

## Équations différentielles : L'essentiel du cours

### a) Équations différentielles de la forme $y' + ay = 0$

Les fonctions solutions de l'équation différentielle  $y' + ay = 0$  ( $a \neq 0$ ) sont les fonctions  $f$  de la forme  $f(x) = k e^{-ax}$ .

#### ► Exemples :

- Résolution de l'équation différentielle  $y' + 3y = 0$  :

On a bien la forme  $y' + ay = 0$  avec  $a = 3$ .

Les solutions sont définies par  $f(x) = k e^{-ax} = k e^{-3x}$ .

- Résolution de l'équation différentielle  $2y' - 3y = 0$  :

$2y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{3}{2}y = 0$  (en divisant toute l'équation par 2)

On a bien maintenant la forme  $y' + ay = 0$  avec  $a = -\frac{3}{2}$ .

Les solutions sont définies par  $f(x) = k e^{-ax} = k e^{\frac{3}{2}x}$ .

- Détermination de **la** solution de l'équation différentielle  $y' + 5y = 0$  telle que  $f(0) = 4$  :

- On commence par déterminer la forme de **toutes** les solutions :

On a bien la forme  $y' + ay = 0$  avec  $a = 5$ .

Les solutions sont définies par  $f(x) = k e^{-ax} = k e^{-5x}$ .

- On cherche maintenant la seule solution vérifiant la condition donnée  $f(0) = 4$  :

On sait que  $f(x)$  est de la forme  $f(x) = k e^{-5x}$ , donc on doit avoir  $f(0) = k e^0 = k$ .

Pour avoir  $f(0) = 4$ , il faut donc prendre  $k = 4$ .

La solution cherchée est donc définie par  $f(x) = 4 e^{-5x}$

### b) Équations différentielles de la forme $y' + ay = b$

Les fonctions solutions de l'équation différentielle  $y' + ay = b$  ( $a \neq 0, b \neq 0$ ) sont les fonctions  $f$  de la forme  $f(x) = k e^{-ax} + \frac{b}{a}$ .

#### ► Exemples :

- Résolution de l'équation différentielle  $y' + 4y = 8$  :

On a bien la forme  $y' + ay = b$  avec  $a = 4$  et  $b = 8$ .

Les solutions sont définies par  $f(x) = k e^{-ax} + \frac{b}{a} = k e^{-4x} + \frac{8}{4} = k e^{-4x} + 2$ .

- Résolution de l'équation différentielle  $2y' - 4y + 5 = 0$  :

$2y' - 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow y' - 2y + \frac{5}{2} = 0$  (en divisant toute l'équation par 2)  $\Leftrightarrow$

$y' - 2y = -\frac{5}{2}$  (en faisant passer le  $\frac{5}{2}$  dans le second membre).

On a bien maintenant la forme  $y' + ay = b$  avec  $a = -2$  et  $b = -\frac{5}{2}$ .

Les solutions sont définies par  $f(x) = k e^{-ax} + \frac{b}{a} = k e^{2x} + \frac{-\frac{5}{2}}{-2} = k e^{2x} + \frac{5}{4}$ .

- Détermination de **la** solution de l'équation différentielle  $y' + y = 7$  telle que  $f(0) = 1$  :

- On commence par déterminer la forme de **toutes** les solutions :

On a bien la forme  $y' + ay = b$  avec  $a = 1$  et  $b = 7$ .

Les solutions sont définies par  $f(x) = k e^{-ax} + \frac{b}{a} = k e^{-x} + 7$ .

- On cherche maintenant la seule solution vérifiant la condition donnée  $f(0) = 1$  :

On sait que  $f(x)$  est de la forme  $f(x) = k e^{-x} + 7$ , donc on doit avoir  $f(0) = k e^0 + 7 = k + 7$ .

Pour avoir  $f(0) = 1$ , il faut donc  $k + 7 = 1 \Leftrightarrow k = -6$ .

La solution cherchée est donc définie par  $f(x) = -6 e^{-x} + 7$

# Équations différentielles

## ► Exercice n°1

Déterminer les solutions sur  $\mathbb{R}$  des équations différentielles suivantes :

1.  $y' + 0,1y = 0$
2.  $3y' = 5y$
3.  $y' - 8y = 5$
4.  $2y + 3y' - 1 = 0$

## ► Exercice n°2

15 mg de pénicilline sont injectés dans le sang d'un patient.

On suppose que l'injection est instantanée et que la vitesse de son élimination est proportionnelle à la quantité restant dans le sang.

On note  $t$  le temps écoulé, en minute, après injection de la pénicilline, et  $f(t)$  la quantité, en milligramme, de pénicilline présente dans le sang à l'instant  $t$ .

La fonction  $f$ , ainsi définie, est la solution de l'équation différentielle  $y' = -0,04y$  telle que  $f(0) = 15$ .

