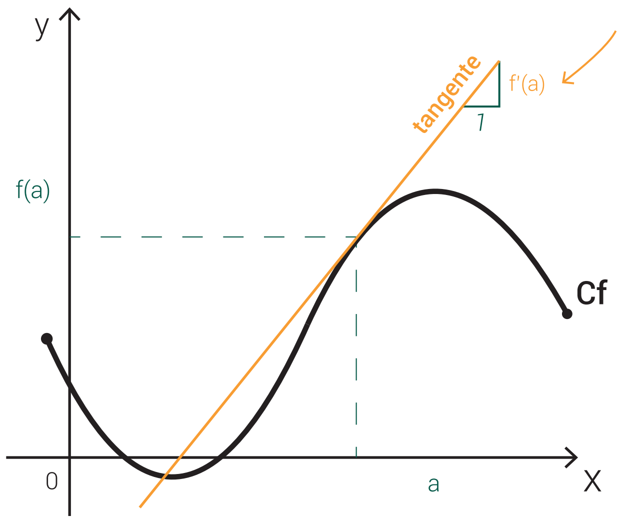
Rappels Dérivations

#TaleSpéMaths

NOMBRE DERIVEE : F'(A)



« pente de la tangente de la courbe représentative de f à l'abscisse a »

Equation réduite de la tangente :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

FONCTIONS DERIVEES

fonction f	***fonction dérivée f'***	***domaine définition***	***domaine dérivabilité***
k *constante $\in \mathbb{R}$*	0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^r	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
x	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^*_+$

OPERATIONS DE FONCTIONS

f	**f'**
$k.u$	$k.u'$
$u + v$	$u' + v'$
$u \times v$	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

FONCTIONS COMPOSEES

f	**f'**
$u(v)$ *(aussi noté $u^o v$)*	$v' \times u'(v)$
u^n	$n.u'.u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

voir fiches Exp/Ln

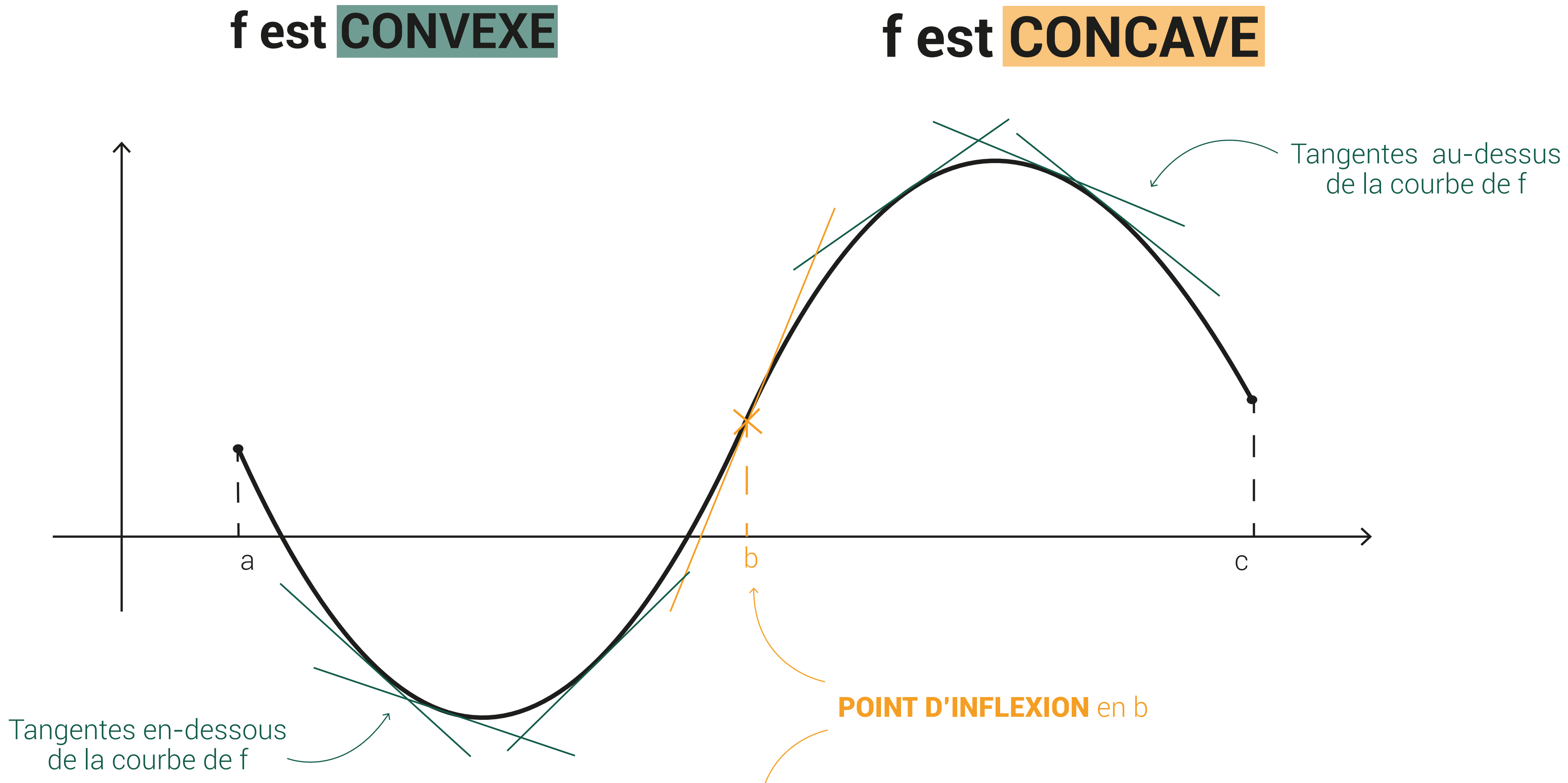
ETUDIER LES VARIATIONS DE F SUR F[A;B]

