

Equivalence, Négligeabilité

Table des matières

1	Comportement asymptotique des suites	2
1.1	Relation de négligeabilité	2
1.2	Relation d'équivalence	4
1.3	Comparaison de suites usuelles	5
2	Comparaison des fonctions au voisinage d'un point	7
2.1	Rappels sur les voisinages	7
2.2	Relation de négligeabilité	8
2.3	Relation d'équivalence	9
2.4	Comparaison de fonctions usuelles	11
2.4.1	Comparaison au voisinage de l'infini	11
2.4.2	Comparaison au voisinage de zéro	11

1 Comportement asymptotique des suites

1.1 Relation de négligeabilité

Définition 1.1 : Suite négligeable devant une autre suite

On dit que la suite (u_n) est **négligeable** devant la suite (v_n) s'il existe une suite (ϵ_n) qui converge vers 0 et qui vérifie à partir d'un certain rang n_0 , pour tout $n \geq n_0$

$$u_n = \epsilon_n v_n.$$

On note : $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ ou $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$.

On lit (u_n) est un "petit o " de (v_n) au voisinage de $+\infty$.

Exemple 1. Vérifier que $n \underset{+\infty}{=} o(n^2)$.

Solution.

Exemple 2. Vérifier que $\frac{1}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Solution.

Proposition 1.2 : Suite convergente

Soit (u_n) une suite réelle.

$$u_n \underset{+\infty}{=} o(1) \Leftrightarrow u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Démonstration. On a simplement $\epsilon_n = u_n$. □

Attention, la notation de Landau ("petit o ") repose sur un abus d'écriture : $o(w_n)$ ne désigne pas une suite particulière, mais toute suite possédant la propriété d'être négligeable devant (w_n) . Si $u_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$, on n'a pas nécessairement $u_n = v_n$.

Exemple 3. On a $n \underset{+\infty}{=} o(n^2)$ et $n+2 \underset{+\infty}{=} o(n^2)$, cependant $n \neq n+2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.3 : Caractérisation de la négligeabilité

Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors

$$u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Démonstration. Puisque $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, on peut écrire :

$$u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n) \Leftrightarrow \exists \epsilon_n \text{ tel que } u_n = \epsilon_n v_n \text{ et } \epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow \epsilon_n = \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

□

Exemple 4. Vérifier que $n+2 \underset{+\infty}{=} o((n+1)^2)$.

Solution.

Propriété 1.4 : Négligeabilité et opérations

On considère deux suites (u_n) et (v_n) et on suppose que

$$u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n).$$

- (i) (Transitivité) Si de plus $v_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$, alors $u_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$.
- (ii) (Produit) Si de plus $a_n \underset{+\infty}{=} o(b_n)$, alors $u_n a_n \underset{+\infty}{=} o(v_n b_n)$.
- (iii) (Combinaison linéaire) Si de plus $a_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$, alors $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda u_n + \mu a_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$.
- (iv) (Multiplication par une suite) Si (w_n) est une suite réelle, alors $u_n w_n \underset{+\infty}{=} o(v_n w_n)$.
- (v) (Multiplication par un réel non nul) Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $\lambda u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$.
- (vi) (Inverse) Si $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors $\frac{1}{v_n} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u_n}\right)$.

Démonstration. Si $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$, alors $\exists(\epsilon_n)$ tel que $u_n = \epsilon_n v_n$ et $\epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

- (i) Comme $v_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$, alors $\exists(\epsilon'_n)$ tel que $v_n = \epsilon'_n w_n$ et $\epsilon'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On pose $\mu_n = \epsilon_n \epsilon'_n$, on a $u_n = \mu_n w_n$ et $\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi $u_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$.

- (ii) Comme $a_n \underset{+\infty}{=} o(b_n)$, alors $\exists(\epsilon'_n)$ tel que $a_n = \epsilon'_n b_n$ et $\epsilon'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On pose $\mu_n = \epsilon_n \epsilon'_n$, on a $u_n a_n = \mu_n v_n b_n$ et $\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi $u_n a_n \underset{+\infty}{=} o(v_n b_n)$.

- (iii) Comme $a_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$, alors $\exists \epsilon'_n$ tel que $a_n = \epsilon'_n v_n$ et $\epsilon'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on pose $E_n = \lambda \epsilon_n + \mu \epsilon'_n$, on a $\lambda u_n + \mu a_n = \lambda \epsilon_n v_n + \mu \epsilon'_n v_n = E_n v_n$ et $E_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi $\lambda u_n + \mu a_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$.

