

TD M3 - Approche énergétique du mouvement d'un point

Table des matières

1	Distance de freinage	1
2	Oscillateur amorti	1
3	Positions d'équilibre du pendule simple	2
4	Looping	2
5	Pendule dont le fil casse	3
6	Déformation d'un ressort	3
7	Équilibre d'une bille sur un cercle	4

1 Distance de freinage

Une voiture de masse $m = 1,5 \cdot 10^3 \text{ kg}$ roule à la vitesse de 50 km.h^{-1} sur une route horizontale. Devant un imprévu, le conducteur écrase la pédale de frein et s'arrête sur une distance $d = 15 \text{ m}$. On modélise la force de freinage par une force constante opposée à la vitesse.

1.1. Exprimer le travail de la force de freinage au cours de la décélération du véhicule jusqu'à arrêt complet de ce dernier.

1.2. En déduire la norme de cette force.

1.3. Quelle distance faut-il pour s'arrêter si la vitesse initiale est de 70 km.h^{-1} ?

1.4. Commenter cette phrase relevée dans un livret d'apprentissage de la conduite : La distance de freinage est proportionnelle au carré de la vitesse du véhicule.

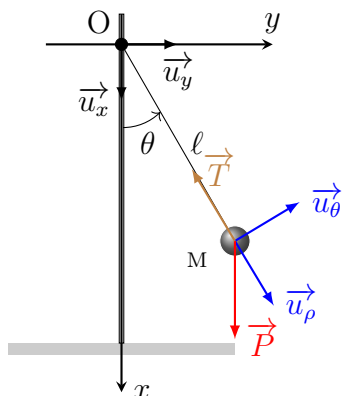
2 Oscillateur amorti

Un mobile effectue des oscillations rectilignes sinusoïdales entretenues, avec une amplitude x_m et une fréquence f constantes. Son abscisse $x(t)$ est donc du type $x(t) = x_m \cos(2\pi ft)$. Il est soumis à une force de frottement fluide du type $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ où α est une constante positive.

2.1. Exprimer la puissance instantanée $\mathcal{P}(t)$ développée par la force de frottement fluide.

2.2. Exprimer le travail de la force de frottement fluide durant une période du mouvement.

3 Positions d'équilibre du pendule simple



On considère un pendule simple de longueur ℓ auquel on a accroché un mobile M de masse m . On note g le module du champ de pesanteur, T la norme de la tension du fil et les frottements sont négligés. L'énergie potentielle de pesanteur E_p est prise nulle lorsque le pendule est en position verticale.

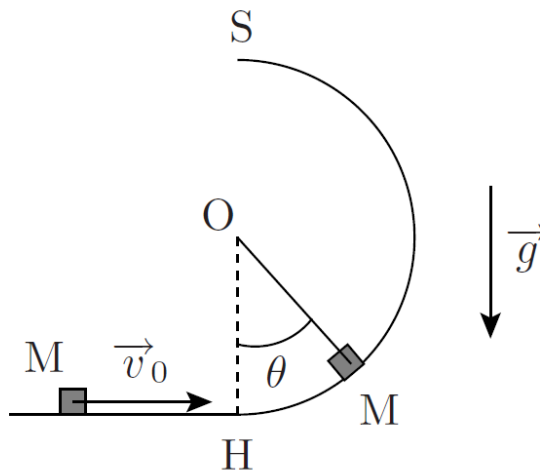
3.1. Trouver l'expression de $E_p(\theta)$ et déterminer la puissance de $\vec{T}$.

3.2. Tracer le graphe $E_p(\theta)$ et identifier les positions d'équilibre potentielles en précisant si elles sont stables ou pas.

3.3. Donner l'expression de $E_p(\theta)$ dans l'approximation des petits angles : $\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$. Quel autre système physique possède une énergie potentielle de cette forme ?

3.4. En utilisant l'intégrale première du mouvement avec l'expression de $E_p(\theta)$ obtenue dans l'approximation des petits angles, retrouver l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

4 Looping



Une petite voiture, assimilable à un point matériel M de masse m , est lancée avec une vitesse de norme v_0 sur une piste horizontale plane prolongée par un demi-cercle vertical de rayon R . La voiture glisse sans frottement sur le support, qu'elle est susceptible de quitter (la liaison n'est pas bilatérale). Sa position à l'intérieur du demi-cercle est repérée par l'angle $\theta(t)$ formé par la verticale descendante (OH) avec le rayon OM.

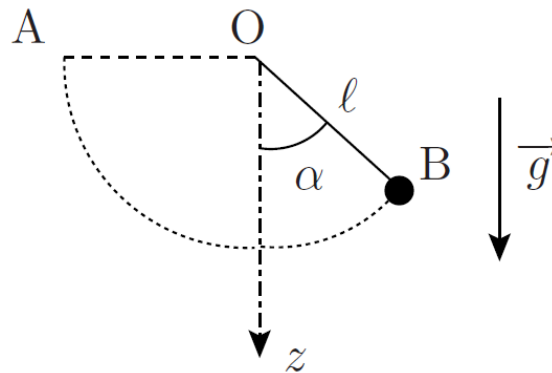
4.1. Comment varie la vitesse de la voiture jusqu'au passage au point H ?

