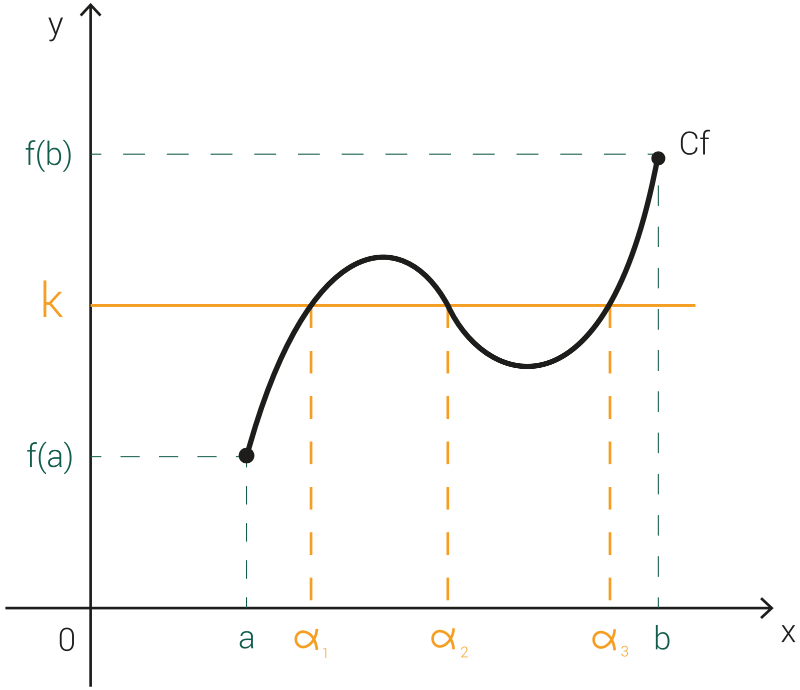
Théorème des Valeurs Intermédiaires

*Enoncé : « Démontrer que f(x) = k admet **AU MOINS** une solution sur [a;b] »*



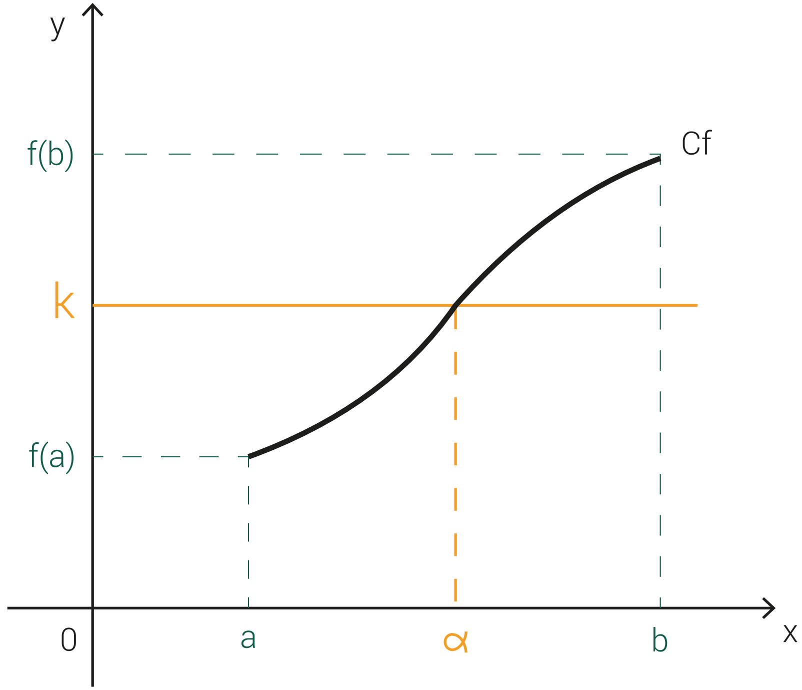
Si

- f est CONTINUE sur [a;b]
- k ∈ [f(a) ; f(b)] (si f est ↗)
  ou
  k ∈ [f(b) ; f(a)] (si f est ↘)

Alors f(x) = k admet au moins une solution α sur [a;b]

Corolaire du Théorème des Valeurs Intermédiaires

*Enoncé : « Démontrer que f(x) = k admet une **UNIQUE** solution sur [a;b] »*



Si

- f est CONTINUE sur [a;b]
- f est STRICTEMENT MONOTONE sur [a;b]
  (strictement croissant ou strictement décroissant)
- k ∈ [f(a) ; f(b)] (si f est ↗)
  ou
  k ∈ [f(b) ; f(a)] (si f est ↘)

Alors f(x) = k admet une unique solution α sur [a;b]

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Déterminer l'ensemble de continuité et de dérivabilité de f.

Exercice 2 :

1. On désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2$.
   (a) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
   (b) Soit $(D) : y = x - 2$, étudier la position relative de la courbe de g par rapport à la droite (D).
   (c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution a dans $\mathbb{R}$.
   (d) Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$. (On expliquera)
   (e) Donner une valeur approchée de a.
2. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^3+1}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de continuité de f.
   (b) Calculer les limites de f aux bornes de définition de f.
   (c) Déterminer la fonction dérivée de f.
   (d) En déduire le tableau de variations de f.
   (e) Montrer que $f(a) = \dfrac{2}{3a^2}$.
   (f) On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$. On les notera α, β, γ avec $\alpha < \beta < \gamma$.
3. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution β comprise entre 0 et 1. Expliquer la méthode utilisée.
4. Quel est le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]\beta, \gamma[$?