(iv), (v) et (vi) sont à démontrer en exercice. □

Exemple 5. Comme $n + 2 \underset{+\infty}{=} o((n + 1)^2)$ et $(n + 1)^2 \underset{+\infty}{=} o(n^3)$, alors

$$n + 2 \underset{+\infty}{=} o(n^3).$$

Exemple 6. On a

$$o(5n^2) \underset{+\infty}{=} 5 o(n^2) \underset{+\infty}{=} o(n^2).$$

Exemple 7. On a

$$n o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exemple 8. Montrer que $3n + 2 \underset{+\infty}{=} o(n^2)$.

Solution.

1.2 Relation d'équivalence

Définition 1.5 : Suites équivalentes

Les suites (u_n) et (v_n) sont dites **équivalentes** s'il existe une suite (α_n) qui converge vers 1 et qui vérifie à partir d'un certain rang n_0 , pour tout $n \geq n_0$

$$u_n = \alpha_n v_n.$$

On note : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ ou $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

On lit (u_n) est équivalente à (v_n) au voisinage de $+\infty$.

Théorème 1.6 : Caractérisation de l'équivalence

Soient deux suites (u_n) et (v_n) . On a :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow u_n \underset{+\infty}{=} v_n + o(v_n).$$

Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Démonstration. On a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \exists \alpha_n$ tel que $u_n = \alpha_n v_n$ et $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

On pose $\epsilon_n = \alpha_n - 1$,

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \exists \epsilon_n \text{ tel que } u_n = (1 + \epsilon_n) v_n = v_n + \epsilon_n v_n \text{ et } \epsilon_n = \alpha_n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow u_n \underset{+\infty}{=} v_n + o(v_n).$$

Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, on peut écrire :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow u_n \underset{+\infty}{=} v_n + o(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{+\infty}{=} \frac{v_n + o(v_n)}{v_n} \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{o(v_n)}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

□

Exemple 9. $e^n + n^2 \underset{+\infty}{\sim} e^n$, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n + n^2}{e^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n^2}{e^n}\right) = 1$.

Propriété 1.7 : Équivalence et opérations

On considère deux suites (u_n) et (v_n) et on suppose que

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$$

(i) (Symétrie) On a $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$.

(ii) (Transitivité) Si de plus $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$.

(iii) (Produit) Si de plus $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, alors $u_n a_n \underset{+\infty}{\sim} v_n b_n$.

(iv) (Multiplication par une suite) Si (w_n) est une suite réelle, alors $u_n w_n \underset{+\infty}{\sim} v_n w_n$.

(v) (Puissance) Si $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a : $u_n^\alpha \underset{+\infty}{\sim} v_n^\alpha$.

Démonstration. À démontrer en exercice.

□

Exemple 10. Donner un équivalent de $(e^n + n^2)^3$.

Solution.

Remarque 1.8 : Opérations interdites sur les équivalents

On retiendra les trois interdits sur les équivalents :

- Une suite ne peut pas être équivalente à zéro.
- On ne peut pas sommer dans les équivalents.
- On ne peut pas composer dans les équivalents.

Exemple 11. $n^2 + n \underset{+\infty}{\sim} n^2$ et $-n^2 + n \underset{+\infty}{\sim} -n^2$, mais $(n^2 + n) + (-n^2 + n) = 2n$ n'est pas équivalent à 0.

Exemple 12. $n + 1 \underset{+\infty}{\sim} n$, en composant par $x \mapsto e^x$, e^{n+1} n'est pas équivalent à e^n car

$$\frac{e^{n+1}}{e^n} = e \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e \neq 1.$$

Propriété 1.9 : Equivalence et négligeabilité

On considère deux suites (u_n) et (v_n) et on suppose que

$$u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n).$$

- (i) On a alors $v_n + u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
- (ii) Si de plus $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$, alors $u_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$.
- (iii) Si de plus $u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$, alors $w_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$.

Exemple 13. $n + 1 \underset{+\infty}{\sim} n$ et $n \underset{+\infty}{=} o(n^2)$ donc $n + 1 \underset{+\infty}{=} o(n^2)$.

Proposition 1.10 : Limite et équivalence

On considère deux suites (u_n) et (v_n) .

- (i) Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et si $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$.
- (ii) Soit l un réel non nul.

