Probabilités

I Vocabulaire

1- Expérience aléatoire

Définition :

Une expérience aléatoire est une expérience dont les résultats sont connus sans que l'on puisse les prévoir à l'avance.

Une issue est un résultat possible d'une expérience aléatoire.

L'univers associé à une expérience aléatoire est l'ensemble des résultats possibles. Il est généralement noté Ω.

Exemple : L'expérience aléatoire consistant à lancer un dé non truqué à six faces possède six issues : 1, 2, 3, 4, 5 et 6. On note $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

2- Evènements

Définition :

Un évènement est un ensemble d'issues (résultats possibles) d'une expérience aléatoire.

Exemple : « Obtenir un chiffre pair » est un évènement regroupant 2, 4, 6 (les trois issues possibles).

Certains évènements sont particuliers. Dans chaque exemple, on prendra l'expérience aléatoire d'un lancer d'un dé non truqué à six faces :

- Un évènement est dit élémentaire lorsqu'il n'est composé que d'une seule issue.
  Exemple : « obtenir un nombre inférieur ou égal à 1 »
- Un évènement est dit impossible lorsqu'il ne peut pas se réaliser.
  Exemple : « obtenir un 7 »
- Un évènement est dit certain lorsqu'il est obligé de se réaliser.
  Exemple : « obtenir un chiffre inférieur à 10 »
- Deux évènements sont dits incompatibles quand ils ne peuvent pas se réaliser simultanément.
  Exemple : « obtenir un nombre pair » et « obtenir un nombre impair »
- L'évènement contraire (ou complémentaire) d'un évènement A est noté $\bar{A}$ (se lit A barre). C'est l'évènement qui rassemble toutes les issues qui ne composent pas l'évènement A.
  Exemple : évènement A : « obtenir un 1 » ; évènement $\bar{A}$: « ne pas obtenir un 1 »

Application : Exercice 1

3- Loi de probabilité

Définition :

Définir une loi de probabilité d'une expérience aléatoire dont l'univers est $\Omega = \{x_1\ ;\ x_2\ ;\ x_3 \ldots x_n\}$ consiste à attribuer à chacune des issues, un nombre positif ou nul, appelé probabilité, tel que $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$.

Propriété :

La probabilité d'un évènement A est $P(A) = \dfrac{nombre\ d'issues\ favorables\ à\ A}{nombre\ total\ d'issues}$

Exemple : Dans une urne, on dispose de 7 jetons noirs, 5 jetons jaunes, 4 jetons verts, 3 jetons blancs et 1 jeton rouge.

Déterminer la loi de probabilité associée à cette expérience.

Méthode :

- On détermine l'univers associé à l'expérience aléatoire
  L'univers associé à cette expérience aléatoire est $\Omega = \{noir\ ; jaune\ ; vert\ ; blanc\ ; rouge\}$
- On énonce la loi de probabilité dans un tableau :

Issue	Noirs	Jaunes	Verts	Blancs	Rouge
Probabilité	$\frac{7}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

Remarque : Lorsque chaque issue d'une expérience aléatoire à la même probabilité de se produire, on dit que la situation est équiprobable, ou qu'il y a **équiprobabilité**.

Application : Exercice 2

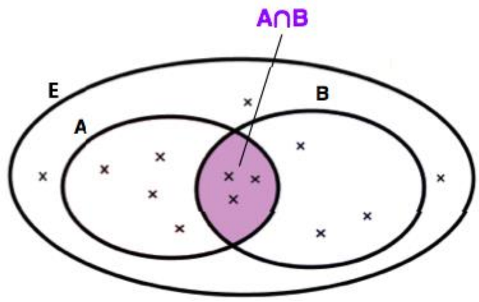
II Intersections et réunions

1- Intersection

Définition :

L'intersection d'un évènement A et d'un évènement B est la totalité des issues qui réalisent à la fois A ET B (les deux à la fois).

Elle est notée $A \cap B$ et se lit A inter B.



