnétiques

Les signaux électromagnétiques se propagent par une modification locale du champ électromagnétique ($\vec{E}, \vec{B}$). Ils se propagent dans le vide ($c \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) et dans certains milieux transparents pour certaines fréquences, par exemple dans l'eau à $\approx 2,25 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et dans les verres entre $1,7 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $2,2 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



6 Diffraction



Expérience

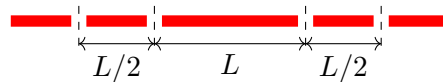
Lorsque l'on fait passer une onde à travers une fente, et que l'on ferme celle-ci, on observe que le faisceau ne se rétrécit pas comme on pourrait l'attendre, au contraire il s'étale et un motif caractéristique apparaît. Plus l'ouverture est étroite, plus la taille du motif est grande.

Définition. La **diffraction** est le phénomène d'étalement d'une onde lorsqu'elle passe à travers une ouverture de taille comparable à la longueur d'onde λ de l'onde.

Par exemple, pour les ondes lumineuses, le phénomène commence à être clairement visible lorsque la taille de l'ouverture devient plus petite que 0,1 mm.

Un fil fin peut également causer le phénomène de diffraction. Nous pouvons également mettre en évidence ce phénomène avec des ondes mécaniques, comme celle à la surface de l'eau.

Figure de diffraction L'image observée sur l'écran a l'allure suivante (voir photographie a) :

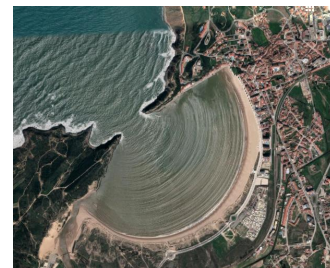


Nous définissons ainsi la largeur de la tache centrale L . Elle est entourée d'une succession de tache deux fois plus petites.

On voit que l'angle est le paramètre pertinent : plus l'écran s'éloigne, plus la tache centrale est grande.



(a) Figure de diffraction de laser par une fente pour différentes longueurs d'onde.



(b) Diffraction d'onde océaniques dans la baie de São Martiinho de Porto.

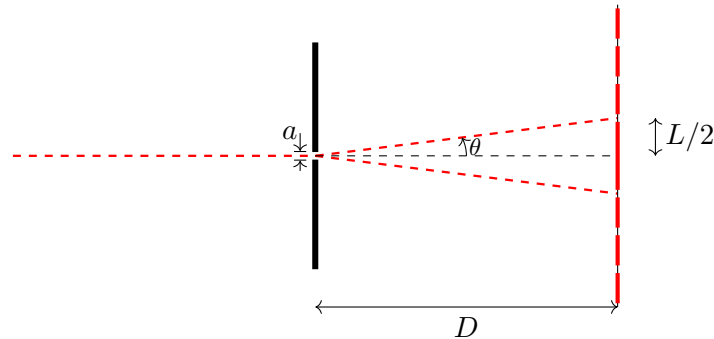


(c) Aigrettes de diffraction sur une image prise par le télescope spatial Hubble.



(d) Diffraction bidimensionnelle de la lumière à travers les mailles d'un rideau.

Définition. L'écart angulaire est l'angle θ entre le milieu de la tache centrale et la première extinction. Il est défini sur le schéma ci-dessous.



Nous admettons que l'écart angulaire s'exprime en fonction de la longueur d'onde λ et la largeur de l'ouverture a de la fente ainsi :

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{a}$$

a et λ s'expriment en mètres, θ en radians.

En général, les angles sont petits, on retiendra alors :

$$\theta = \frac{\lambda}{a}$$

On peut relier dans le cas de la diffraction par un laser θ à la largeur de la tache L et la distance entre la fente et l'écran D :

$$\tan \theta = \frac{L/2}{D}$$

Si l'angle est là encore assez petit :

$$\theta = \frac{L}{2D}$$

Soit :

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{L}{2D} \quad \text{d'où} \quad \boxed{a = \frac{2D\lambda}{L}}$$

Application numérique :

- $D = 1,1 \text{ m}$;
- $\lambda = 650 \text{ nm} = 6,50 \times 10^{-7} \text{ m}$;
- $L = 1,4 \text{ cm}$.

$$a = 1,0 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,10 \text{ mm}$$

Ainsi, en connaissant la longueur d'onde du laser, il est possible de mesurer l'ouverture d'une fente très fine, mesure difficile à faire sinon. Nous le ferons en TP prochainement. Il est aussi possible de mesurer une longueur d'onde inconnue avec des fils calibrés.