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \Leftrightarrow u_n \underset{+\infty}{\sim} l.$$

1.3 Comparaison de suites usuelles**Proposition 1.11 : Equivalents et polynômes**

Soit $P(n) = \sum_{k=0}^p a_k n^k = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_1 n + a_0$ avec $a_p \neq 0$. Alors

$$P(n) \underset{+\infty}{\sim} a_p n^p.$$

Exemple 14. On a $(2n + 3)^4 \underset{+\infty}{\sim} 16n^4$.

On peut réécrire les limites de type "croissance comparée" en terme de négligeabilité.

Proposition 1.12 : *Croissances comparées*

Soient a et b deux réels strictement positifs et $q > 1$. On a les propositions suivantes :

- (i) $(\ln(n))^b \underset{+\infty}{=} o(n^a)$.
- (ii) $n^a \underset{+\infty}{=} o(e^{bn})$. Plus généralement, $n^a \underset{+\infty}{=} o(q^n)$.
- (iii) $q^n \underset{+\infty}{=} o(n!)$.
- (iv) Si $a < b$, alors $n^a \underset{+\infty}{=} o(n^b)$ et $\frac{1}{n^b} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^a}\right)$.

Proposition 1.13 : *Equivalents usuels*

Soit une suite (u_n) telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. On a les équivalents suivants pour $\alpha \neq 0$:

$$\begin{aligned} \ln(1 + u_n) &\underset{+\infty}{\sim} u_n & e^{u_n} - 1 &\underset{+\infty}{\sim} u_n & (1 + u_n)^\alpha - 1 &\underset{+\infty}{\sim} \alpha u_n \\ \sin(u_n) &\underset{+\infty}{\sim} u_n & \tan(u_n) &\underset{+\infty}{\sim} u_n & 1 - \cos(u_n) &\underset{+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2} \end{aligned}$$

Démonstration. On reprend la proposition sur les limites usuelles venant de taux d'accroissement du chapitre Généralités sur les fonctions réelles. □

Exemple 15. Donner un équivalent de $\ln\left(2 - e^{-\frac{1}{n^2}}\right)$.

Solution.

Méthode 1.14 : *Comment trouver un équivalent directement ?*

Il est souvent très intéressant de factoriser par le facteur prépondérant puis éventuellement simplifier (en cas de fraction).

Exemple 16. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n - (\ln n)^2$. Donner un équivalent de u_n .

Solution.

Méthode 1.15 : *Comment étudier la nature d'une suite à l'aide d'équivalents ?*

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et si la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a la même limite.

Exemple 17. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Calculer la limite de $\frac{\binom{n}{k}}{n^k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution.

2 Comparaison des fonctions au voisinage d'un point

Dans cette section, a désigne un réel, ou $-\infty$, ou $+\infty$.

2.1 Rappels sur les voisinages

Définition 2.1 : Voisinage d'un point

Si $a \in \mathbb{R}$, on appelle **voisinage** de a tout intervalle du type

$$V_a =]a - h, a + h[\text{ avec } h > 0.$$

On appelle **voisinage à gauche** de a tout intervalle du type $]a - h, a[$ avec $h > 0$.

On appelle **voisinage à droite** de a tout intervalle du type $]a, a + h[$ avec $h > 0$.

Définition 2.2 : Propriété locale au voisinage d'un point

Une proposition $\mathcal{P}(x)$, dépendant de x , est dite vraie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ si

$$\exists h > 0, \quad \forall x \in]a - h, a + h[, \quad \mathcal{P}(x) \text{ est vraie.}$$

Définition 2.3 : Voisinage de l'infini

On appelle **voisinage de** $+\infty$ tout intervalle du type

$$V =]A, +\infty[\text{ avec } A \in \mathbb{R}_+.$$

On appelle **voisinage de** $-\infty$ tout intervalle du type

$$V =]-\infty, A[\text{ avec } A \in \mathbb{R}_-.$$

Définition 2.4 : Propriété locale au voisinage de l'infini

- Une proposition $\mathcal{P}(x)$, dépendant de x , est dite vraie au voisinage de $+\infty$ si

$$\exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x > A, \quad \mathcal{P}(x) \text{ est vraie.}$$

- Une proposition $\mathcal{P}(x)$, dépendant de x , est dite vraie au voisinage de $-\infty$ si

$$\exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x < A, \quad \mathcal{P}(x) \text{ est vraie.}$$

2.2 Relation de négligeabilité

Définition 2.5 : Fonction négligeable devant une autre fonction

Soient deux fonctions f et g définies au voisinage de a . On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a s'il existe une fonction ϵ définie au voisinage de a qui vérifie au voisinage de a

$$f(x) = \epsilon(x)g(x) \quad \text{et} \quad \epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

On note : $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$.

