Fonctions polynôme de degré 2

1 Généralités

Définition : polynôme de degré 2

Soient a, b et c des nombres réels avec $a \neq 0$.
On appelle **polynôme du second degré** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

Remarques

On parle aussi de trinôme du second degré.
Si le coefficient a est nul, on retrouve l'expression littérale d'une fonction affine.

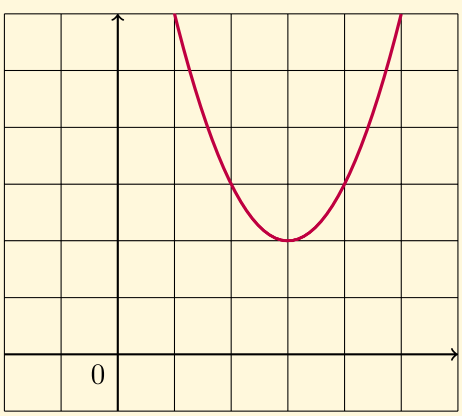
Exemple

- $3x^2 - 9x + 1$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = 3$, $b = -9$ et $c = 1$.
- $-x^2 - 8$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = -1$, $b = 0$ et $c = -8$.
- $(6x - 7)(2x + 3)$ est une fonction polynôme du second degré également.
- $\dfrac{2}{3}x^6 - 2x^3 + 2x - 1$ n'est pas une fonction polynôme du second degré. Elle est de degré 6.

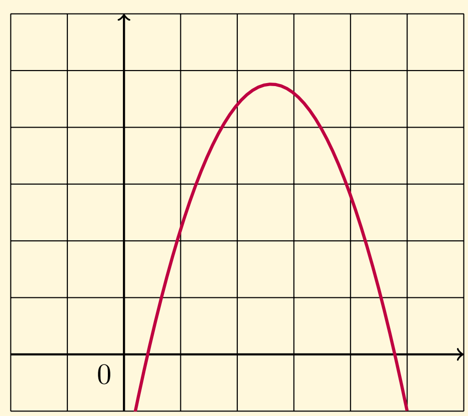
Définition : parabole

La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est appelée une **parabole**.

Si le coefficient $a > 0$, la parabole est orientée vers le haut.

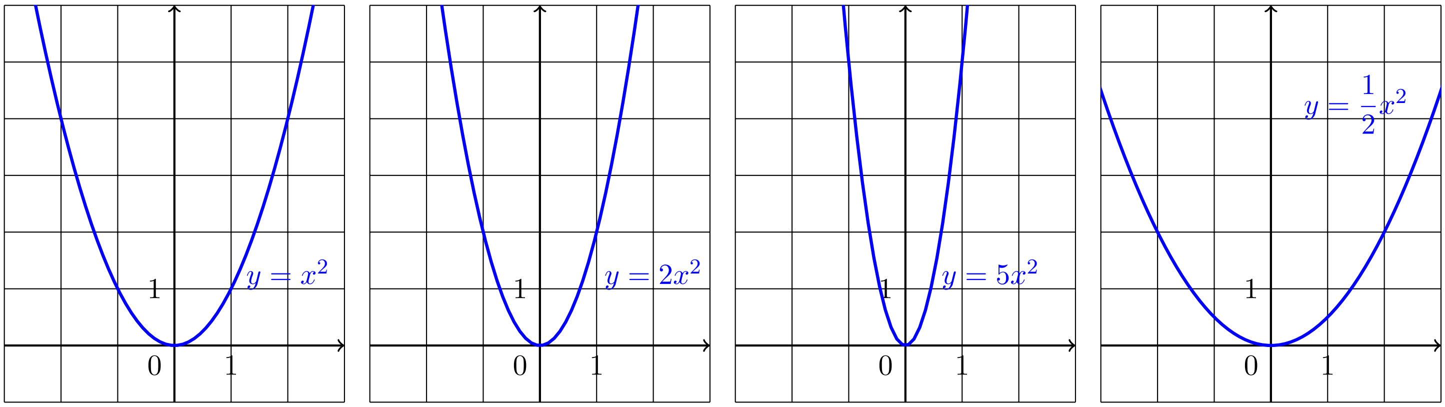


Si le coefficient $a < 0$, la parabole est orientée vers le bas.