7 Superposition d'ondes : le phénomène d'interférences

Les signaux que nous avons étudiés dans le chapitre précédent subir au cours de leur propagation des interactions avec d'autres ondes, la rencontre d'obstacles, etc. Quel que soit le type d'onde, les phénomènes ondulatoires sont qualitativement les mêmes. Nous étudions dans cette partie un de ces phénomènes : les interférences.

7.1 Superposition d'ondes et critères d'interférence

7.1.1 Additivité des signaux

La plupart du temps, les ondes se croisent sans interagir. On ne voit que la somme des deux signaux.



Animation PDF : superposition d'ondes.

7.1.2 Critères d'interférences



Expérience

Dispositif expérimental de la cuve à ondes.

(vidéo <https://youtu.be/Iuv6hY6zsd0?si=zP0eE7YGTjt5IaMh> à 5 min).

Avec un petit vibreur, on impose une excitation périodique à la surface de l'eau. Lorsque l'on place deux perturbateurs, on obtient des zones où l'amplitude des ondes est très grande, et d'autres où la surface reste plane.

L'animation https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Ondes/cuve_ondes/interference_ondes_circulaires.php permet de visualiser la condition pour avoir des interférences constructives ou destructives.

Étude théorique : on suppose que :

- chaque source émet un signal sinusoïdal ;
- les deux signaux ont la même fréquence ;
- pour simplifier le calcul, on supposera que les deux signaux ont la même amplitude.

À cause de la propagation, les signaux ont une phase qui peut être différente. Ainsi, les signaux sinusoïdaux créés par les deux sources sont :

$$s_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi_1(M))$$

$$s_2(t) = A \cos(\omega t + \varphi_2(M))$$

On rappelle que :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Ainsi, on peut réécrire le signal total, somme de $s_1(t)$ et $s_2(t)$ ainsi :

$$\begin{aligned} s(t) &= s_1(t) + s_2(t) \\ &= A [\cos(\omega t + \varphi_1(M)) + \cos(\omega t + \varphi_2(M))] \\ &= 2A \cos\left(\frac{\omega t + \varphi_1(M) + \omega t + \varphi_2(M)}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega t + \varphi_1(M) - \omega t - \varphi_2(M)}{2}\right) \end{aligned}$$

On note alors $\Delta\varphi(M) = \varphi_1(M) - \varphi_2(M)$ et $\varphi_0(M) = \frac{\varphi_1(M) + \varphi_2(M)}{2}$.

$$s(t) = 2A \cos(\omega t + \varphi_0(M)) \cos\left(\frac{\Delta\varphi(M)}{2}\right)$$

Ce signal est celui d'un signal sinusoïdal à la pulsation ω d'amplitude $2A \cos\left(\frac{\Delta\varphi(M)}{2}\right)$. Cette amplitude varie selon le déphasage $\Delta\varphi(M)$ entre les deux ondes, donc en fonction de l'endroit d'où on se place.

On distingue deux cas extrêmes :

▷ $\left| \cos\left(\frac{\Delta\varphi(M)}{2}\right) \right| = 1$. Dans ce cas, l'amplitude est maximale et égale à $2A$. Or :

$$\cos\left(\frac{\Delta\varphi(M)}{2}\right) = \pm 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\Delta\varphi(M)}{2} = p\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta\varphi(M) = 2p\pi$$

(p est un entier relatif). Lorsque les signaux sont en phase, les maxima et minima de vibration se correspondent pour donner à chaque instant une onde d'amplitude double.

Définition. Lorsque deux signaux sinusoïdaux interfèrent et que le résultat de l'interférence est d'amplitude maximale, on parle d'**interférences constructives**.

Les interférences sont constructives quand le déphasage est multiple de 2π , autrement dit :

$$\Delta\varphi(M) = 2p\pi \quad p \in \mathbb{Z}$$

Les signaux sont dits **en phase**.

▷ $\cos\left(\frac{\Delta\varphi(M)}{2}\right) = 0$. Dans ce cas, l'amplitude est nulle. Or :

$$\cos\left(\frac{\Delta\varphi(M)}{2}\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\Delta\varphi(M)}{2} = p\pi + \frac{\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta\varphi(M) = (2p+1)\pi$$