Exemple : Dans un jeu de 32 cartes, si l'évènement A est « la carte tirée est un pique » et l'évènement B est « la carte tirée est un As » alors $A \cap B$ est « la carte tirée est l'As de pique »

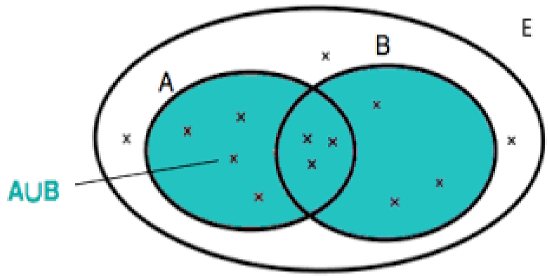
Remarque : Si les deux évènements sont incompatibles, alors l'intersection de A et de B n'existe pas. Par conséquent $P(A \cap B) = 0$.

2- Réunion

Définition :

La réunion d'un évènement A et d'un évènement B est la totalité des issues qui réalisent à la fois A OU B (au moins l'un des deux).

Elle est notée $A \cup B$ et se lit A union B.



Exemple : Dans un jeu de 32 cartes, si l'évènement A est « la carte tirée est un pique » et l'évènement B est « la carte tirée est un As » alors $\underline{A \cup B}$ est « la carte tirée est un pique ou un As ». On peut donc tirer n'importe quel pique ou n'importe quel As.

Propriété :

Pour calculer la probabilité de la réunion d'un évènement A et d'un évènement B, on applique la formule :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Remarque : Si les deux évènements sont incompatibles, alors l'intersection de A et de B n'existe pas. Par conséquent $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Application : Exercice 3

3- Evènement contraire

Propriété :

Pour tout évènement A, on a $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Exemple : A un carrefour, on a constaté que la probabilité qu'un feu soit vert est de 0,512. Ainsi la probabilité que le feu ne soit pas vert est $1 - 0{,}512 = 0{,}488$.

III Probabilités marginales et conditionnelles

Définition :

La **probabilité marginale** d'un évènement A se calcule en divisant l'effectif des issues réalisant l'évènement par l'effectif total.

La probabilité d'un évènement B sachant qu'un évènement A est réalisé est appelée **probabilité conditionnelle de B sachant A** et se note : $P_A(B)$

Exemple : On considère le tableau croisé suivant :

	Hommes	Femmes	Total
Cadres	27	18	45
Ouvriers	189	126	315
Total	216	144	360

Si on s'intéresse à la probabilité hommes ouvriers, on prendra l'effectif à l'intersection des deux évènements, soit 189 sur l'effectif de la population totale, soit 360. On a donc :

$$P(hommes\ ouvriers) = \frac{189}{360}$$

La probabilité conditionnelle se lit sur une colonne ou une ligne intérieure du tableau.

	Hommes	Femmes	Total
Cadres	27	18	45
Ouvriers	189	126	315
Total	216	144	360

	Hommes	Femmes	Total
Cadres	27	18	45
Ouvriers	189	126	315
Total	216	144	360

Dans le tableau de gauche, on cherche à connaître la probabilité des cadres sachant que ce sont des hommes. On va donc utiliser l'effectif des hommes cadres sur l'effectif des hommes :

$$P_H(C) = \frac{27}{216}$$

Dans le tableau de droite, on cherche à connaître la probabilité des hommes sachant que ce sont des cadres. On va donc utiliser l'effectif des hommes cadres sur l'effectif des cadres :

$$P_C(H) = \frac{27}{45}$$

Propriété :

La probabilité conditionnelle de B sachant A correspond au quotient de la probabilité de $A \cap B$ par la probabilité de A :

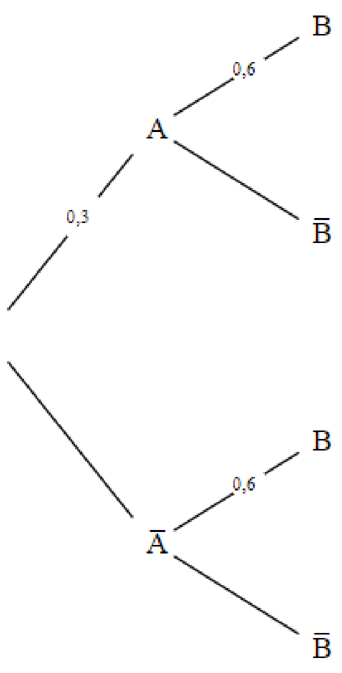
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Application : Exercice 4

