Espaces préhilbertiens réels

Feuille d'exercices #14

Partie A – Produit scalaire, orthogonalité, bases orthonormales

⋆ **Exercice 1 —** Montrer que les applications suivantes définissent un produit scalaire sur E :

1. $(P,Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ avec $E = \mathbb{R}_n[X]$ $(n \in \mathbb{N})$.
2. $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t$ avec $E = \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$.
3. $(P,Q) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ avec $E = \mathbb{R}[X]$.

⋆ **Exercice 2 —** À quelle condition sur la matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'application $(X,Y) \mapsto \operatorname{Tr}(X^\top AY)$ définit-elle un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

⋆⋆ **Exercice 3 —** On considère des réels $a_0,\dots,a_n$ vérifiant $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$.
Montrer à l'aide de l'identité de polarisation que $P \mapsto \sum_{k=0}^{n} |P(a_k)|$ définit une norme non euclidienne sur $\mathbb{R}_n[X]$.

⋆⋆ **Exercice 4 —** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $[0,1]$.
À quelle condition sur (u_n) l'application $(f,g) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(u_n)g(u_n)}{n^2}$ définit-elle un produit scalaire sur $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$?

⋆ **Exercice 5 —** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \leqslant \sqrt{2^n(n+1)}$.

⋆ **Exercice 6 —** Soient E un espace préhilbertien réel et une application $f : E \to E$ telle que $f(0_E) = 0_E$ et pour tout $(x,y) \in E^2$, $\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$.

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$, $\|f(x)\| = \|x\|$ et $(f(x)|f(y)) = (x|y)$.
2. Démontrer que f est linéaire.

⋆⋆ **Exercice 7 —** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Montrer que E est un espace préhilbertien réel, c'est-à-dire que sa norme est issue d'un produit scalaire.

⋆ **Exercice 8 —** Soient E un espace préhilbertien réel et $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose qu'il existe $(e_1,\dots,e_n) \in E^n$ tels que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \|e_i\| = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \quad \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2 = \|x\|^2$$

Démontrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de E.

⋆⋆ **Exercice 9 —** Soit E un espace euclidien de dimension n.
On considère une base orthonormale $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et une famille de vecteurs $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ telle que $\sum_{i=1}^{n} \|\varepsilon_i\|^2 < 1$. Prouver que $(e_i+\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E.

⋆ **Exercice 10 —** Soient E un espace préhilbertien réel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. Montrer que si E est euclidien, $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

⋆⋆ **Exercice 11 —** On munit $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ du produit scal. $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
On note $F = \{f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ et $G = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}))$.
Montrer que $F^\perp = G^\perp = \{0\}$. Comparer alors F et $(F^\perp)^\perp$ ainsi que G et $(G^\perp)^\perp$.

⋆⋆ **Exercice 12 —** On note $\ell^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites réelles de carré sommable.

1. Montrer que $\ell^2(\mathbb{N})$ muni de l'application $(u,v) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est un espace préhilbertien réel.
2. Soient F le sous-espace des suites nulles à partir d'un certain rang ainsi que $G = \operatorname{Vect}(u)$ pour une certaine suite $u \in \ell^2(\mathbb{N}) \setminus F$.
Déterminer $F^\perp$ puis comparer $(F\cap G)^\perp$ et $F^\perp + G^\perp$.

⋆⋆ **Exercice 13 —** *Décomposition QR et inégalité d'Hadamard*
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note C_k la k-ième colonne de A pour $k \in [\![1,n]\!]$.

1. On suppose dans cette question que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. En orthonormalisant les colonnes de A, montrer qu'il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $R \in T_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = QR$. Pourquoi un tel couple (Q,R) est-il unique ?
2. En déduire que $|\det(A)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|C_k\|$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$; étudier le cas d'égalité.

⋆⋆ **Exercice 14 —** *Perturbation d'une base orthonormale*
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ et $f_1,\dots,f_n \in \mathbb{R}^n$ tels que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\|f_k - e_k\| < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que $(f_1,\dots,f_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer qu'en cas d'inégalité large, le résultat précédent serait faux.

⋆⋆ **Exercice 15 —** *Familles obtusangles*
On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Soient $v_1,\dots,v_p \in \mathbb{R}^n$ tels que $\langle v_i, v_j\rangle < 0$ lorsque $i \neq j$. Soient $x_1,\dots,x_p \in \mathbb{R}$. On pose $x = \sum_{i=1}^{p} x_i v_i$ et $y = \sum_{i=1}^{p} |x_i| v_i$.