4.2. Déterminer l'expression de la norme v de la vitesse de la voiture lorsqu'elle est située dans la piste semi-circulaire à la position repérée par l'angle θ , en fonction de v_0 , g , R et θ .

4.3. Par projection du principe fondamental de la dynamique dans la base locale polaire, déterminer la norme N de la force de contact exercée par la piste semi-circulaire sur la voiture, en supposant le contact maintenu, en fonction de m , v_0 , R , g et θ . Comment la fonction $N(\theta)$ varie-t-elle ?

4.4. À quelle condition sur la vitesse de lancement v_0 la voiture atteindra-t-elle le sommet S de la piste sans que le contact avec celle-ci ne soit rompu ?

5 Pendule dont le fil casse



Un point matériel M de masse m , attaché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur l dont l'autre extrémité est attachée en un point fixe O , est lâché sans vitesse initiale depuis la position A telle que le fil soit horizontal. Le pendule effectue un quart d'oscillation, puis le fil se rompt alors que le pendule forme un angle $\alpha < \frac{\pi}{2}$ avec la verticale descendante (Oz) et que le point M est en B .

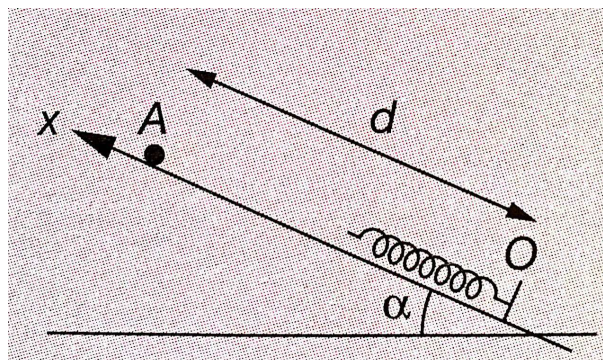
5.1. Exprimer la norme v de la vitesse du point M en B , en fonction de g , l et α . On note S le sommet de la trajectoire parabolique décrite par le point matériel à la suite de la rupture du fil.

5.2. Montrer que la composante horizontale v_x de la vitesse reste constante au cours de ce mouvement et l'exprimer en fonction de v_B et α .

5.3. Exprimer la norme v_S de la vitesse de passage en S , en fonction de g , l et α .

5.4. En déduire la différence H entre les altitudes des points A et S , en fonction de l et α .

6 Déformation d'un ressort



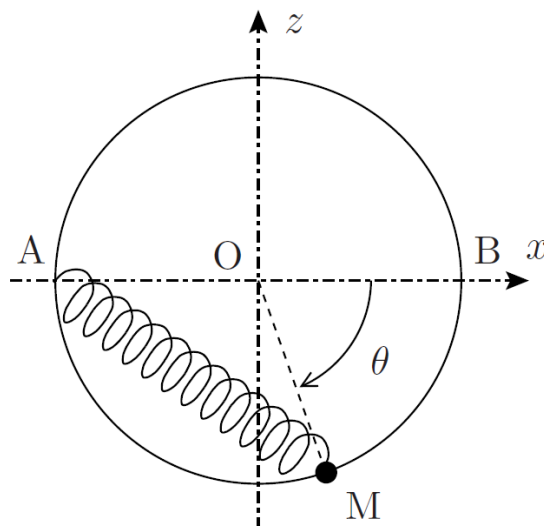
Une masse m glisse sans frottement sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Elle est lâchée du point A situé à la distance d de O , sans vitesse initiale et finit par percuter

un ressort (raideur k et longueur à vide l_0) fixé au point O. Le ressort possède initialement sa longueur à vide.

6.1. À quelle condition la masse atteint-elle le point O ?

6.2. Quel est le mouvement de la masse s'il n'y a pas collision en O ?

7 Équilibre d'une bille sur un cercle



Un point matériel M de masse m peut coulisser sans frottement sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R , placé dans un plan vertical (Oxz) où (Oz) est orienté suivant la verticale ascendante. Le point M est attaché à l'extrémité d'un ressort de longueur à vide $l_0 = 2R$ et de constante de raideur k dont l'autre extrémité est fixée au point A. Un dispositif non représenté impose au ressort de rester constamment rectiligne. La position du point M est repérée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM})$.

Le champ de pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. On donne : $R = 10 \text{ cm}$, $m = 100 \text{ g}$, $k = 10 \text{ N.m}^{-1}$, $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

7.1. Montrer que $AM = 2R \cos(\frac{\theta}{2})$. Pour ce faire, on pourra, par exemple, exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans la base $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$.

7.2. Exprimer l'énergie potentielle totale $E_p(\theta)$ du point M sachant que l'énergie potentielle élastique E_{pe} est prise nulle lorsque le ressort a sa longueur à vide et que l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} est prise nulle lorsque la cote z du point M est nulle.

7.3. Représenter à l'aide de la calculatrice le graphe $E_p(\theta)$, pour $0 \leq \theta \leq 180$.

7.4. En déduire la valeur θ_{eq} pour laquelle le point M est à l'équilibre sur le cercle. Cet équilibre est-il stable ou instable ?

7.5. Le point M est abandonné sans vitesse initiale depuis B. Déterminer la valeur θ_{max} de l'angle θ maximal atteint au cours du mouvement ainsi que la valeur v_{max} de la vitesse maximale atteinte.