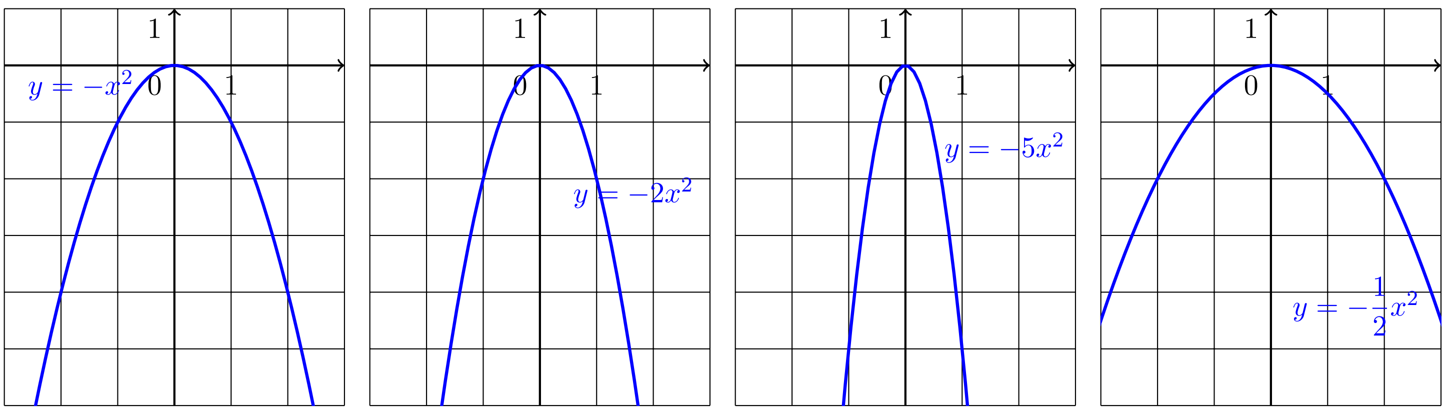


2 Représentations graphiques

Exemples : quelques paraboles représentatives de $x \mapsto ax^2$ avec $a > 0$



Exemples : quelques paraboles représentatives de $x \mapsto ax^2$ avec $a < 0$



Propriétés

Soit f un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + c$.
La courbe représentative de f est une parabole, image de la parabole d'équation $y = ax^2$ par la translation de vecteur $(0\,;\,c)$.

La parabole a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées.
Le sommet de la parabole est le point de coordonnées $(0\,;\,c)$.

Propriétés

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.

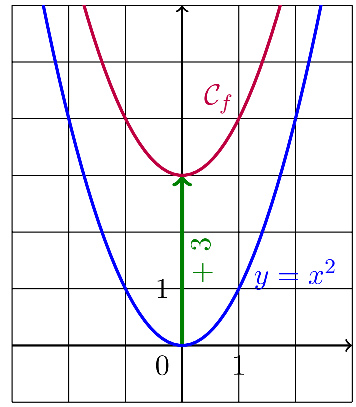
- Le sommet de la parabole représentative de f a pour abscisse $-\dfrac{b}{2a}$.
- La parabole représentative de f admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Exemples

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2 + 3$.

  C'est un polynôme du second degré avec $a = 1$, $b = 0$ et $c = 3$.

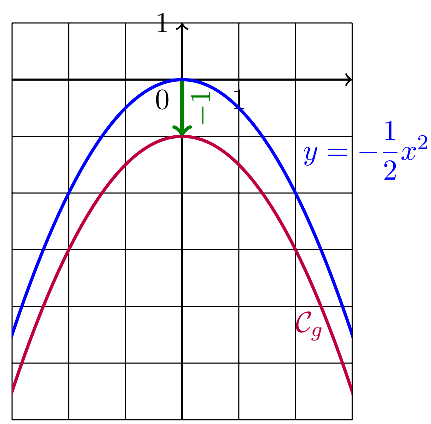
  Ci-contre, la parabole représentative de la fonction f comparée avec la courbe représentative de la fonction carrée.
  On peut visualiser la translation de vecteur $(0\,;+3)$ qui permet de passer de la courbe représentative bleue (celle de à la rouge (celle de la fonction f).



- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto -\dfrac{1}{2}x^2 - 1$.

  C'est un polynôme du second degré avec $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = 0$ et $c = -1$.

  Ci-contre, la parabole représentative de la fonction g comparée avec la courbe représentative de la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{2}x^2$.
  On peut visualiser la translation de vecteur $(0\,;-1)$ qui permet de passer de la courbe représentative bleue (celle de à la rouge (celle de la fonction g).



3 Forme factorisée

Définition : racine

Soit a, x_1 et x_2 des nombres réels avec $a \neq 0$.

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ sont des polynômes du second degré.
Les nombres x_1 et x_2 sont appelées les **racines** de du polynôme.
Ce sont les nombres (éventuellement égaux) solution de l'équation $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Définition : forme factorisée

Quand un polynôme f du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ possède deux racines x_1 et x_2, il peut s'écrire sous la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$. Cette dernière forme est appelée la **forme factorisée** de f.

Remarque

Tous les polynômes du second degré n'admettent pas forcément des racines dans $\mathbb{R}$.

Propriétés

Soit f un polynôme du second degré dont la forme factorisée est $a(x-x_1)(x-x_2)$.

- L'axe de symétrie de la parabole représentative de f a pour équation $x = \dfrac{x_1+x_2}{2}$.
- Le sommet de la parabole représentative de f a pour abscisse $\dfrac{x_1+x_2}{2}$.
- La parabole représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses aux points $(x_1\,;\,0)$ et $(x_2\,;\,0)$.

Exemples

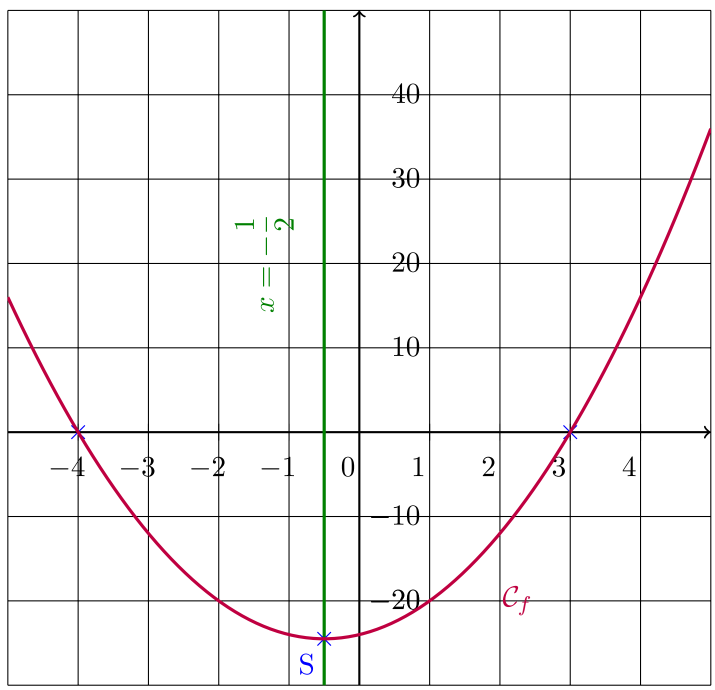
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 2(x-3)(x+4)$.

- 3 et -4 sont les deux racines de f.
  La courbe représentative de f passe donc par les points $(3\,;\,0)$ et $(-4\,;\,0)$.
- Puisque $2 > 0$ la parabole représentative de f est orientée vers le haut.
- $\dfrac{x_1+x_2}{2} = \dfrac{3+(-4)}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

  La droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la parabole représentative de f.
- Le sommet de la parabole a pour abscisse $-\dfrac{1}{2}$.

