

Chapitre 7

Intégrales impropres

Sommaire

7.1 Intégrale impropre en $\pm\infty$.	140
7.1.1 Définition et opérations	140
7.2 Intégrale impropre en un point fini	141
7.3 Intégrales de références	142
7.3.1 Intégrales de Riemann	142
7.3.2 Autres intégrales de références	143
7.4 Critères pour l'étude	143
7.4.1 Critère d'équivalence	143
7.4.2 Critère de négligeabilité	144
7.4.3 Critère de comparaison	144
7.5 Propriétés des intégrales impropres	144
7.6 Calcul des intégrales impropres	146
7.7 Applications	147

Le but de ce chapitre est d'une part d'étendre la notion d'intégrale à un intervalle quelconque et d'autre part, de mettre en place les techniques de comparaison des intégrales de fonctions positives.

Les intégrales généralisées sont introduites en tant qu'outil pour la définition et l'étude des variables aléatoires à densité.

A l'instar des séries, on va donner des méthodes pour étudier la nature des intégrales impropres. L'objectif principal est de savoir si ces intégrales ont un sens ou pas.

Compétences attendues. ⇨ Calculer une intégrale sur un segment à l'aide d'une primitive, d'une intégration par parties ou d'un changement de variable.

⇨ Étudier la nature d'une intégrale généralisée en utilisant la définition.

⇨ Effectuer une intégration par parties ou un changement de variable sur une intégrale généralisée.

⇨ Utiliser les propriétés des intégrales pour étudier une suite ou une fonction définie par une intégrale.

⇨ Connaître les conditions de convergence des intégrales de Riemann.

⇨ Utiliser les théorèmes de comparaison (inégalité, négligeabilité, équivalence) pour étudier la nature d'une intégrale généralisée.

Augustin-Louis Cauchy est le premier à se soucier de justification de l'existence des intégrales, il se restreint aux fonctions continues.

C'est Bernhard Riemann (mathématicien allemand), dont l'apport à l'étude du calcul intégral sera fondamental, qui définit l'intégrale de fonctions plus générales.

En 1902, Henri Lebesgue (mathématicien français) apporte une approche nouvelle partant de la mesure d'ensembles, point de départ à une nouvelle théorie (intégrale abstraite) utilisée en probabilités ou en sommation de séries.

7.1 Intégrale impropre en $\pm\infty$.

7.1.1 Définition et opérations

Définitions 7.1.

Si f est une fonction continue ou continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, on dit que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est impropre (ou généralisée) en $+\infty$.

Elle converge si $\int_a^M f(t) dt$ a une limite finie quand $M \rightarrow +\infty$.

On note alors $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt$.

Elle diverge sinon.

Exemples 7.1 (A connaître).

1. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ est impropre en $+\infty$. Elle converge et vaut 1.

Car $\int_0^M e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^M = -e^{-M} + 1 \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 1$ donc $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge et vaut 1.

2. L'intégrale $\int_{-\infty}^0 e^u du$ est impropre en $-\infty$.

EXERCICE 7.1 (A connaître).

1. Ecrire les définitions dans le cas où l'intégrale est impropre en $-\infty$.

2. L'intégrale $\int_{-\infty}^0 e^u du$ converge-t-elle? Si oui, quelle est sa valeur?

Exemples 7.2 (A connaître).

1. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est impropre en $+\infty$. Elle converge et vaut 1.

En effet, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et on a : $\forall x \geq 1, \int_1^M \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{-1}{x} \right]_1^M = \frac{-1}{M} + 1$.

On a donc $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{dx}{x^2} = 1$ et ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$.

2. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ est impropre en $+\infty$. Elle diverge.

En effet, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$ mais on a :

$$\forall x \geq 1, \int_1^M \frac{dx}{x} = \left[\ln x \right]_1^M = \ln M \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Définitions 7.2.

Si f est une fonction continue ou continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on dit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est doublement impropre (ou généralisée) en $-\infty$ et en $+\infty$.

Elle converge si pour un réel c arbitrairement choisi, les intégrales $\int_c^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_{-\infty}^c f(t) dt$ sont toutes deux convergentes.

On pose alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^c f(t) dt + \int_c^{+\infty} f(t) dt$.

Elle diverge sinon.

Remarque.

Si au moins l'une des deux intégrales $\int_c^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_{-\infty}^c f(t) dt$ diverge alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est divergente.

Définition 7.3.

Etudier la *nature* d'une intégrale impropre, c'est déterminer si elle converge ou non.

