

Intégrales impropres Chapitre 7

Corrections exercices types

Exercice 1. 7-1

1. Définition dans le cas où l'intégrale est impropre en $-\infty$:

Si f est une fonction continue ou continue par morceaux sur $]-\infty, a]$, on dit que $\int_{-\infty}^a f(t) dt$ est impropre (ou généralisée) en $-\infty$.

Elle converge si $\int_M^a f(t) dt$ a une limite finie quand $M \rightarrow -\infty$.

On note alors $\lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^a f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt$.

Elle diverge sinon.

2. L'intégrale $\int_{-\infty}^0 e^u du$ converge-t-elle? Si oui, quelle est sa valeur?

L'intégrale $\int_{-\infty}^0 e^u du$ est impropre en $-\infty$.

En effet la fonction $t \mapsto e^t$ est continue sur $]-\infty, 0]$.

Soit $M < 0$ alors $\int_M^0 e^u du = [e^u]_M^0 = 1 - e^M \xrightarrow{M \rightarrow -\infty} 1$ donc $\int_{-\infty}^0 e^u du$ converge et vaut 1.

NB : on aurait pu prouver ce résultat en utilisant un changement de variable C^1 , $u = -x$ et se ramener ainsi à l'étude de $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ impropre en $+\infty$.

Exercice 2. 7-2 Multi-impropre

Etude de : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3} dt$.

La fonction $t \mapsto \frac{e^t}{(1+e^t)^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et dont le dénominateur ne s'annule pas ($1+e^t > 0$ sur $\mathbb{R}$).

Donc l'intégrale est impropre en $+\infty$ et en $-\infty$.

Étude en $+\infty$:

Soit $M > 0$, on a $\int_0^M \frac{e^t}{(1+e^t)^3} dt = \left[\frac{-1}{2} (1+e^t)^{-2} \right]_0^M = \frac{-1}{2(1+e^M)} + \frac{1}{8} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{8}$ car $\frac{-1}{2(1+e^M)} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0$.

Étude en $-\infty$:

Soit $M < 0$, on a $\int_M^0 \frac{e^t}{(1+e^t)^3} dt = \left[\frac{-1}{2} (1+e^t)^{-2} \right]_M^0 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+e^M)} \xrightarrow{M \rightarrow -\infty} -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}$ car $\frac{1}{2(1+e^M)} \xrightarrow{M \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}$.

Conclusion : l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3} dt$ est convergente et vaut (par Chasles) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3} dt = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 3. 7-3 Critère d'équivalence

Nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{e^t-1} dt$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{e^t-1}$ est continue sur $]0, 1]$ comme quotient de fonctions continues sur $]0, 1]$ et dont le dénominateur ne s'annule pas ($e^t - 1 > 0$ sur $]0, 1]$).

Donc l'intégrale est impropre en 0.

De plus $f(t) \geq 0, \forall t \in]0, 1]$.

Et, on a par équivalent usuel en 0 : $\frac{\sqrt{t}}{e^t-1} \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

Or, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ est convergente car intégrale de Riemann avec $\alpha = 1/2 < 1$.

Donc par critère d'équivalence des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{e^t-1} dt$ converge.

Exercice 4. 7-4 **critère de négligeabilité**

Nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

On a $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ par composées de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$. Donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.

De plus f est à valeurs positives.

On a aussi : $f(t) = o(e^{-t})$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-t^2+t} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-t^2(1-1/t)} = 0$.

Or, $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est une intégrale positive de référence convergente, donc par critère de négligeabilité des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

NB : on sait qu'elle est sa valeur d'après le cours sur la loi normale : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (il suffit de faire un changement de variable $u = x/\sqrt{2}$ et d'utiliser le résultat sur $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.)

Exercice 5. 7-5 **critère de comparaison**

Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$.

On a $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ par quotient de fonctions continues sur $[1, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas ($t \neq 0, \forall t \in [1, +\infty[$). Donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.

De plus f est à valeurs positives.

$\forall t \in [1, +\infty[, \frac{e^{-t}}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$.

Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente car intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

Donc par critère de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$ converge.

Exercice 6. 7-6

1. Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$.

On a $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.

Soit $M > 1$, on va effectuer une IPP.