IV Arbre de probabilités

Définition :

On appelle **arbre de probabilités** la représentation graphique d'une expérience aléatoire



<u>Exemple</u> : On procède à deux tirages consécutifs :

- La première expérience aléatoire consiste à lancer une pièce truquée sachant que la probabilité de tomber sur « pile » est de 0,3.
- La deuxième expérience aléatoire revient à tirer un jeton dans un sac contenant 6 jetons rouges et 4 jetons verts.

On considère les évènements suivants :

- A : « on obtient pile »
- B : « on obtient un jeton rouge »

<u>**Etape 1**</u> :

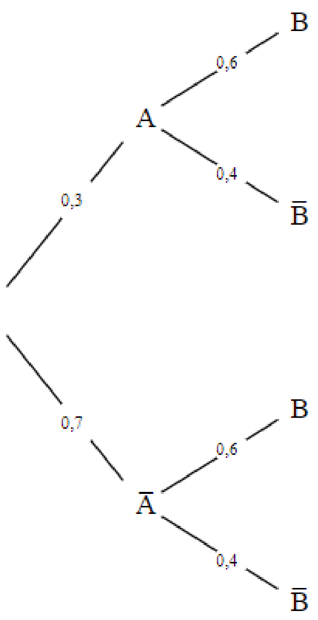
On peut représenter cette situation par un arbre pondéré en indiquant la probabilité correspondante à chaque évènement sur les branches correspondantes.

<u>**Etape 2**</u> :

En utilisant la formule $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, on peut ensuite compléter les probabilités manquantes.

<u>**Etape 3**</u> :

On peut enfin calculer les probabilités d'intersection en multipliant les probabilités rencontrées sur les branches de chaque chemin.



$\rightarrow P(A \cap B) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$

$\rightarrow P(A \cap \bar{B}) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$

$\rightarrow P(\bar{A} \cap B) = 0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}42$

$\rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28$

Propriétés :

La somme des probabilités d'intersection comprenant un même évènement est égale à la probabilité de cet évènement : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

La somme de toutes les probabilités d'intersection est égale à 1.

<u>Application</u> : Exercice 5

V Indépendance

Définition :

Deux évènements A et B sont dits **indépendants** lorsque $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$

Exemple : On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

Soit A l'évènement « la carte tirée est un as » et T l'évènement « la carte tirée est un trèfle ».

On a la probabilité de tirer un as : $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

Et la probabilité de tirer un as parmi les trèfles : $P_T(A) = \frac{1}{8}$

Par conséquent : $P(A) = P_T(A) = \frac{1}{8}$

Donc les évènements A et T sont indépendants.

Application : Exercice 6

Probabilités (Exercices)

Exercice 1

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

1/ Quelles sont les issues possibles pour réaliser l'évènement « Obtenir un roi » ?

2/ Quelles sont les issues possibles pour réaliser l'évènement « Obtenir un cœur » ?

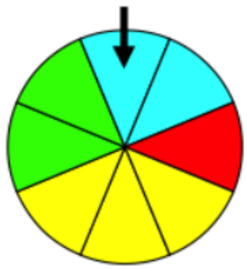
3/ Quelles sont les issues possibles pour réaliser l'évènement « Obtenir une carte jaune » ? Comment peut-on qualifier cet évènement ?

4/ Donner un évènement élémentaire

5/ Donner, en français, le nom de l'évènement contraire de l'évènement A « Obtenir une carte rouge »

Exercice 2

On considère une roue comme sur le schéma ci-contre. Chaque secteur de couleur est de la même dimension.