EXERCICE 7.2 (🔗 Multi-impropre).

Etude de : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3} dt$.

7.2 Intégrale impropre en un point fini

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Définition 7.4. Soit f une fonction continue ou continue par morceaux sur $]a, b]$. On dit alors que $\int_a^b f(t) dt$ est impropre en a .

Si $\int_x^b f(t) dt$ a une limite finie quand $x \rightarrow a$, on dit que $\int_a^b f(t) dt$ converge et

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a} \int_x^b f(t) dt$$

Exemple 7.3. Montrer la convergence et calculer $\int_0^1 \ln(t) dt$.

[Réponse] Pour $x > 0$: $\int_x^1 \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_x^1 = -1 - (x \ln(x) - x) \rightarrow -1$ donc $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge et vaut -1 .

Remarques.

- Cette définition s'étend au cas où l'intervalle $]a, b]$ devient $[a, b[$. On parlera alors d'intégrale impropre en b .

- On peut avoir f continue sur $]a, b[$, ou f continue sur $]a, b[$ sauf en un nombre fini de points : on parlera alors d'intégrales doublement impropres ou plus de deux fois impropres (ce qui est rare). Il faut étudier la convergence sur $]a, c]$ et $[c, b[$ (où c est arbitrairement choisi dans $]a, b[$).

Si ces deux intégrales convergent alors on a la convergence de $\int_a^b f(t) dt$ et :

$$\int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

Si au moins l'une des deux intégrales $\int_c^b f(t) dt$ et $\int_a^c f(t) dt$ diverge alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est divergente.

Multi-impropriété : si une intégrale est impropre en plusieurs points, on isole chacun des points d'impropriété.

Elle convergera si elle converge en chacun des points d'impropriété et elle sera la somme des sous intégrales impropres.

Exemple 7.4 ([🔗](#)). $f(x) = \frac{1}{x^2}$ si $x \leq -1$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}$ si $x \in [-1, 0[$ et $f(x) = e^{-x}$ si $x \geq 0$.

Nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$.

[Réponse] f est continue sur $]-\infty, -1]$, sur $[-1, 0[$ et $[0, +\infty[$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est impropre en $-\infty$, en 0^- et en $+\infty$.

- en $-\infty$: $\int_x^{-1} f(t) dt = \int_x^{-1} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_x^{-1} = 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1$ donc $\int_{-\infty}^{-1} f(t) dt \stackrel{\text{cv}}{=} 1$.

On pouvait aussi voir la convergence par Riemann

- en 0^- : $\int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{-t}} dt = [-2\sqrt{-t}]_{-1}^x = -2\sqrt{-x} + 2 \rightarrow 2$ donc $\int_{-1}^0 f(t) dt \stackrel{\text{cv}}{=} 2$.

- en $+\infty$: $\int_0^x f(t) dt = \int_0^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^x = -e^{-x} + 1 \rightarrow 1$ donc $\int_0^{+\infty} f(t) dt \stackrel{\text{cv}}{=} 1$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut $\int_{-\infty}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^{+\infty} f(t) dt = 4$

7.3 Intégrales de références

7.3.1 Intégrales de Riemann

Définition 7.5 ([↗ Intégrale de Riemann](#)).

Soit α un réel et a un réel strictement positif.

L'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ est appelée *Intégrale de Riemann* de paramètre α .

Théorème 7.1 ([↗ Convergence d'une intégrale de Riemann impropre en \$+\infty\$](#)).

Pour tout réel a strictement positif, l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Remarques.

1. L'intégrale de Riemann la plus utilisée est $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$.
2. On a un résultat similaire en effectuant un changement de variable $t = -x$ et $\alpha \in \mathbb{N}$ (car sinon x^α n'est pas défini pour x négatif et α non entier.
 $\int_{-\infty}^a \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Théorème 7.2 ([↗ Intégrale de Riemann impropre en 0](#)). si $\alpha \geq 1$ alors $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ diverge et converge si $\alpha < 1$. (c'est l'inverse du comportement en $+\infty$)

7.3.2 Autres intégrales de références

[Exponentielles]

Théorème 7.3 ([↗ Exponentielles](#)).

Soit λ un nombre réel.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$ converge $\Leftrightarrow \lambda > 0$.

Remarque. Nous verrons lors du chapitre sur les lois usuelles, certaines fonctions, appelées densités, qui fournissent d'autres exemples d'intégrales convergentes dont on connaît la valeur.