On pose $u'(t) = \frac{1}{t^2}$, $u(t) = -\frac{1}{t}$, $v(t) = \ln t$, $v'(t) = \frac{1}{t}$ avec u et v de classe C^1 sur $[1, +\infty[$.

Alors : $\int_1^M \frac{\ln(t)}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln(t)}{t} \right]_1^M + \int_1^M \frac{dt}{t^2} = -\frac{\ln(M)}{M} + \left[-\frac{1}{t} \right]_1^M = -\frac{\ln(M)}{M} - \frac{1}{M} + 1 \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 1$ (car par CC $\frac{\ln(M)}{M} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0$)

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$ converge et vaut 1.

2. Calculer pour n entier naturel, $\int_1^{+\infty} \frac{(t-1)^n}{t^{n+2}} dt$.

On a $f : t \mapsto \frac{(t-1)^n}{t^{n+2}}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.

On va effectuer un changement de variable, mais remarquons tout d'abord que :

$$\frac{(t-1)^n}{t^{n+2}} = \frac{1}{t^2} \left(\frac{t-1}{t} \right)^n = \frac{1}{t^2} \left(1 - \frac{1}{t} \right)^n.$$

On cherche à calculer : $\int_1^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{t} \right)^n \frac{dt}{t^2}$.

On pose alors, $u = \frac{1}{t}$ changement de variable C^1

$$du = -\frac{dt}{t^2}, 1 \leftrightarrow 1, +\infty \leftrightarrow 0 \text{ d'où}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \left(1 - \frac{1}{t} \right)^n = \int_1^0 (-(1-u)^n) du = \int_0^1 (1-u)^n du = \left[-\frac{1}{n+1} (1-u)^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} (1-0)^{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Donc pour n entier naturel, $\int_1^{+\infty} \frac{(t-1)^n}{t^{n+2}} dt$ converge et vaut $\frac{1}{n+1}$.

Exercice 7. 7-7 Calcul changement de variables

Calculer $\int_0^1 \frac{e^{-1/t}}{t^2} dt$. (poser $u = 1/t$)

On a $f : t \mapsto \frac{e^{-1/t}}{t^2}$ est continue sur $]0, 1]$ en tant que quotient et composées de fonctions continues sur $]0, 1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc l'intégrale est impropre en 0.

Soit donc $\epsilon \in]0, 1[$, on pose $u = 1/t$ (changement de variable C^1) alors : $du = -1/t^2 dt, \epsilon \leftrightarrow 1/\epsilon, 1 \leftrightarrow 1$ d'où :

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{e^{-1/t}}{t^2} dt = - \int_{1/\epsilon}^1 \frac{e^{-u}}{u^2} du = [e^{-u}]_{1/\epsilon}^1 = e^{-1} - e^{-(1/\epsilon)}$$

$$\text{Or } \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (e^{-1} - e^{-(1/\epsilon)}) = e^{-1}.$$

Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{-1/t}}{t^2} dt$ est convergente et vaut e^{-1} .

Exercice 8. 7-8

Nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

On a $f : t \mapsto e^{-t^2}$ continue sur $\mathbb{R}$ par composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est doublement impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.

De plus, f est paire car $\forall t \in \mathbb{R}, -t \in \mathbb{R}$ et $f(-t) = e^{-(-t)^2} = e^{-t^2} = f(t)$.

Or on a prouvé à l'exercice 7-4, que l'intégrale de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente (par critère de négligeabilité).

Donc d'après le théorème de parité (en faisant un changement de variable C^1 , $u = -t$) on a que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et vérifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

NB : on verra dans le cours sur les variables à densité que $dps \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Exercice 9. 7-9

Soit a un réel positif et f une fonction continue, positive et décroissante sur $[a; +\infty[$, de limite 0 en $+\infty$.

1. Montrons que $\sum f(n)$ et $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.

Pour simplifier, on prend $a = 0$ sinon il faut remplacer a par sa partie entière $+1$ dans la démo qui suit.

On considère f une fonction continue, positive et décroissante sur $[0; +\infty[$, de limite 0 en $+\infty$.

On a alors par stricte décroissance de f : pour tout $k \in \mathbb{N}$ (sinon $k \geq [a] + 1$) pour tout $t \in [k; k+1]$, $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$.