Donner la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

Exercice 3

On a demandé à 180 adolescents quel était leur genre de film préféré et on a consigné les résultats dans le tableau suivant :

	Filles	Garçons	Total
Comédie	75	25	100
Action	45	35	80
Total	120	60	180

On choisit au hasard un adolescent qui a participé à cette étude. On considère les évènements A : « l'adolescent choisi préfère les films d'action » et F : « l'adolescent choisi est une fille ».

1/ Calculer $P(A \cap F)$

2/ Calculer $P(A \cup F)$

Exercice 4

Une entreprise de jouets est spécialisée dans la fabrication de poupées qui parlent et qui marchent.

Chaque poupée peut présenter deux défauts et seulement deux : un défaut mécanique et un défaut électrique. La production journalière est de 1000 poupées.

Après une étude statistique en sortie de production, on constate que :

- 8% des poupées présentent le défaut mécanique

- 5% des poupées présentent le défaut électrique

- 2% des poupées présentent les deux défauts.

1- Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

	poupées avec défaut mécanique	Poupées sans défaut mécanique	total
Poupées avec défaut électrique			
Poupées sans défaut électrique			
total	80		1 000

Dans la suite de l'exercice, chaque résultat sera donné sous forme décimale à 10^{-2} près.

2- On prélève au hasard une poupée dans la production d'une journée.

Soit A l'évènement : « la poupée prélevée est sans défaut ». Calculer la probabilité de A

3- Soit B l'évènement « la poupée prélevée a au moins un défaut ». Montrer que la probabilité de B est 0.11

4- Soit C l'évènement « la poupée prélevée n'a qu'un seul défaut ». Quelle est la probabilité de C ?

5- Quelle est la probabilité que la poupée prélevée présente le défaut mécanique sachant qu'elle présente un défaut électrique ?

Exercice 5

Dans un premier temps, on tire une boule dans une urne en comptant 10 numérotées de 1 à 10.

On procède ensuite au lancer d'une pièce truquée dont la probabilité de tomber sur face est de $0{,}2$.

Soit A l'évènement « on obtient un nombre inférieur ou égale à 2 en tirant une boule »

Soit B l'évènement « on obtient face en lançant la pièce »

1/ Traduire cette situation par un arbre de probabilité.

2/ Calculer $P(A \cap B)$

3/ Calculer $P(\bar{A} \cap B)$

4/ En déduire $P(B)$

Exercice 6

Une urne contient trois boules indiscernables au toucher : une rouge, notée R, une verte, notée V, et une bleue, notée B.

On tire une boule au hasard lors d'un premier tirage, puis on remet cette boule dans l'urne. On procède de la même manière à un second tirage. On note enfin les résultats obtenus.

On considère les évènements suivants :

- R_1 « la première boule tirée est rouge »

- R_2 « la seconde boule tirée est rouge »

1/ Faire un arbre pondéré représentant la situation exposée.

2/ Montrer que les évènement R_1 et R_2 sont indépendants

Exercice 7

On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. On considère les évènements suivants :

- A : « la carte tirée est un cœur »
- B : « la carte tirée est une dame »

1/ Calculer P(A) puis P(B).

2/ Décrire en une phrase l'évènement $A \cap B$ et donner sa probabilité.

3/ En déduire la probabilité de $A \cup B$.

4/ Décrire en une phrase les évènements $\bar{A}$ et $\bar{B}$ et donner leur probabilité.

Exercice 8

Le bureau des élèves d'une université des séjours en France (F) ou à l'étranger (E), d'une durée d'un week-end (W) ou d'une semaine (S).

Parmi 540 dossiers, on a observé les fréquences conditionnelles suivantes : $f_E(S) = 75\%\ et\ f_F(W) = 65\%$. Enfin, on sait que 300 personnes sur les 540 dossiers partent à l'étranger.