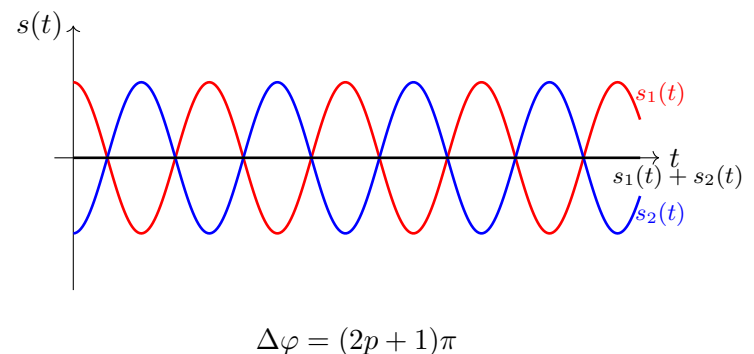
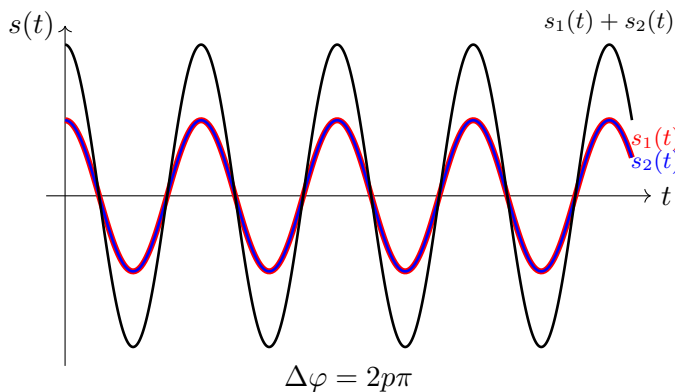
(p est un entier relatif). Dans ce cas, lorsqu'il sont en opposition de phase, minima et maxima de vibration s'annulent et l'amplitude de l'onde résultante est nulle.

Définition. Lorsque deux signaux sinusoïdaux interfèrent et que le résultat de l'interférence est d'amplitude nulle, on parle d'**interférences destructives**.

Les interférences sont destructives quand le déphasage est multiple impair de π , autrement dit :

$$\Delta\varphi(M) = (2p+1)\pi \quad p \in \mathbb{Z}$$

Les signaux sont dits **en opposition de phase**.



Visualisation : <https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Ondes/general/somme.php>

7.1.3 Calcul d'un déphasage

Rappelons qu'une onde progressive sinusoïdale peut se mettre sous la forme :

$$s(t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Dans ce cas :

$$\varphi_1(M) = -2\pi \frac{O_1M}{\lambda} + \varphi \quad \text{et} \quad \varphi_2(M) = -2\pi \frac{O_2M}{\lambda} + \varphi$$

O_1 (respectivement O_2) désigne la source de la première onde (respectivement la source de la deuxième onde).
Ainsi :

$$\Delta\varphi(M) = \varphi_1(M) - \varphi_2(M) = \frac{2\pi}{\lambda} (O_2M - O_1M)$$

Les ondes interfèrent donc constructivement si :

$$\frac{2\pi}{\lambda} (O_2M - O_1M) = 2p\pi \quad \text{soit} \quad \boxed{O_2M - O_1M = p\lambda}$$

Et les ondes interfèrent destructivement si :

$$\frac{2\pi}{\lambda} (O_2M - O_1M) = (2p + 1)\pi \quad \text{soit} \quad \boxed{O_2M - O_1M = \left(p + \frac{1}{2}\right) \lambda}$$

On retrouve le résultat vu sur l'animation.

7.2 Interférences lumineuses

Pour que deux ondes lumineuses interfèrent, il faut qu'elles proviennent de la même source. En effet, une source lumineuse émet des « paquets d'onde » de phase aléatoire. Pour observer des interférences, il faut donc la superposition de deux ondes issues du même paquet d'onde. Le dispositif doit donc produire à partir d'une seule source deux ondes qui se superposent à un endroit.

On observe cela dans certains dispositifs, comme celui des **trous d'Young** que nous étudierons dans la suite. On peut aussi le créer avec un **interféromètre**, qui sont des outils utilisant les interférences pour réaliser des mesures de longueurs avec une grande précision.

7.2.1 L'intensité lumineuse

La fréquence/période typique d'une onde lumineuse est :

$$f = \frac{3 \times 10^8}{6 \times 10^{-7}} = 5 \times 10^{14} \text{ Hz} \quad T = \frac{6 \times 10^{-7}}{3 \times 10^8} = 2 \times 10^{-15} \text{ s}$$

Cette échelle de temps est bien inférieure au temps de détection de n'importe quel capteur optique (oeil : 10^{-1} s, CCD : supérieur à 10^{-6} s). Ainsi, un récepteur optique n'est sensible qu'à l'énergie moyenne qui lui parvient. Cette énergie est proportionnelle au carré du signal de l'onde $s(M, t)$ (il s'agit du champ électrique). On définit alors :

Définition. L'intensité lumineuse est :

$$I = K \langle s^2(M, t) \rangle$$

K est une constante (on ne la précise pas usuellement), le symbole $\langle \cdot \rangle$ désigne la moyenne temporelle.