Voici la plus connue : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

7.4 Critères pour l'étude

I désignera un intervalle de la forme $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$ avec a réel ou $a = -\infty$, b réel ou $b = +\infty$.

7.4.1 Critère d'équivalence

Théorème 7.4 (critère d'équivalence).

Si f et g sont deux fonctions continues ou continues par morceaux sur I et **positives** sur I et si $f(t) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(t)$ alors les deux intégrales suivantes sont de même nature : $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$.

Exemple 7.5. Prouver la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + e^{-x}}{x^4 + x} dx$ impropre en $+\infty$.

[Réponse] On cherche un équivalent en $+\infty$ du contenu : $\frac{x^2 + e^{-x}}{x^4 + x} = \frac{x^2(1 + e^{-x}/x)}{x^4(1 + 1/x^3)} \sim \frac{1}{x^2} \geq 0$ dont l'intégrale converge en $+\infty$.

Donc, par équivalence de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + e^{-x}}{x^4 + x} dx$ converge également.

EXERCICE 7.3 (Critère d'équivalence).

Nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt$.

7.4.2 Critère de négligeabilité

Théorème 7.5 (critère de négligeabilité).

Si f et g sont deux fonctions continues ou continues par morceaux sur $I = [a, b[$ (resp. $I =]a, b]$) et **positives** sur I et si $f(t) = o_b(g(t))$ (resp. $f(t) = o_a(g(t))$) alors on a l'implication suivante : $\int_a^b g(t) dt$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t) dt$ converge. Et sa contraposée : $\int_a^b f(t) dt$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g(t) dt$ diverge.

EXERCICE 7.4 (critère de négligeabilité).

Nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

7.4.3 Critère de comparaison

Théorème 7.6 (critère de comparaison).

Si f et g sont deux fonctions continues ou continues par morceaux sur $I = [a, b[$ (resp. $I =]a, b]$) et telles que au voisinage de b (resp. a) : $\exists c \in I, \forall t \in [c, b[, 0 \leq f(t) \leq g(t)$ (resp. $\exists c \in I, \forall t \in]a, c], 0 \leq f(t) \leq g(t)$) Alors :

- si $\int_c^b g(t) dt$ converge alors $\int_c^b f(t) dt$ converge. (resp. si $\int_a^c g(t) dt$ converge alors $\int_a^c f(t) dt$ converge)
- si $\int_c^b f(t) dt$ diverge alors $\int_c^b g(t) dt$ diverge. (resp. si $\int_a^c f(t) dt$ diverge alors $\int_a^c g(t) dt$ diverge.)

EXERCICE 7.5 (critère de comparaison).

Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$.

7.5 Propriétés des intégrales impropres

Remarque. On donne dans cette section des théorèmes pour les intégrales du type :

$\int_a^{+\infty} f(t) dt$. Mais tous les résultats énoncés ci-après restent valables pour les intégrales du type : $\int_{-\infty}^b f(t) dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$, $\int_a^b f(t) dt$. Entraînez-vous à les écrire!

Théorème 7.7 (Linéarité).

Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ convergent alors :

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\int_a^{+\infty} \alpha f(t) + \beta g(t) dt$ converge et l'intégration est linéaire :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \int_a^{+\infty} \alpha f(t) + \beta g(t) dt = \alpha \int_a^{+\infty} f(t) dt + \beta \int_a^{+\infty} g(t) dt.$$

Remarque. On ne peut écrire $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\int_a^{+\infty} \alpha f(t) + \beta g(t) dt = \alpha \int_a^{+\infty} f(t) dt + \beta \int_a^{+\infty} g(t) dt$ que si les deux intégrales de droite convergent, et pas seulement si l'intégrale de gauche converge!

Remarque.

Le plus simple est de revenir à l'intégrale partielle pour laquelle il n'y a pas de problème de convergence.

Sinon, il faut d'abord prouver la convergence de chaque morceau avant d'opérer.

Théorème 7.8 (Relation de Chasles).

Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$, et un réel b de $[a, +\infty[$.

Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^{+\infty} f(t) dt$.

Théorème 7.9 (Positivité).

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$.

- Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge et si f n'est pas identiquement nulle sur $[a, +\infty[$ alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt > 0$.
- Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[a, +\infty[$.

Théorème 7.10.

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$.

L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si la fonction $x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$ est majorée sur $[a, +\infty[$.

Remarque.