1. En résolvant l'équation différentielle, déterminer  $f(t)$ .
2. Déterminer la quantité de pénicilline présente dans le sang du patient au bout de 40 minutes.
3. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .
4. Déterminer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ .
5. Déterminer la quantité moyenne de pénicilline présente dans le sang du patient étudié lors des 30 premières minutes.

## ► Exercice n°3

On note  $N(t)$ , la vitesse de rotation angulaire (en tours par minute) à l'instant  $t$  (en minutes) d'un disque lorsque sa rotation est freinée par un certain liquide.

Sachant que  $N$  est la solution de l'équation différentielle  $y' = -(\ln 100)y$  telle que  $N(0) = 1500$  :

1. En résolvant l'équation différentielle, déterminer  $N(t)$ .
2. Calculer la vitesse de rotation du disque à l'instant  $t = 1$  minute.
3. Déterminer le temps nécessaire pour que la vitesse de rotation du disque ne soit plus qu'un tour par minute.

## ► Exercice n°4

1. Déterminer la solution  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$ , de variable  $t$ , de l'équation différentielle  $y' + 0,0001y = 0,01$  telle que  $f(0) = 20$ .

2. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

3. Étudier les variations de  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

4. On chauffe un liquide dans une cuve. La température en degrés Celsius du liquide est donnée à l'instant  $t$  exprimé en secondes par  $f(t)$ , où  $f$  est la solution de l'équation différentielle déterminée à la question 1. Au bout de combien de temps la température atteint-elle 85C ? Donner la réponse en heures, minutes et secondes.

## ► Exercice n°5

Après de violents orages, des eaux de ruissellement contenant 4% de pesticides se déversent dans un bassin aménagé pour la baignade. Un système d'évacuation permet de maintenir dans le bassin un volume d'eau constant de 30 000 litres.

1. On admet que le volume de pesticides, en litres, dans ce bassin en fonction du temps  $t$ , exprimé en minutes, est la solution  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$  de l'équation différentielle  $y' + 0,005y = 6$  telle que  $f(0) = 0$ . Déterminer  $f(t)$ .
2. Des affections cutanées peuvent survenir dès que le taux de pesticide dans le bassin atteint 2%. Au bout de combien de minutes ce taux est-il atteint ?

# Équations différentielles

## ► Exercice n°1

1. L'équation différentielle est de la forme  $y' + ay = 0$  avec  $a = 0,1$ .  
Les solutions sont définies par  $f(x) = k e^{-ax} = k e^{-0,1x}$ .

2.  $3y' = 5y \Leftrightarrow y' = \frac{5}{3}y \Leftrightarrow y' - \frac{5}{3}y = 0$ .

L'équation différentielle est de la forme  $y' + ay = 0$  avec  $a = -\frac{5}{3}$ .

Les solutions sont définies par  $f(x) = k e^{-ax} = k e^{\frac{5}{3}x}$ .

3. L'équation différentielle est de la forme  $y' + ay = b$  avec  $a = -8$  et  $b = 5$ .

Les solutions sont définies par  $f(x) = k e^{-ax} + \frac{b}{a} = k e^{8x} + \frac{5}{-8} = k e^{8x} - \frac{5}{8}$ .

4.  $2y + 3y' - 1 = 0 \Leftrightarrow 3y' + 2y = 1 \Leftrightarrow y' + \frac{2}{3}y = \frac{1}{3}$ .

L'équation différentielle est de la forme  $y' + ay = b$  avec  $a = \frac{2}{3}$  et  $b = \frac{1}{3}$ .

Les solutions sont définies par  $f(x) = k e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = k e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}$ .

## ► Exercice n°2

15 mg de pénicilline sont injectés dans le sang d'un patient.

On suppose que l'injection est instantanée et que la vitesse de son élimination est proportionnelle à la quantité restant dans le sang.

On note  $t$  le temps écoulé, en minute, après injection de la pénicilline, et  $f(t)$  la quantité, en milligramme, de pénicilline présente dans le sang à l'instant  $t$ .

La fonction  $f$ , ainsi définie, est la solution de l'équation différentielle  $y' = -0,04y$  telle que  $f(0) = 15$ .

1. • Recherche de la forme des solutions de  $y' = -0,04y$  :

$$y' = -0,04y \Leftrightarrow y' + 0,04y = 0.$$

L'équation différentielle est de la forme  $y' + ay = 0$  avec  $a = 0,04$ .

Les solutions sont définies par  $f(t) = k e^{-at} = k e^{-0,04t}$ .

• Recherche de la solution telle que  $f(0) = 15$  :

$$f(0) = 15 \Leftrightarrow k e^0 = 15 \Leftrightarrow k = 15.$$

La solution cherchée est donc définie par  $f(t) = 15 e^{-0,04t}$ .

2.  $f(40) = 15 e^{-0,04 \times 40} \approx 3,03$  mg.

3.  $f'(t) = 15 (-0,04 e^{-0,04t}) = -0,6 e^{-0,04t}$  qui reste toujours négatif car un exponentiel est toujours strictement positif. Donc  $f$  est strictement décroissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

4.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,04t = -\infty$ , donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,04t} = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ .

5. Quantité moyenne =  $\frac{1}{30-0} \int_0^{30} f(t) dt = \frac{1}{30} \int_0^{30} 15 e^{-0,04t} dt$   
 $= \frac{1}{30} \left[ \frac{15}{-0,04} e^{-0,04t} \right]_0^{30} = \frac{1}{30} [-375 e^{-0,04t}]_0^{30} = \frac{1}{30} [-375 e^{-1,2} + 375]$   
 $= -12,5 e^{-1,2} + 12,5 \approx 8,73$  mg

## ► Exercice n°3

1. • Recherche de la forme des solutions de  $y' = -(\ln 100)y$  :

$$y' = -(\ln 100)y \Leftrightarrow y' + (\ln 100)y = 0.$$

L'équation différentielle est de la forme  $y' + ay = 0$  avec  $a = \ln 100$ .

Les solutions sont définies par  $f(t) = k e^{-at} = k e^{-(\ln 100)t}$ .

$N(t)$  est donc de la forme  $N(t) = k e^{-(\ln 100)t}$ .

• Recherche de la solution telle que  $N(0) = 1500$  :

$$N(0) = 1500 \Leftrightarrow k e^0 = 1500 \Leftrightarrow k = 1500.$$

La solution cherchée est donc définie par  $N(t) = 1500 e^{-(\ln 100)t}$ .

2.  $N(1) = 1500 e^{-(\ln 100)} = 1500 e^{\ln(\frac{1}{100})} = 1500 \times \frac{1}{100} = 15$  tours par minute.

3. Cela revient à chercher  $t$  tel que  $N(t) = 1$  :

$$N(t) = 1 \Leftrightarrow 1500 e^{-(\ln 100)t} = 1 \Leftrightarrow e^{-(\ln 100)t} = \frac{1}{1500}$$

$$\Leftrightarrow -(\ln 100)t = \ln\left(\frac{1}{1500}\right) \Leftrightarrow -(\ln 100)t = -(\ln 1500)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln 1500}{\ln 100} \approx 1,6 \text{ minutes.}$$

## ► Exercice n°4

1. • Recherche de la forme des solutions de  $y' + 0,0001y = 0,01$  :

L'équation différentielle est de la forme  $y' + ay = b$  avec  $a = 0,0001$  et  $b = 0,01$ .

Les solutions sont définies par  $f(t) = k e^{-at} + \frac{b}{a} = k e^{-0,0001t} + \frac{0,01}{0,0001} = k e^{-0,0001t} + 100$ .

• Recherche de la solution telle que  $f(0) = 20$  :

$$f(0) = 20 \Leftrightarrow k e^0 + 100 = 20 \Leftrightarrow k = -80.$$

La solution cherchée est donc définie par  $f(t) = -80 e^{-0,0001t} + 100$

2.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,0001t = -\infty$ , donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,0001t} = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} -80 e^{-0,0001t} = 0$ .

On en déduit que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 100$ .

3.  $f'(t) = -80 (-0,0001 e^{-0,0001t}) = 0,008 e^{-0,0001t} > 0$  sur  $[0 ; +\infty[$ .  $f$  est donc strictement croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

4. Cela revient à chercher  $t$  tel que  $f(t) = 85$ .

$$-80 e^{-0,0001t} + 100 = 85 \Leftrightarrow -80 e^{-0,0001t} = -15 \Leftrightarrow e^{-0,0001t} = \frac{15}{80} \Leftrightarrow$$

$$e^{-0,0001t} = 0,1875 \Leftrightarrow -0,0001t = \ln(0,1875)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,1875)}{-0,0001} \approx 16740 \text{ secondes. Ce qui correspond à 4 heures et 39 minutes.}$$

► **Exercice n°5**

1. • Recherche de la forme des solutions de  $y' + 0,005y = 6$  :

L'équation différentielle est de la forme  $y' + ay = b$  avec  $a = 0,005$  et  $b = 6$ .

Les solutions sont définies par :

$$f(t) = k e^{-at} + \frac{b}{a} = k e^{-0,005t} + \frac{6}{0,005} = k e^{-0,005t} + 1200.$$

• Recherche de la solution telle que  $f(0) = 0$  :

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow k e^0 + 1200 = 0 \Leftrightarrow k = -1200.$$

La solution cherchée est donc définie par  $f(t) = -1200 e^{-0,005t} + 1200$

2. 2% correspond à un volume de  $\frac{2}{100} \times 30000 = 600$  litres. On cherche donc  $t$  tel que  $f(t) = 600$ .

$$-1200 e^{-0,005t} + 1200 = 600 \Leftrightarrow -1200 e^{-0,005t} = -600 \Leftrightarrow e^{-0,005t} = 0,5$$

$$\Leftrightarrow -0,05t = \ln 0,5 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 0,5}{-0,005} \approx 139 \text{ minutes.}$$