Si $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$:

$$I = KA^2 \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{KA^2}{2}$$

7.2.2 Formule de Fresnel

On considère l'interférence entre deux ondes identiques. Leur phase diffère à cause de la propagation. Le champ total est :

$$s(M, t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1(M)) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2(M))$$

L'intensité lumineuse $I = K \langle s^2(M, t) \rangle$. Pour exprimer l'intensité, on développe :

$$K \langle s^2(M, t) \rangle = \underbrace{K \langle s_1^2(M, t) \rangle}_{I_1} + \underbrace{K \langle s_2^2(M, t) \rangle}_{I_2} + K \langle 2s_1(M, t)s_2(M, t) \rangle$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} \langle 2s_1(M, t)s_2(M, t) \rangle &= \langle 2A_1A_2 \cos(\omega t + \varphi_1(M)) \cos(\omega t + \varphi_2(M)) \rangle \\ &= A_1A_2 \langle \cos(2\omega t + \varphi_1(M) + \varphi_2(M)) \rangle + A_1A_2 \langle \cos(\varphi_1(M) - \varphi_2(M)) \rangle \end{aligned}$$

On a utilisé :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

La valeur moyenne d'un cosinus est nulle, ainsi :

$$I(M) = I_1 + I_2 + KA_1A_2 \cos(\varphi_1(M) - \varphi_2(M))$$

On trouve avec :

$$I_1 = \frac{KA_1^2}{2} \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{KA_2^2}{2} \quad \text{l'égalité} \quad 2\sqrt{I_1I_2} = KA_1A_2$$

Ainsi on retiendra :

Formule de Fresnel.

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos(\Delta\varphi)$$

Remarque. Si $I_1 = I_2 = I_0$:

$$I = 2I_0 (1 + \cos(\Delta\varphi))$$

Selon la valeur de $\Delta\varphi$ (multiple de 2π ou multiple impair de π), on trouve $I = 4I_0$ ou $I = 0$.

7.2.3 Phase et chemin optique

La phase d'une onde en M est :

$$\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda} SM$$

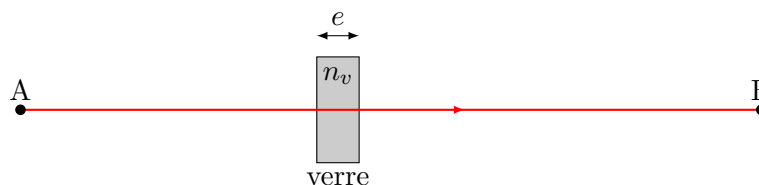
où S est sa source et λ sa longueur d'onde. Or $\lambda = \lambda_0/n$ où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide et n l'indice optique d'où :

$$\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda_0} \times n \times SM$$

Le différence de phase entre deux ondes n'est pas donc liée uniquement à la longueur du chemin parcouru par l'onde mais également à l'indice correspondant. Pour prendre en compte cela, on définit le **chemin optique**.

Définition. Le **chemin optique** est la longueur du trajet suivi par la lumière, multipliée par l'indice du milieu traversé.

Exemple



Dans la situation ci-dessous, le chemin optique pour aller de A à B est :

$$\mathcal{L}_{AB} = n_{\text{air}} (AB - e) + n_v e$$

La différence de phase est :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}$$

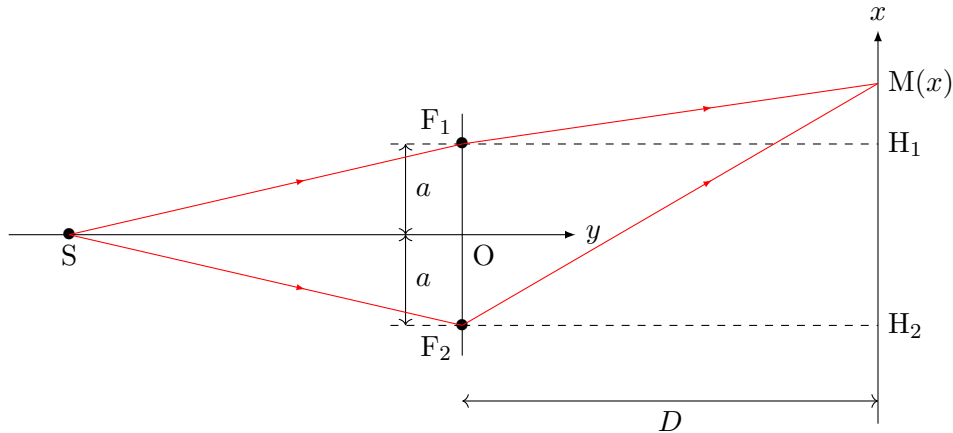
où λ_0 désigne la longueur d'onde dans le vide de l'onde lumineuse et δ la différence des chemins optiques suivi par l'onde. δ est nommée **différence de marche**.