On lit $f(x)$ est un "petit o " de $g(x)$ lorsque x est au voisinage de a .

Exemple 18. Vérifier que $x^2 \underset{0}{=} o(x)$.

Solution.

Exemple 19. Soit $a \in \mathbb{R}$. Une fonction f qui vérifie $f(x) \underset{a}{=} o(1)$ signifie que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

Comme pour les suites, la notation de Landau ("petit o ") repose sur un abus d'écriture : $o(g)$ ne désigne pas une fonction particulière au voisinage de a , mais toute fonction possédant la propriété d'être négligeable devant g au voisinage de a . Si $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$ et $h(x) \underset{a}{=} o(g(x))$, on n'a pas nécessairement $f(x) = h(x)$ au voisinage de a .

Théorème 2.6 : Caractérisation de la négligeabilité

Si g ne s'annule pas au voisinage de a sauf éventuellement en a (ou g ne s'annule pas dans un voisinage épointé de a), alors

$$f(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Démonstration. Puisque g ne s'annule pas au voisinage de a , on peut écrire :

$$f(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \epsilon \text{ tel que } f(x) = \epsilon(x)g(x) \text{ au voisinage de } a \text{ et } \epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}]{} 0$$

□

Exemple 20. Vérifier que $e^x + x \underset{+\infty}{=} o(e^{2x})$.

Solution.

Exemple 21. Vérifier que $x^3 + x^2 \underset{0}{=} o(x)$.

Solution.

Propriété 2.7 : Négligeabilité et opérations

On considère deux fonctions f et g définies au voisinage de a et on suppose que

$$f(x) \underset{a}{=} o(g(x)).$$

- (i) (Transitivité) Si de plus $g(x) \underset{a}{=} o(h(x))$, alors $f(x) \underset{a}{=} o(h(x))$.
- (ii) (Produit) Si de plus $\varphi(x) \underset{a}{=} o(\psi(x))$, alors $f(x)\varphi(x) \underset{a}{=} o(g(x)\psi(x))$.
- (iii) (Combinaison linéaire) Si de plus $\varphi(x) \underset{a}{=} o(g(x))$, alors $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f(x) + \mu \varphi(x) \underset{a}{=} o(g(x))$.
- (iv) (Multiplication par une fonction) Si h est une fonction définie au voisinage de a , alors

$$f(x)h(x) \underset{a}{=} o(g(x)h(x)).$$

- (v) (Multiplication par un réel non nul) Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $\lambda f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$.
- (vi) (Inverse) Si f et g ne s'annulent pas au voisinage de a sauf éventuellement en a , alors

$$\frac{1}{g(x)} \underset{a}{=} o\left(\frac{1}{f(x)}\right).$$

Exemple 22. On observe que d'après le point (iii), on a

$$o(x^2) - o(x^2) \underset{0}{=} o(x^2).$$

2.3 Relation d'équivalence**Définition 2.8 : Fonctions équivalentes**

Soient deux fonctions f et g définies au voisinage de a . On dit que f et g sont **équivalentes** au voisinage de a s'il existe une fonction α définie au voisinage de a qui vérifie au voisinage de a

$$f(x) = \alpha(x)g(x) \quad \text{et} \quad \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1.$$

On note : $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$.

On lit $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ lorsque x est au voisinage de a .

Exemple 23. $x + x^2 \underset{0}{\sim} x$ avec $\alpha(x) = 1 + x$.

Théorème 2.9 : Caractérisation de l'équivalence

Soient deux fonctions f et g définies au voisinage de a . On a :

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \underset{a}{=} g(x) + o(g(x)).$$

Si g ne s'annule pas au voisinage de a sauf éventuellement en a , alors

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemple 24. $\frac{x^2 + 1}{x^5} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$, car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 + 1}{x^5}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + x^3}{x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$.

Exemple 25. $x^2 - 5x + 6 \underset{3}{\sim} x - 3$, car $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x \neq 3}} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x \neq 3}} \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x \neq 3}} (x - 2) = 1$.