  Et $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(-\dfrac{1}{2}-3\right)\left(-\dfrac{1}{2}+4\right) = -\dfrac{49}{2}$.

  Ce sommet est représenté par le point S.



4 Signe d'un polynôme de degré 2

Propriété

Soit f un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

- Si f n'admet aucune racine réelle alors $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	

- Si f admet une seule racine réelle, notée x_0, alors $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et s'annule en x_0 :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de a	

- Si f admet deux racines distinctes x_1 et x_2 alors $f(x)$ est du signe de a sauf entre les racines :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Exemples

On reprend la fonction f de l'exemple précédent définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 2(x-3)(x+4)$.

Puisque $2 > 0$ et que f possède deux racines, $f(x)$ est positif sur $]-\infty\,;\,-4[$ puis négatif sur $]-4\,;\,3[$ puis positif sur $]3\,;\,+\infty[$.

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Polynômes de degré 2

> Représentations graphiques

Exercice n°1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 3x + 1$.

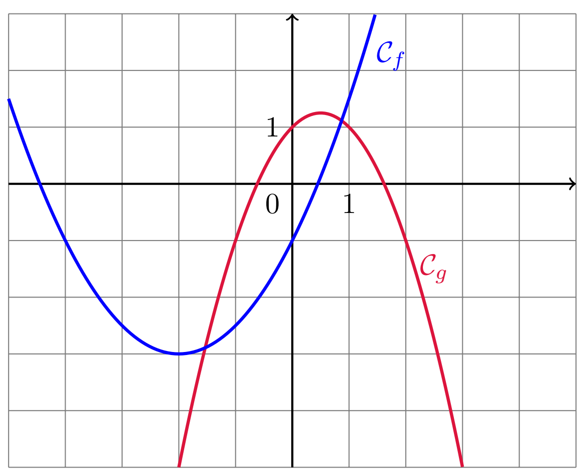
1. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole représentative de la fonction f.
2. La parabole sera-t-elle orientée vers le haut ou vers le bas ?
3. Donner le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

Exercice n°2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2 + 4x - 1$.

1. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole représentative de la fonction f.
2. La parabole sera-t-elle orientée vers le haut ou vers le bas ?
3. Donner le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

Exercice n°3

1. On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f. Construire son tableau de variations sur l'intervalle $\left[-5\,;\,\frac{3}{2}\right]$.
2. On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction g. Construire son tableau de variations sur l'intervalle $[-2\,;\,3]$.
3. Donner l'équation de l'axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f.
4. Donner l'équation de l'axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction g.

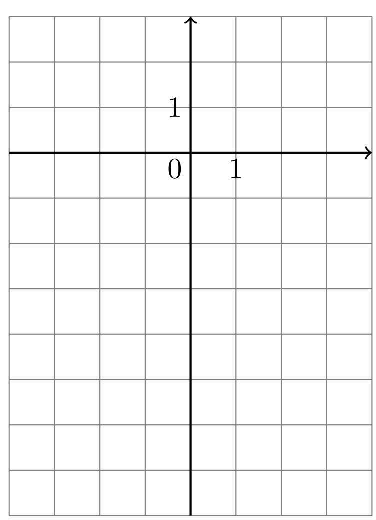


Exercice n°4

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto 2x^2 - 8$.

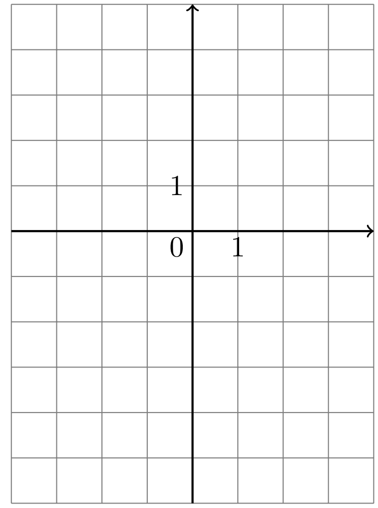
Soit $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les coordonnées du sommet de $\mathcal{C}_g$.
2. Déterminer l'équation de l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_g$.
3. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des abscisses.
4. À l'aide des précédentes questions, tracer une allure de $\mathcal{C}_g$.



Exercice n°5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -4x^2 + 4$.
Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

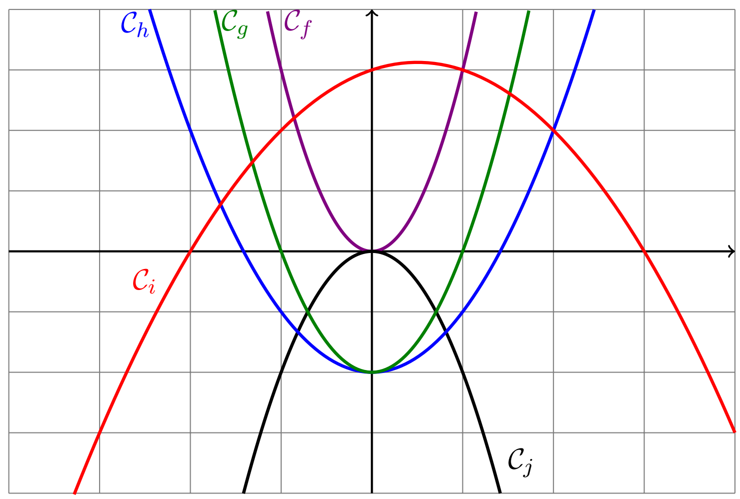


1. Déterminer les coordonnées du sommet de $\mathcal{C}_f$.
2. Déterminer l'équation de l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
3. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
4. À l'aide des précédentes questions, tracer une allure de $\mathcal{C}_f$.

Exercice n°6 On donne ci-dessous plusieurs représentations graphiques de polynômes de degré 2.

Associer chaque courbe représentative à son expression parmi celles proposées ci-dessous.

- $x \mapsto 3x^2$
- $x \mapsto -2x^2$
- $x \mapsto x^2 - 2$
- $x \mapsto 2(x-1)(x+1)$
- $x \mapsto -\frac{1}{2}(x+2)(x-3)$



> Différentes formes d'un même polynôme du second degré

Exercice n°7 Donner la forme développée des polynômes du second degré suivants :

a. $f(x) = (x+3)(x-2)$ **b.** $g(t) = 4t(t+7)$ **c.** $h(n) = -\frac{1}{2}(n-2)(n+5)$

Exercice n°8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 6x - 24$.

1. Montrer que 2 est une racine de f.
2. On admet que f admet deux racines distinctes : 2 et α où $\alpha \in \mathbb{R}$. Le polynôme f peut donc s'écrire sous la forme $3(x-2)(x-\alpha)$. Déterminer la valeur de α.
3. Donner alors la forme factorisée de f.

Exercice n°9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 - 9x + 30$.

1. Montrer que pour tout réel x on a $f(x) = -3(x-2)(x+5)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. En déduire les coordonnées des points d'intersection entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f.

Exercice n°10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 8x - 42$.

1. Montrer que 3 est une racine de f.
2. En déduire la deuxième racine de f.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f.

> Étude des polynômes du second degré

Exercice n°11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 + 4x - 8$.

1. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole représentative de la fonction f ainsi que l'équation de l'axe de symétrie de cette parabole.
2. Quel est le maximum de la fonction f et en quel réel est-il atteint ?
3. Établir le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition.
4. Montrer que pour tout réel x on a $f(x) = 4(x-1)(x+2)$.
5. Établir le tableau de signe de la fonction f.

Exercice n°12 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = -3t^2 + 3t + 60$.

1. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole représentative de la fonction g ainsi que l'équation de l'axe de symétrie de cette parabole.
2. Quel est le maximum de la fonction g et en quel réel est-il atteint ?
3. Montrer que -4 est une racine de g.
4. En déduire la valeur de la deuxième racine de g.
5. Établir le tableau de signe de la fonction g.

Exercice n°13 Une entreprise fabrique des objets.