1. Comparer $\|x\|$ et $\|y\|$.
2. Montrer que si $x = 0$, alors les réels x_i sont soit tous nuls, soit tous non nuls.
3. Prouver que la famille $(v_1,\dots,v_p)$ admet une sous-famille libre de $p-1$ vecteurs puis que $p \leqslant n+1$.
4. Trouver $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant les conditions de l'énoncé. Faire de même avec $v_1,\dots,v_{n+1}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Partie B – Projection orthogonale, distance à un s.e.v.

⋆ **Exercice 16 —** Dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$, on pose :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y\}$$

Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.

⋆ **Exercice 17 —** On munit $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel et on considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ d'équations :

$$\begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ x+2y+3z+4t = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer une base orthonormale de F ainsi que de $F^\perp$.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la proj. orthogonale sur F.
3. Pour tout $u \in E$, déterminer $d(u,F)$.

⋆ **Exercice 18 —** Soient E un espace préhilbertien réel et deux vecteurs $a, x \in E$ avec a non nul. On considère la droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}(a)$ et son orthogonal $H = D^\perp$. Exprimer $d(x,D)$ et $d(x,H)$ en fonction de $\|x\|$ et $\langle x|a\rangle$.

⋆ **Exercice 19 —** Soit p un projecteur orthogonal d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\|^2 = \langle p(x)|x\rangle$.
2. Prouver que pour toute base orthonormale $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, $\sum_{k=1}^{n} \|p(e_k)\|^2 = \mathrm{rg}(p)$.

⋆⋆ **Exercice 20 —** Soit E un espace préhilbertien réel et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal ssi $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in E$.

⋆⋆ **Exercice 21 —** Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que l'égalité $\langle P,Q\rangle = \int_0^1 PQ$ définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
3. Déterminer la projection orthogonale de X^3 sur F et calculer $d(X^3, F)$.

⋆⋆ **Exercice 22 —** On cherche à calculer $I = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (\mathrm{e}^{-t} - at - b)^2 \,\mathrm{d}t$.

On munit pour cela $\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ du produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $I = d(\varphi, F)^2$ pour une certaine application $\varphi \in \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ et un certain sous-espace vectoriel F de $\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ à préciser.
2. Déterminer le projeté orthogonal de φ sur F et en déduire I.

★★ **Exercice 23 —** Trouver comme dans l'exercice précédent $\inf\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{\lambda}{2^n}\right)^2$, $\inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{\pi} (a\sin x + b\cos x - x)^2 \,\mathrm{d}x$ et $\inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (x^2+ax+b)^2 \mathrm{e}^{-2x} \,\mathrm{d}x$.

★ **Exercice 24 —** Pour $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A|B\rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B)$. On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$) l'espace des matrices symétriques (resp. antisymétriques).

1. Montrer que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminer la projection orthogonale d'une matrice M sur $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $d(M, \mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\|M - M^\top\|$ pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
5. Calculer $d(M, \mathscr{A}_3(\mathbb{R}))$ avec $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

★ **Exercice 25 —** *Résolution approchée d'un système linéaire*
On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ de leur structure euclidienne canonique. Soient $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ et $b \in \mathbb{R}^n$, de matrices respectives A et B dans les bases canoniques associées.

1. Que peut-on dire lorsque $b \in \mathrm{Im}\, f$? En déduire la valeur de $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^p} \|f(x) - b\|$.
2. On suppose que $b \notin \mathrm{Im}\, f$ et on cherche $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^p} \|f(x) - b\|$.
   a) Montrer que ce problème de minimisation admet au moins une solution x_0 caractérisée par la condition $f(x_0) - b \in (\mathrm{Im}\, f)^\perp$.
   b) Montrer que la condition précédente équivaut matriciellement à la condition $A^\top A X_0 = A^\top B$. Si on suppose $A^\top A$ inversible, exprimer X_0.
   c) Montrer que la matrice $A^\top A$ est inversible ssi f est injective.
3. Résoudre de façon approchée le système d'équations données par $x + y = 1$, $x - y = 3$ et $2x + y = 2$.

★★ **Exercice 26 —** Soient $E = \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ et $\langle f, g\rangle = \int_0^1 \big(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\big) \,\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soient $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E \mid f'' = f\}$.
   Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux dans E.
3. En déduire $\inf\limits_{f\in H} \int_0^1 \big(f^2(t) + f'^2(t)\big) \,\mathrm{d}t$ où $H = \{f \in E \mid f(0) = \alpha, f(1) = \beta\}$.