De même si f est continue et positive sur $] -\infty, a]$, L'intégrale $\int_{-\infty}^a f(t) dt$ converge si et seulement si la fonction $x \rightarrow \int_x^a f(t) dt$ est majorée sur $] -\infty, a]$.

Théorème 7.11 (Croissance de l'intégration).

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$.

Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ convergent et que $f(t) \leq g(t)$ sur $[a, +\infty[$ alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \leq \int_a^{+\infty} g(t) dt.$$

7.6 Calcul des intégrales impropres

Théorème 7.12 (Intégration par parties et changement de variables).

On ne procède pas à une intégration par parties ou à un changement de variable, directement dans une intégrale impropre!!

On revient à l'intégrale partielle, ie on se ramène à une intégrale définie sur un segment et on passe ensuite à la limite.

EXERCICE 7.6.

1. Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$.
2. Calculer pour n entier naturel, $\int_1^{+\infty} \frac{(t-1)^n}{t^{n+2}} dt$.

Remarque.

Le changement de variable $u = -t$ conduit aux deux résultats utiles suivants :

1.

Théorème 7.13 (Parité).

Si f est paire et si $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge alors par changement de variable $u = -t$,

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

2.

Théorème 7.14 (Imparité).

Si f est impaire et si $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge alors par changement de variable $u = -t$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0$.

EXERCICE 7.7 (Calcul changement de variables).

Calculer $\int_0^1 \frac{e^{-1/t}}{t^2} dt$. (poser $u = 1/t$)

EXERCICE 7.8.

Nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Définition 7.6 (Convergence absolue).

Si $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ converge on dit que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge absolument.

Théorème 7.15 (Convergence absolue).

Toute intégrale absolument convergente est convergente.

Attention la réciproque est fausse!

Remarque.

Ce théorème permet d'appliquer les critères de comparaison précédents à des fonctions au signe changeant.

Théorème 7.16 (Inégalité triangulaire).

Si f est continue (ou continue par morceaux) sur $[a, +\infty[$ et si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge absolument, alors :

$$\left| \int_a^{+\infty} f(t) dt \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(t)| dt.$$

Remarque.

Tous les résultats énoncés ci-dessus restent valables pour les intégrales du type :

$$\int_{-\infty}^b f(t) dt \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \text{ et } \int_a^b f(t) dt. \text{ Entraînez-vous à les écrire!}$$

7.7 Applications

Parmi les applications du calcul intégral, il y a : - l'étude de fonction définie par une intégrale.

- [Le retour de la série :] Si f est positive continue ou continue par morceaux et décroissante, alors

la série : $\sum_{k \geq 0} f(k)$ et l'intégrale impropre en $+\infty$: $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.

L'avantage d'étudier la convergence de l'intégrale plutôt que celle de la série est que l'on a plus de primitives et que l'on peut y faire des intégrations par parties.

- l'étude de la nature de suites de la forme : $u_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t) dt$.

EXERCICE 7.9.

Soit a un réel positif et f une fonction continue, positive et décroissante sur $[a; +\infty[$, de limite 0 en $+\infty$.

1. Montrer que $\sum f(n)$ et $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.

2. Quelle est la nature de la série : $\sum \frac{1}{n \ln n}$?

EXERCICE 7.10 ([Nature d'une suite](#)).

1. Justifier que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge.

2. Nature de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n.$$

Feuille d'exercices n°7

INTEGRALES IMPROPRES.

Exercice 1. Montrer qu'une intégrale est cv

: thme de comparaison

1. Nature de $I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt.$

2. Nature de $J = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}+t} dt.$

Exercice 2. Montrer qu'une intégrale est cv

: thme d'équivalence

1. Nature de $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt.$

2. Nature de $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{t+e^{2t}} dt.$

3. Nature de $I_3 = \int_0^1 \frac{1+\sqrt{t}}{t^2+t} dt.$

4. Nature de $I_4 = \int_0^2 \frac{1-e^t}{t} dt.$

Exercice 3. Montrer qu'une intégrale est cv

: thme de négligeabilité

1. Nature de $P = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt.$

2. Nature de $A = \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt.$

3. Nature de $F = \int_1^{+\infty} \frac{3+\ln t}{t+t^2+2t^3} dt.$

Exercice 4. Montrer qu'une intégrale est cv
par l'ABSCV

Etudier la nature de l'intégrale suivante : $I = \int_0^1 \frac{\ln t + 3}{\sqrt{t}} dt$.