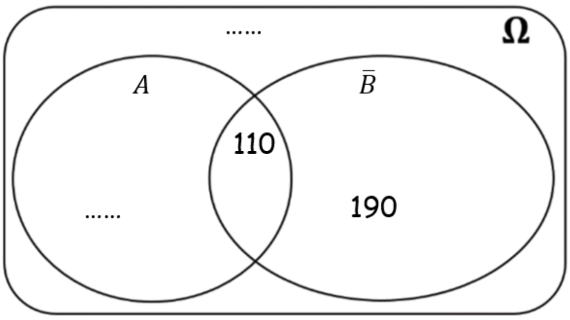
1- Traduire correctement les fréquences conditionnelles données ci-dessus.

2- Faire un tableau croisé représentant la situation complète

3- Calculer la fréquence des séjours d'une semaine

Exercice 9

	A	$\bar{A}$	Total
B		90	
$\bar{B}$			
Total			520



1/ Compléter le diagramme de Venn et le tableau à l'aide des données présentes.

2/ Calculer les probabilités suivantes :

a/ $P(B)$　　b/ $P(A \cap B)$　　c/ $P(A \cup \bar{B})$　　d/ $P(\bar{A} \cup B)$

Exercice 10

Un magasin vend des salons de jardin. Une enquête statistique a montré que :

- 10 % des personnes qui entrent dans le magasin achètent une table ;
- parmi les personnes qui achètent une table, 80 % achètent un lot de chaises ;
- parmi les personnes qui n'achètent pas de table, 10 % achètent un lot de chaises.

On suppose que chaque client achète au maximum un seul lot de chaise et une seule table. Une personne entre dans le magasin.

On note T l'évènement : « La personne achète une table ».

On note C l'évènement : « La personne achète un lot de chaises ».

1/ A l'aide de l'énoncé, compléter le tableau ci-dessous :

	T	$\bar{T}$	Total
C			
$\bar{C}$			
Total			

2a/ Avec les notations de l'énoncé, comment peut-on noter l'évènement : « la personne achète un lot de chaises et une table » ? Calculer sa probabilité.

2b/ Avec les notations de l'énoncé, comment peut-on noter l'évènement : « la personne achète un lot de chaises mais n'achète pas de table » ? Calculer sa probabilité.

2c/ Soit l'évènement : « la personne a acheté au moins un de deux articles en vente ». Comment peut-on noter cet évènement avec les notations du texte ? Calculer sa probabilité.

2d/ Quelle est la probabilité que la personne n'achète pas de table sachant qu'elle a acheté un lot de chaises ?

Exercice 11

On utilise un dé truqué à 6 faces, numérotées de 1 à 6. Lorsqu'on le lance :

- les faces portant un chiffre pair ont la même probabilité d'apparition
- les faces portant un chiffre impair ont la même probabilité d'apparition
- la probabilité d'apparition d'un chiffre impair est le double de celle d'un chiffre pair

a/ Calculer la probabilité d'apparition de chaque face.

b/ Calculer la probabilité d'apparition d'un chiffre pair et celle d'un chiffre impair.

Exercice 12

A bord d'un bateau de croisière, il y a 4 000 personnes. Chaque personne à bord du bateau est soit un touriste, soit un membre de l'équipage. On sait que 32,5% des personnes à bord sont des touristes hommes et qu'aucun des 320 enfants n'est membre de l'équipage.

1/ A l’aide des données de l’énoncé, compléter le tableau suivant :

	Hommes	Femmes	Enfants	Total
Touristes				3100
Membres de l’équipage				
Total	1740			4000

2/ Une personne étant donc choisie au hasard parmi les passagers :

a/ Peut-on dire qu’il y a moins d’une chance sur quatre que ce soit un membre de l’équipage ?

b/ Peut-on dire qu’il y a plus de neuf chances sur dix que ce ne soit pas une femme membre de l’équipage ?

c/ Quelle est la probabilité que cette personne soit un homme (touriste ou membre de l’équipage) ?

d/ Quelle est la probabilité que cette personne soit un touriste adulte ?

e/ Quelle est la probabilité que cette personne ne soit pas un enfant ?

3/ On choisit une personne au hasard parmi les passagers et on note : A : « le passager est un adulte » et T : « le passager est un touriste ».

Parmi les arbres des possibles suivants, lesquels peuvent modéliser la situation ?