1. Je dérive f : f'
2. J'étudie le signe de f'
3. J'en déduis les variations de f
4. Calculer les valeurs aux bornes et extremum

exemple :

x	a c d b
f'	+ 0 - || -
f	↗ ↘ || ↘

Convexité



	x	a	b	c
	f	CONVEXE		CONCAVE
dérivée	*variation de* f'	↗		↘
dérivée seconde	*signe de* f''	+	0	−

Exercice 1 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 3x + 7)^5$.
2. g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{(x^2+5)^3}$.
3. h est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 2

On considère la fonction g définie sur $[-4\,;\,4]$ par $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$.

On note C_g la courbe représentative de la fonction g.

1. Étudier les variations de la fonction g sur $[-4\,;\,4]$ et dresser le tableau des variations.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C_g au point d'abscisse 1.
3. Étudier la convexité de la fonction g et montrer que la courbe C_g admet un point d'inflexion.
4. Déduire des questions précédentes le signe de la fonction h définie sur $[-4\,;\,4]$ par $h(x) = g(x) - (3x - 2)$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 10x^2e^{ax-1}$ où a est un nombre réel.

On note C_f la courbe représentative de f et on s'intéresse à ses éventuels points d'inflexion.

1. Démontrer que C_f admet deux points d'inflexion pour tout réel a non nul.
2. Étudier le cas où $a = 0$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = (2-x)\sqrt{4-x^2}$ et C sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. (a) Justifier que f est dérivable sur $]-2\,;\,2[$.

   (b) Déterminer la fonction dérivée de f et montrer que, sur $]-2\,;\,2[$, $f'(x)$ est du signe de $x^2 - x - 2$.
3. Étudier la dérivabilité de f en $x = -2$, puis en $x = 2$; donner une interprétation graphique des résultats obtenus.
4. Donner alors le tableau de variations de f.

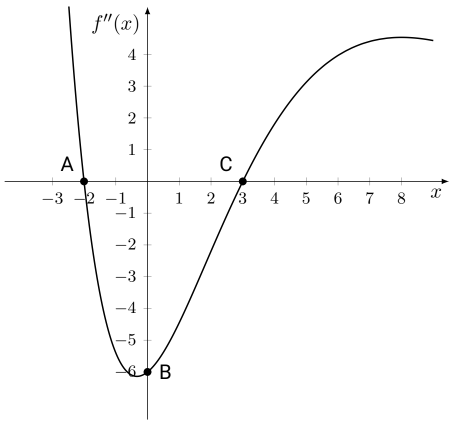
Exercice 1 :

1. On donne les fonctions u et v définies par $u(x) = -x^2 - 2x + 8$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de u et de v.
   (b) Justifier l'ensemble de définition de $v \circ u$ puis déterminer l'expression de $f(x) = v \circ u(x)$.
   (c) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$.
   (d) En déduire le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.
2. On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 5e^{x^3-9x}$.
   (a) Calculer $g'(x)$.
   (b) En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$.

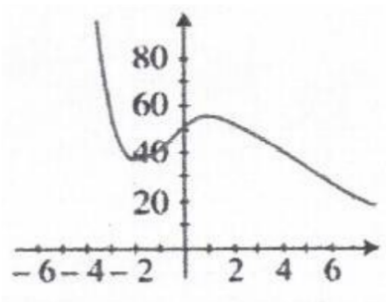
Exercice 2 :

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, dans un repère orthonormé.
Les points suivants appartiennent à la courbe : $A(-2;0)$; $B(0;-6)$ et $C(3;0)$.
Dans tout cet exercice, chaque réponse sera justifiée à partir d'arguments graphiques.