Exercice 5. Montrer qu'une intégrale est cv
par calcul de l'intégrale

1. Nature de $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln^2(t)} dt$.

2. Nature de $\int_0^{1/2} \frac{1}{t \ln(t)} dt$.

Exercice 6. Intégrales multi-impropres

1. Etudier la nature de $C = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

2. Etudier la nature de $D = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2 + 1} dt$.

3. Soit f la fonction définie par

$$f: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| \geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Etudier la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

Exercice 7. Parité ou imparité

Etudier la nature de :

1. $F = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|} dx$.

2. $G = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$.

Exercice 8. Calculs d'intégrales

Montrer que les intégrales convergent et les calculer :

1. $H = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)} dt$.

2. $I = \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt$.

3. $K = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x} dx$.

4. $M = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$. (Penser à une IPP)

5. $N = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$. (Penser à une IPP)

6. $O = \int_0^1 \frac{\ln t}{(3+t)^2} dt$. (Penser à une IPP)

7. $P = \int_0^1 \frac{2t^2 + 1}{\sqrt{1-t}} dt$. (Penser à un changement de variable affine)

8. $Q = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$. (Penser à un changement de variable $u = \sqrt{t}$)

Exercice 9. Encadrer une intégrale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = \frac{t}{e^t - 1}$.

1. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.
2. Prouver que $I \geq 1$.

Exercice 10. EDHEC 2008

Partie 1 : préliminaires

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$. On se propose, dans cette question, de démontrer un résultat classique sur les sommes de Riemann associées à cette fonction.

(a) Montrer qu'il existe un réel M strictement positif tel que, pour tout couple (x, y) d'éléments de $[0, 1]$ on a : $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [[0, n-1]], \forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq M\left(t - \frac{k}{n}\right)$

(c) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [[0, n-1]],$

$$\left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n^2}$$

(d) En sommant la relation précédente, établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}$

(e) Conclure finalement que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f(t) dt$.

2. Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose $I(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$

(a) Montrer que : $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$.

(b) En déduire que : $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)$.

(c) Déterminer $I(p+q, 0)$ et montrer finalement que : $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

3. Informatique.

Compléter la déclaration récursive suivante afin qu'elle permette le calcul de $I(p, q)$:

```
import numpy as np
def u(p,q):
    if q == 0 :
```

```

else :      i = ....
           i = .....
           return i

```

Exercice 11. EDHEC 2004

Le but de cet exercice est de calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$ et on a, en particulier, $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t} dt$

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n .
2. Calculer u_0 et u_1 .
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ln(2)$
(c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln(2) - u_n$ sous la forme d'une intégrale.
(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}$
(c) Donner la limite de la suite (u_n)
5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$.
(a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n .
(b) Montrer que : $\forall n \geq 2, 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n-1}$
(c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$, puis donner la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

Exercice 12. EDHEC 2003

On note f la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par : $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. (a) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, montrer que l'intégrale $I_n = \int_n^{+\infty} f(x) dx$ est convergente et exprimer I_n en fonction de n .
(b) En déduire que $I_n \sim \frac{1}{n}$.
2. Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.
3. (a) Établir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$.
(b) En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

- (c) Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

Exercice 13. ECRICOME 2006

Pour tout entier naturel n , on définit la fonction f_n de la variable réelle x par :

$$f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

1. Justifier que $f_n(x)$ est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$.

2. Prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$

3. On pose $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$

(a) A l'aide d'une intégration par parties portant sur des intégrales définies sur le segment $[0, A]$ avec $A \geq 0$, prouver que pour tout entier naturel n :

$$I_{n+2} = (n+1) I_n$$

(b) En utilisant la loi normale centrée réduite, justifier que :

$$I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(voir preuve dans chap 12)

(c) Donner la valeur de I_1 . (voir preuve dans chap 12)

(d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!} \\ I_{2n+1} &= 2^n n! \end{aligned}$$

Exercice 14. ECRICOME 2012**Partie I. Étude d'une fonction f .**

On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels positifs par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Ecrire le développement limité de $f(x)$ l'ordre 2, au voisinage de 0. En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
3. Justifier la dérivabilité de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis déterminer la fonction φ telle que :

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

4. Étudier les variations de φ . En déduire le tableau de variation f qui sera complété par la limite de f en $+\infty$.

Partie II. Étude d'une suite.