7.2.4 Expérience des fentes d'Young à distance finie

On éclaire avec un laser de longueur d'onde λ deux fentes fines horizontales, parallèles, distantes de $2a$. Sur un écran situé à une distance D très supérieure à a , on observe la lumière qui a traversé le système. On observe alors que le motif de diffraction observée pour une seule fente apparaît comme « strié ».

On se place dans le plan médiateur (Oxy) de ces dernières. On note F_1 et F_2 les points des fentes appartenant à ce plan et O le milieu de ces points. Un point M sur l'écran est repéré par son ordonnée x .

Pourquoi y-a-t-il des interférences ? Il y a de la lumière en M grâce à la diffraction : l'onde passant à travers chacune des fentes s'étale. Chaque fente crée une tâche par diffraction. Ces deux tâches se superposent et les interférences peuvent être observées à l'endroit où les deux taches se superposent.



Différence de marche. Établissons maintenant une expression pour $\delta(M)$. Le chemin optique correspondant au parcours par F_1 est :

$$\mathcal{L}_{SF_1M} = SF_1 + F_1M$$

car l'indice optique des milieux traversés est n . De même :

$$\mathcal{L}_{SF_2M} = SF_2 + F_2M$$

Or $SF_1 = SF_2$ donc :

$$\delta = F_2M - F_1M$$

On écrit ensuite le théorème de Pythagore dans le triangle F_1H_1M :

$$F_1M^2 = F_1H_1^2 + H_1M^2$$

Or $F_1H_1 = D$ et $H_1M = x - a$ donc :

$$F_1M = \sqrt{D^2 + (x - a)^2}$$

De même, dans le triangle F_2H_2M :

$$F_2M^2 = F_2H_2^2 + H_2M^2$$

Or $F_2H_2 = D$ et $H_2M = x + a$ donc :

$$F_2M = \sqrt{D^2 + (x + a)^2}$$

On utilise le fait que $x - a \ll D$ et l'approximation $\sqrt{1 + \varepsilon} = 1 + \varepsilon/2$ si $\varepsilon \ll 1$.

$$\begin{aligned} F_1M &= \sqrt{D^2 + (x - a)^2} \\ &= D \sqrt{1 + \frac{(x - a)^2}{D^2}} \quad (\text{on fait apparaître } \varepsilon \text{ sans dimension et petit}) \\ &\approx D \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(x - a)^2}{D^2} \right) \quad (\text{on utilise l'approximation}) \\ &\approx D + \frac{(x - a)^2}{2D} \end{aligned}$$

De même :

$$F_2M \approx D + \frac{(x + a)^2}{2D}$$

Ainsi :

$$F_2M - F_1M = \frac{(x + a)^2 - (x - a)^2}{2D}$$

On utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$\delta = \frac{(x + a + x - a) \times (x - a - x + a)}{D} = \frac{4ax}{2D} = \frac{2ax}{D}$$

Intensité lumineuse. Elle est donnée par la formule de Fresnel.

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi)$$

Avec $I_1 = I_2 = I_0$ et l'expression de δ obtenue :

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi ax}{\lambda D}\right) \right)$$

L'intensité I est une fonction périodique selon x .

Interférences constructives. Les endroits où l'intensité est maximale sont tels que :

$$\Delta\varphi = 2p\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2\pi\delta}{\lambda} = 2p\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \delta(M) = p\lambda$$

On isole x , les endroits lumineux sont les abscisses :

$$x_p = p \frac{\lambda D}{2a}$$

Interférences destructives : Les endroits où l'intensité est minimale sont tels que :

$$\Delta\varphi = (2p + 1)\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2\pi\delta}{\lambda} = (2p + 1)\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \delta(M) = \left(p + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

Les endroits sombres sont les abscisses :

$$x'_p = \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda D}{2a}$$

Interfrange : Deux maximums d'intensité sont séparés de

$$L = x_{p+1} - x_p = \lambda D / (2a)$$

Application numérique : Pour deux fentes séparées de $2a = 0,200$ mm, $\lambda_0 = 632$ nm et $D = 1,00$ m, on a :

$$L = 3,16 \text{ mm}$$

C'est une longueur mesurable.