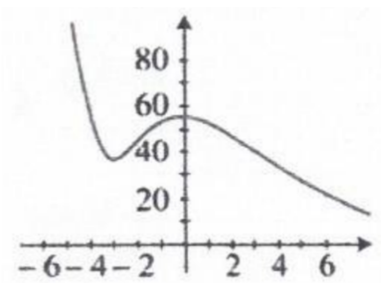
Courbe représentative de f''



1. La courbe représentative de f admet-elle des points d'inflexion ?
2. Sur $[-2;3]$, la fonction f est-elle convexe ? Est-elle concave ?
3. Parmi les deux courbes données ci-après, une seule est la représentation graphique de la fonction f : laquelle ? Justifier la réponse.



(a) *Courbe 1*



(b) *Courbe 2*

Exercice 3 :

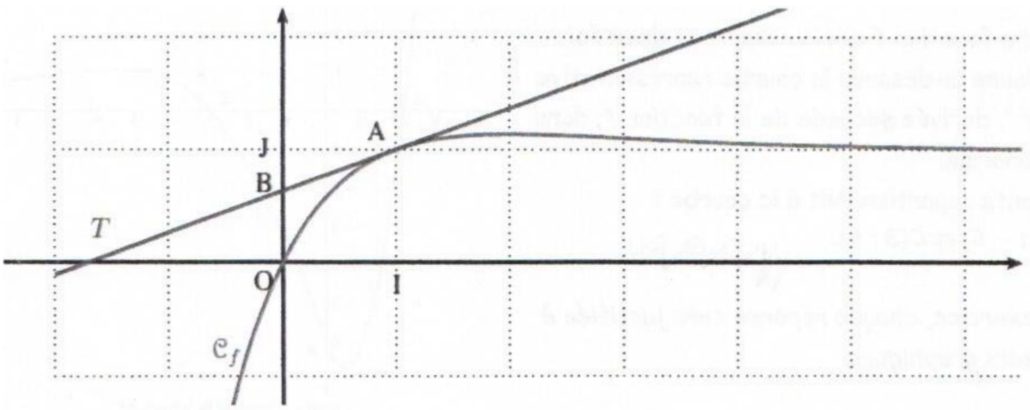
La fonction g est définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = 1 - e^{-x}$.
On admet que la fonction g est dérivable sur $[0;+\infty[$.

Partie A

1. Étudier les variations de la fonction g sur $[0;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.
2. Étudier la convexité de g.

Partie B

Dans cette partie, k désigne un réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^{-kx} + 1$.
On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f. Cette courbe est représentée ci-dessous pour une certaine valeur de k.
La tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1 coupe l'axe des ordonnées en un point noté B.



1. (a) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = e^{-kx}(-kx + k + 1)$.
   (b) Démontrer que l'ordonnée du point B est égale à $g(k)$ où g est la fonction définie dans la partie A.
2. En utilisant la partie A, démontrer que le point B Appartient au segment $[OJ]$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$$

On note C_f la représentation graphique de f. La droite d'équation $y = x - 1$ est notée Δ.

1. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Que peut-on en déduire pour C_f ?
2. Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in D$,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$$

3. Étudier la limite de $f(x) - (x - 1)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
4. Dresser le tableau de variation de f sur D.
5. Tracer l'allure de la courbe représentative C_f dans un repère du plan.

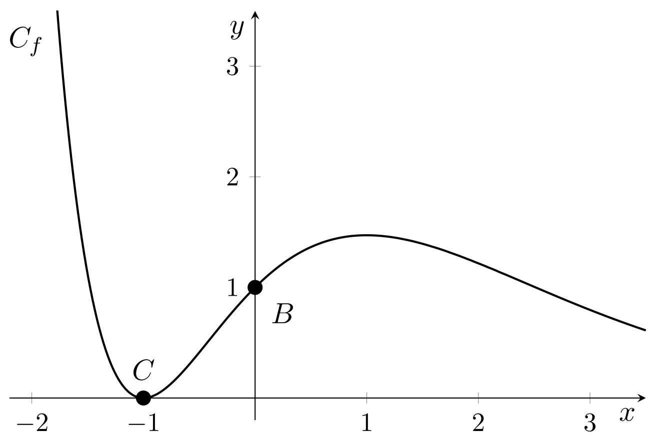
Exercice 2

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$$

où a, b et c sont trois réels à déterminer.

Voici la courbe représentative C_f :



ainsi que le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0			
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$	

1. À l'aide des renseignements portés sur la figure (voir annexe), déterminer les nombres a, b et c.
2. Compléter le tableau de variation en justifiant vos réponses.
3. On souhaite étudier la position relative de la courbe C_f et de la tangente T en $x = -1$ à C_f.
   (a) Donner l'équation de T.
   (b) Justifier que ce problème revient à déterminer le signe de $(x+1)\phi(x)$
   où $\phi(x) = (x+1)e^{-x} - 1$.
   (c) Étudier le signe de $\phi(x)$ et conclure.