On intègre cette inégalité (les bornes étant croissantes) sur $[k; k+1]$:

$$\int_k^{k+1} f(k+1) dt \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k) dt$$

On calcule en n'oubliant pas que k est une constante :

$$f(k+1)[t]_k^{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)[t]_k^{k+1}$$

On somme les termes de cet encadrement pour k allant de 0 (sinon de $[a] + 1$) à $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

On pose $S_n = \sum_{k=0}^n f(k)$.

On utilise ensuite la relation de Chasles des intégrales pour le membre du milieu dans cette inégalité, et un changement d'indice sur la première somme :

$$S_n - f(0) \leq \int_0^n f(t) dt \leq S_n - f(n)$$

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

En effet, si S_n converge alors le membre de droite prouve que $\int_0^n f(t)dt$ converge quand n tend vers $+\infty$, si S_n diverge alors le membre de gauche prouve que $\int_0^n f(t)dt$ diverge quand n tend vers $+\infty$.

Ou bien :

-l'inégalité de gauche donne :

$$S_n \leq \int_0^n f(t)dt + f(0) \quad (1)$$

-l'inégalité de droite donne :

$$S_n \geq \int_0^n f(t)dt + f(n) \quad (2)$$

Et donc si $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge quand n tend vers $+\infty$ alors (1) entraîne que la série converge.

Si $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge quand n tend vers $+\infty$ alors (2) entraîne que la série diverge.

On est donc ramené à calculer $\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

2. Quelle est la nature de la série : $\sum \frac{1}{n \ln n}$?

On a pour $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $\frac{1}{n \ln n} > 0$.

On pose $f(t) = \frac{1}{t \ln t}$, alors f est continue (et positive) et dérivable sur $[2, +\infty[$ et décroissante sur $[2, +\infty[$ (car $f'(t) = -\frac{1+\ln t}{(t \ln t)^2} < 0$ sur $[2, +\infty[$).

De plus $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

D'après la première question la série : $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ et $\int_2^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

$\int_2^{+\infty} f(t)dt$ est impropre en $+\infty$.

Soit $M > 2$, $\int_2^M \frac{1}{t \ln t} dt = [\ln(\ln t)]_2^M = \ln(\ln M) - \ln(\ln 2) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc la série diverge.

Exercice 10. 7-10 Nature d'une suite

On a $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

Or, $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt$ et $\frac{1}{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dt$ d'où :

$$u_{n+1} - u_n = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

De plus, comme $n \leq t \leq n+1$, on a $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t} \leq 0$, puis par positivité de l'intégrale (les bornes étant croissantes), on a $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

Montrons que $u_n \geq 0$, pour tout entier naturel non nul.

Soit k un entier naturel non nul et $k \leq t \leq k+1$ alors par décroissance de la fonction inverse on a :

$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$, on intègre cette inégalité sur $[k, k+1]$ avec bornes croissantes :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt, \text{ soit}$$

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}.$$

On somme cette dernière inégalité de 1 à n :

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, ce qui donne avec la relation de Chasles des intégrales :

$\int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, on ajoute $-\ln n$ à cette inégalité :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t} - \ln n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n = u_n$$

Or $\int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt = \ln(n+1)$ et $\ln(n+1) - \ln n \geq 0$ car $n \geq 1$.

D'où $u_n \geq 0$.

Ainsi (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un nombre appelé γ la constante d'Euler.

$$\gamma \simeq 0,5772156649.$$

Le calcul au moyen de la suite $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ est extrêmement lent et imprécis. Il présente néanmoins un intérêt pédagogique pour se sensibiliser aux problèmes de propagation d'erreurs d'arrondi.

Des méthodes plus efficaces peuvent être mises en œuvre pour obtenir une précision suffisante. Par exemple, l'utilisation de la formule d'Euler-Maclaurin permet d'obtenir 16 décimales de γ .

Donald Knuth donne 1 271 décimales en 1962, Thomas Papanikolaou donne un million de décimales en 1997, P. Dechimel et X. Gourdon en donnent cent millions deux ans plus tard. En 2017, le record vérifié semble être détenu par Ron Watkins avec plus de 400 milliards de décimales! On ignore toujours si la constante d'Euler est ou non un nombre rationnel.