★★ **Exercice 27 —** *Déterminant de Gram*
Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, on note :

$$A = (\langle x_i | x_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad G(x_1, \ldots, x_n) = \det(A)$$

A est appelée matrice de Gram et $G(x_1, \ldots, x_n)$ déterminant de Gram.

1. On suppose que E est un espace euclidien de dimension n.
   a) Exprimer A en fonction de la matrice M des coordonnées de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ dans une base orthonormale de E.
   b) Montrer que le rang de A est égal au rang de $(x_1, \ldots, x_n)$.
2. a) Montrer que $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée ssi $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$.
   b) Montrer que $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre ssi $G(x_1, \ldots, x_n) > 0$.
   c) Proposer une démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre, on note $F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$. Montrer que :
$$\forall x \in E, \quad d^2(x, F) = \frac{G(x, x_1, \ldots, x_n)}{G(x_1, \ldots, x_n)}$$
4. Démontrer par récurrence l'inégalité d'Hadamard :
$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, \quad G(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \|x_1\|^2 \cdots \|x_n\|^2.$$
   Étudier le cas d'égalité.

★★★ **Exercice 28 —** *Convergence faible*
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace préhilbertien réel E converge faiblement vers $u \in E$ si, et seulement si, pour tout $v \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle u_n|v\rangle = \langle u|v\rangle$.

1. Montrer que la limite faible u, lorsqu'elle existe, est unique.
2. Montrer que la convergence (au sens de la norme euclidienne) entraîne la convergence faible et que la réciproque est vraie en dimension finie.
3. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers u et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n\| = \|u\|$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u.
4. Étudier la convergence faible de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour une famille orthonormale.

Partie C – Polynômes orthogonaux

⋆ **Exercice 29 —** *Polynômes de Laguerre*

On note E l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continues telles que $x \mapsto f^2(x)\mathrm{e}^{-x}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose :

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f|g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien réel.
2. Justifier l'existence d'une base orthonormale $(L_n)_{n\in\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}[X]$ pour ce produit scalaire telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n soit de degré n et ait un coefficient dominant strictement positif.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence de $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$XL_n = \alpha_n L_{n+1} + \beta_n L_n + \gamma_n L_{n-1}$$

⋆⋆ **Exercice 30 —** *Polynômes de Tchebychev*

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad T_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$

   On vérifiera que $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n.
3. a) Soit $E = \mathscr{C}([-1, 1], \mathbb{R})$. Montrer que φ est un produit scalaire, où :

$$\forall f, g \in E, \quad \varphi(f, g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

   b) On pose $P_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ et pour tout $n > 0$, $P_n = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}T_n$.
   Montrer que $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ forme une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

   c) Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $\sum_{k=0}^{n} a_k T_k$ sa projection orthogonale sur $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que la série de terme général a_n^2 converge.

⋆⋆ **Exercice 31 —** *Polynômes de Legendre*

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire défini par $(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, soit le polynôme $P_k = \left[(X^2-1)^k\right]^{(k)}$.
   a) Quel est le degré de P_k ?
   b) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de E.
2. Montrer que le polynôme P_k vérifie l'équation différentielle :

$$(X^2-1)P_k'' + 2XP_k' - k(k+1)P_k = 0$$

3. Calculer $\|P_k\|^2$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
4. On note $\mathscr{E}_n$ l'ensemble des polynômes de degré n normalisés, c'est-à-dire de coefficient dominant 1. Calculer $\mu = \min\limits_{P\in\mathscr{E}_n} \int_{-1}^{1} P(t)^2\,\mathrm{d}t$.

⋆⋆⋆ **Exercice 32 —** *Famille de polynômes orthogonaux*

Soient $E = \mathbb{R}[X]$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $w :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue et strictement positive telle que l'intégrale $\langle P, Q\rangle = \int_a^b P(t)Q(t)w(t)\,\mathrm{d}t$ converge pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Établir l'existence d'une unique famille orthogonale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires tels que $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Justifier que pour $n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet n racines réelles distinctes dans $]a, b[$, que l'on note par la suite $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.
4. *Méthode de Gauss* – Montrer qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \quad \int_a^b P(t)w(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(\alpha_i)$$

5. Prouver enfin l'existence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = (X + a_n)P_n + b_n P_{n-1}$.