Le bénéfice de cette entreprise, en milliers d'euros, pour la fabrication et la vente de x centaines d'objets est donné par la fonction B définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 6x - 4$.

1. Quel sera le bénéfice réalisé par l'entreprise si elle fabrique et vend 200 objets ?
2. Quel sera le bénéfice réalisé par l'entreprise si elle fabrique et vend 500 objets ?
3. Dresser le tableau de variation de la fonction B sur $[0\,;6]$.
4. En déduire le nombre d'objets que l'entreprise doit fabriquer et vendre pour réaliser un bénéfice maximal. Donner la valeur de ce bénéfice maximal.

Exercice n°14 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{2}\left(x + \dfrac{1}{2}\right)(x-9)$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2. En déduire le tableau de signe de la fonction f.
3. Donner la forme développée du polynôme f.
4. Déterminer le minimum de la fonction f et dire en quelle valeur ce minimum est atteint.

Exercice n°15

L'entreprise de Jean-Kevin réalise un bénéfice sur la vente d'une quantité q de métaux, entre 0 et 9 tonnes. Ce bénéfice est défini par la fonction B

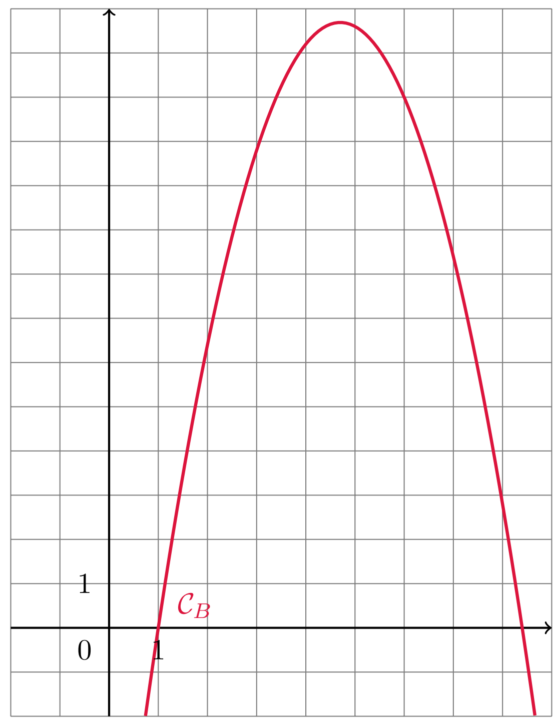
$$B : q \mapsto -q^2 + 9,4q - 8,4$$

On désire connaître les points morts, c'est à dire les quantités pour lesquelles le bénéfice vaut 0.

1. Vérifier que 0 n'est pas un point mort.
2. À l'aide du programme Python ci-dessous, établir la liste des bénéfices par tonne de 0 à 9 tonnes.

```python
B=[-q**2+9.4*q-8.4 for q in range(10)]
print(B)
```

3. En déduire la valeur d'un point mort. On notera cette valeur q_1.
4. On suppose qu'il existe un deuxième point mort que l'on note q_2. Ainsi, B peut s'écrire sous la forme $B(q) = -(q - q_1)(q - q_2)$. Déterminer la valeur de q_2.
5. Établir le tableau de signe de la fonction B.
6. Quelles sont les quantités qui permettent de réaliser un bénéfice positif ?
7. Pour quelle valeur de q a-t-on un bénéfice maximal ?



Exercice n°16 Soient $f : x \mapsto x^2 + 4x$ et $g : x \mapsto -\dfrac{1}{2}x - 2$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leur courbe représentative.

L'objectif de cet exercice est de déterminer pour quelles valeurs de x, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.

1. Pour tout réel x, on pose $h(x) = g(x) - f(x)$. Déterminer l'expression de $h(x)$.
2. Montrer que -4 est une racine de h.
3. En déduire la valeur de la deuxième racine de h.
4. Établir le tableau de signe de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
5. Répondre alors à l'objectif de l'exercice.
6. Visualiser cette réponse à l'aide de la calculatrice.