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u} du$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n \geq \frac{1}{e} \ln(n+1)$$

Donner la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2. Prouver l'existence de l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$.
3. Utiliser un changement de variable affine pour montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leq \int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n \leq \int_0^1 f(x) dx$$

4. Donner alors un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 15. EML 1996

Pour tout entier naturel n , on note $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$
 (b) En déduire que la suite (I_n) converge et donner sa limite.
2. A l'aide d'une intégration par parties, établir que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \frac{1}{(n+1)e} + \frac{I_{n+1}}{n+1}$$

3. (a) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq I_n - \frac{1}{(n+1)e} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$
 (b) Trouver un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 16. HEC 2014

Partie I. Un équivalent d'une intégrale

1. Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1[$, à valeurs réelles, telle que :
 $N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x) \ln(1-x)$.
 (a) Montrer que la fonction N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$.
 (b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a : $\ln(1-x) \leq -x$.
 (c) On note N' la fonction dérivée de la fonction N . Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a $N'(x) \leq 0$.
 (d) En déduire pour tout $x \in [0, 1[$, un encadrement de $N(x)$.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, 1[$, à valeurs réelles, telle que : $f(x) = -2 \frac{x + \ln(1-x)}{x^2}$.

- (a) Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$
- (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore f la fonction ainsi prolongée.
- (c) Sous réserve d'existence, on note f' la fonction dérivée de f .
Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $f'(x) = -2 \frac{N(x)}{x^3(1-x)}$.
- (d) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0, 1[$.
En déduire que f réalise une bijection strictement croissante de $[0, 1[$ dans $[1, +\infty[$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, 1[$: $g_n(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2} f(x)\right)$.
- (a) Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^1 g_n(x) dx$. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
- $$I_n = \int_0^1 g_n(x) dx.$$
- (b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a :
- $$0 \leq g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right).$$
- (c) En déduire l'encadrement (on fera un changement de variable $t = \sqrt{n}x$) :
- $$0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2}\right)$$
- avec $\Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$.
- (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
- $$0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \text{ (on admettra que la fonction } \Phi \text{ est majorée par 1).}$$
4. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{\ln(n+2)}$.
- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 < v_n < 1$.
- (b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n = f(v_n)$. Établir la convergence de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$; déterminer sa limite.
- (c) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les inégalités suivantes :
- $$\begin{aligned} I_n &\geq \int_0^{v_n} g_n(x) dx \geq \int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2} w_n\right) dx \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{nw_n}} \int_0^{v_n \sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du. \end{aligned}$$
- (d) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement : $\frac{2}{\sqrt{w_n}} \left(\Phi(v_n \sqrt{nw_n}) - \frac{1}{2}\right) \leq I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \leq 1$. (on s'aidera de 3c)
- (e) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$ (on admettra que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1$).

Exercice 17. HEC 2000

1. Montrer que, pour tout nombre réel $x > 0$ et tout entier naturel k , l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^5} dt$$

est convergente.

Pour quelles valeurs de l'entier k cette intégrale est-elle aussi convergente pour $x = 0$?

2. On se propose d'étudier la fonction F définie, pour $x \geq 0$, par $F(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^5} dt$.
Montrer que F est une fonction strictement positive, décroissante et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

3. (a) Montrer que, pour tout réel $t \geq 0$, tout réel $x \geq 0$ et tout réel $h \geq 0$, on a :

$$\left| e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t h e^{-tx} \right| \leq \frac{t^2 h^2}{2} e^{-tx}$$

- (b) Montrer de même que, pour tout réel $t \geq 0$, tout réel $x \geq 0$ et tout réel $h \leq 0$, on a :

$$\left| e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t h e^{-tx} \right| \leq \frac{t^2 h^2}{2} e^{-t(x+h)}$$

- (c) En déduire que pour tout réel $x \geq 0$ et tout réel h tel que $x+h \geq 0$, on a :

$$\left| F(x+h) - F(x) + h \int_1^\infty \frac{t e^{-xt}}{1+t^5} dt \right| \leq \frac{h^2}{2} \int_1^\infty \frac{t^2}{1+t^5} dt$$

- (d) Montrer enfin que la fonction F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et donner une expression de sa fonction dérivée F' .

4. Montrer de même que F' est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $F''(x) = \int_1^\infty \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^5} dt$

5. On se propose de montrer que la fonction $\ln(F)$ est convexe.

- (a) Montrer que si a , b et c sont trois nombres réels tels que, pour tout réel λ , on ait l'inégalité : $a\lambda^2 + 2b\lambda + c \geq 0$, alors, nécessairement, $ac - b^2 \geq 0$.
(b) En déduire que la fonction $\ln(F)$ est une fonction convexe.