Propriété 2.10 : Équivalence et opérations

On considère deux fonctions f et g définies au voisinage de a , on suppose que

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$$

- (i) (Symétrie) On a $g(x) \underset{a}{\sim} f(x)$.
- (ii) (Transitivité) Si de plus $g(x) \underset{a}{\sim} h(x)$, alors $f(x) \underset{a}{\sim} h(x)$.
- (iii) (Produit) Si de plus $\varphi(x) \underset{a}{\sim} \psi(x)$, alors $f(x)\varphi(x) \underset{a}{\sim} g(x)\psi(x)$.
- (iv) (Multiplication par une fonction) Si h est une fonction définie au voisinage de a , alors

$$f(x)h(x) \underset{a}{\sim} g(x)h(x).$$

- (v) (Puissance) Si f et g ne s'annulent pas au voisinage de a sauf éventuellement en a , alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a : $f(x)^\alpha \underset{a}{\sim} g(x)^\alpha$.

Remarque 2.11 : Opérations interdites sur les équivalents

On retiendra les trois interdits sur les équivalents :

- Une fonction ne peut pas être équivalente à zéro.
- On ne peut pas sommer dans les équivalents.
- On ne peut pas composer dans les équivalents.

Exemple 26. $x^2 + 1 \underset{+\infty}{\sim} x^2$, cependant $(x^2 + 1) + (-x^2) = 1$ n'est pas équivalent à 0.

Exemple 27. $\frac{1}{x} \underset{0}{\sim} 1 + \frac{1}{x}$, cependant $e^{\frac{1}{x}}$ et $e^{1+\frac{1}{x}}$ ne sont pas équivalents au voisinage de 0, en effet

$$\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{1+\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x} - 1 - \frac{1}{x}} = e^{-1} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}]{} e^{-1} \neq 1.$$

Propriété 2.12 : Équivalence et négligeabilité

On considère deux fonctions f et g définies au voisinage de a , on suppose que

$$f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$$

- (i) On a alors $g(x) + f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$.
- (ii) Si de plus $g(x) \underset{a}{\sim} h(x)$, alors $f(x) \underset{a}{=} o(h(x))$.
- (iii) Si de plus $f(x) \underset{a}{\sim} h(x)$, alors $h(x) \underset{a}{=} o(g(x))$.

Proposition 2.13 : Limite et équivalence

Soient deux fonctions f et g définies au voisinage de a . Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ et si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$, alors

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l.$$

2.4 Comparaison de fonctions usuelles**Proposition 2.14 : Equivalents et polynômes**

- Un polynôme non nul est équivalent au voisinage de 0 à son monôme de plus bas degré.
- Un polynôme non nul est équivalent au voisinage de $\pm\infty$ à son monôme de plus haut degré.

Exemple 28. On a : $x^3 - 2x^2 + 5x \underset{-\infty}{\sim} x^3$ et $x^3 - 2x^2 + 5x \underset{0}{\sim} 5x$.

2.4.1 Comparaison au voisinage de l'infini**Proposition 2.15 : Croissances comparées au voisinage de $+\infty$**

Soient a et b deux réels strictement positifs. On a les propositions suivantes :

- (i) $(\ln(x))^b \underset{+\infty}{=} o(x^a)$.
- (ii) $x^a \underset{+\infty}{=} o(e^{bx})$.
- (iii) Si $a < b$, alors $x^a \underset{+\infty}{=} o(x^b)$.

Exemple 29. On a : $x^3 \underset{+\infty}{=} o(x^5)$ et $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(\sqrt{x})$.

2.4.2 Comparaison au voisinage de zéro

Les notions suivantes seront très importantes pour le chapitre Formules de Taylor et développements limités.

Proposition 2.16 : Croissances comparées au voisinage de 0

Soient a et b deux réels strictement positifs. On a les propositions suivantes :

- (i) $(\ln(x))^b \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x^a}\right)$.
- (ii) Si $a < b$, alors $x^b \underset{0}{=} o(x^a)$.

Exemple 30. On a : $x^5 \underset{0}{=} o(x^3)$ et $\ln(x) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Exemple 31. Pour a et b deux réels strictement positifs, avec la propriété 2.7, on a

$$x^b o(x^a) \underset{0}{=} o(x^{a+b})$$

Proposition 2.17 : *Équivalents usuels au voisinage de 0*

On a les équivalents suivants pour $\alpha \neq 0$:

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \quad e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$$

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x \quad \tan(x) \underset{0}{\sim} x \quad 1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

Méthode 2.18 : *Comment calculer une limite à l'aide d'équivalents ?*

Si deux fonctions sont équivalentes au voisinage de a , alors elles ont le même comportement au voisinage de a .

Exemple 32. Calculer la limite de $\sqrt{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution.