Probabilités

Table des matières

I – Vocabulaire de la théorie des probabilités

On appelle *expérience aléatoire* tout processus dont le résultat est déterminé par le hasard. On ne connaît pas à l'avance le résultat (ou l'*issue*) de celle-ci et il peut varier si on répète l'expérience (comme le lancer d'une pièce de monnaie par exemple).

1) Univers d'une expérience aléatoire

Définition (univers) Soit $\mathscr{E}$ une expérience aléatoire. L'ensemble des issues possibles de $\mathscr{E}$ est appelé l'*univers* associé à $\mathscr{E}$. On le note Ω.

Remarque : en MPSI, on considère uniquement des expériences aléatoires dont l'univers Ω est un ensemble *fini*.

Exemple
- ⋆ On jette à dé à 6 faces. L'univers est $\Omega = [\![1, 6]\!]$.
- ⋆ On lance deux dés à 6 faces. On peut ici considérer que $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$.
- ⋆ On lance une pièce de monnaie. Alors $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$.
- ⋆ On prélève deux cartes simultanément dans un jeu de 32 cartes. Ici, Ω est l'ensemble des 2-combinaisons de l'ensemble des 32 cartes. En particulier, $|\Omega| = \binom{32}{2}$.

2) Événements

On considère ici un univers Ω (fini) associé à une expérience aléatoire.

Définition (événement) Les éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$ (*i.e.* les parties de Ω) sont appelés les *événements* associés à l'expérience aléatoire.

Exemple Pour le lancer de deux dés, l'événement A : « obtenir au moins un as » est :

$$A = \big(\{1\} \times [\![1,6]\!]\big) \cup \big([\![1,6]\!] \times \{1\}\big) = \Omega \setminus [\![2,6]\!]^2$$

Certaines opérations ensemblistes, comme le complémentaire par exemple, ont des dénominations propres en probabilités. On trouve dans le tableau ci-dessous le vocabulaire probabiliste. Dans celui-ci, A et B sont des sous-ensembles de Ω et a est un élément de A.

	Description ensembliste	**Description probabiliste**
Ω		univers/événement certain
$\varnothing$	ensemble vide	événement impossible
$\{a\}$	singleton	événement élémentaire
$A \in \mathscr{P}(\Omega)$	sous-ensemble de Ω	événement
$\overline{A}$	complémentaire de A	événement contraire de A
$A \cup B$	réunion de A et B	A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B
$A \cap B = \varnothing$	A et B sont des parties disjointes	A et B sont des événements incompatibles
$A \subset B$	A est inclus dans B	A implique B
$a \in A$	a appartient à A	a réalise A

Exemple Pour le lancer de dé, considérons les événements :

- ⋆ A : « obtenir un as », *i.e.* $A = \{1\}$;
- ⋆ B : « obtenir un nombre pair », *i.e.* $B = \{2, 4, 6\}$;
- ⋆ C : « obtenir un nombre premier », *i.e.* $C = \{2, 3, 5\}$.

Les événements A et B sont incompatibles, B et C ne le sont pas, et 2 réalise l'événement C.

Définition (système complet d'événements) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$. On dit que $(A_1, \ldots, A_n)$ est un *système complet d'événements* si :

- ⋆ les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, *i.e.* :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \qquad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$$

- ⋆ $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$

Autrement dit, $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements si :

$$\Omega = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$$

Exemple Posons $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$ (où $x_1, \ldots, x_n$ sont deux à deux distincts).

- ⋆ La famille $\big(\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}\big)$ est un système complet d'événements.
- ⋆ Pour tout événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, la famille $\big(A, \overline{A}\big)$ est un système complet d'événements.

II – Probabilités sur un univers fini

On considère une expérience aléatoire d'univers (fini) associé Ω. Afin de *mesurer le poids* des événements, on définit une fonction sur l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ qui à tout événement associe un nombre réel compris entre 0 et 1.

1) Définition

Définition (probabilité) On appelle *probabilité sur* Ω toute application $P : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- ⋆ $P(\Omega) = 1$;
- ⋆ pour tous $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a :

$$A \cap B = \varnothing \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Le couple (Ω, P) est alors appelé *espace probabilisé* (fini).

Exemple Dans le cas d'un lancer de dé équilibré à 6 faces, on peut définir une probabilité (dite *uniforme*) sur $[\![1, 6]\!]$, en posant :

$$\forall A \in \mathscr{P}([\![1, 6]\!]), \qquad P(A) = \frac{|A|}{6}$$

Conséquences de la définition :

- ⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et pour toute famille $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$ d'événements deux à deux incompatibles, on a :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Démonstration On raisonne par récurrence sur le nombre d'événements. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on considère la proposition $\mathscr{P}(n)$: « Pour toute famille $(A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$ d'événements deux à deux incompatibles, $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} A_i$ ».

- Si $n = 2$, la propriété $\mathscr{P}(2)$ est vraie car P est une probabilité.
- Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ tel que la propriété $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Montrons que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Soit $(A_1, \dots, A_n, A_{n+1}) \in \mathscr{P}(\Omega)^{n+1}$ une famille d'événements deux à deux incompatibles. Alors $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et A_{n+1} sont deux événements incompatibles. En effet, par distributivité de l'intersection par rapport à l'union, on a :
$$A \cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{(A \cap A_{n+1})}_{=\varnothing} = \varnothing$$
Comme P est une probabilité, il vient :
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P(A \cup A_{n+1}) = P(A) + P(A_{n+1})$$
On utilise maintenant l'hypothèse de récurrence en appliquant la propriété $\mathscr{P}(n)$ à la famille d'événements deux à deux incompatibles $(A_1, \dots, A_n)$:
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_{n+1})$$
Finalement, la proposition $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. ∎

★ Une probabilité est caractérisée par la famille des probabilités des événements élémentaires $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$.

Démonstration Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a :
$$P(A) = P\left(\bigsqcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}),$$
d'où le résultat. ∎

On dit que $\big(P(\{\omega\})\big)_{\omega \in \Omega}$ est une distribution de probabilités sur Ω.

Définition (distribution de probabilités) Soit I un ensemble fini non vide. On appelle *distribution de probabilités* sur I toute famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ de réels positifs telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ (somme finie).

✎✎✎ **Exercice** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $\lambda_k = \lambda 2^k$. Déterminer λ pour que la famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ soit une densité de probabilité sur $[\![1, n]\!]$.

2) Probabilité uniforme

Proposition/définition Soit Ω un ensemble fini. Il existe une unique probabilité P sur Ω telle que les événements élémentaires soient équiprobables, *i.e.* telle que :

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \qquad P(\{\omega\}) = P(\{\omega'\})$$

Plus précisément :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \qquad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Cette probabilité P est appelée *probabilité uniforme sur* Ω.

Démonstration On procède par analyse-synthèse.

- ⋆ **Analyse :** supposons que P soit une probabilité vérifiant la condition et fixons ω_0 dans Ω. Alors (le calcul est licite puisque l'univers Ω est fini) :

$$1 = P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega_0\}) = |\Omega| P(\{\omega_0\})$$

  et donc :

$$P(\{\omega_0\}) = \frac{1}{|\Omega|}$$

  Pour tout $A \in \mathscr{P}(A)$, on a donc :

$$P(A) = P\left(\bigsqcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

  La probabilité P est donc uniquement déterminée.

- ⋆ **Synthèse :** considérons l'application P définie par :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \qquad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

  On vérifie facilement que P est une probabilité sur Ω. De plus, P vérifie bien la condition d'équiprobabilité.
  ■

Exemple On tire au hasard 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. La probabilité d'obtenir exactement 3 trèfles parmi ces 5 cartes est égale à $\dfrac{\binom{8}{3}\binom{24}{2}}{\binom{32}{5}}$.

Démonstration ⋆ L'univers est l'ensemble des 5-combinaisons de l'ensemble des 32 cartes. En particulier, $|\Omega| = \binom{32}{5}$. Comme les cartes sont toutes différentes, la probabilité P sur Ω est la probabilité uniforme.

- ⋆ Notons A l'événement : « Sur les 5 cartes, le joueur a tiré exactement trois trèfles ». Déterminons le cardinal de A. Il y a 8 trèfles dans le jeu, on a donc $\binom{8}{3}$ possibilités pour choisir trois cartes de trèfle puis il reste à choisir 2 cartes parmi les cartes qui ne sont pas des trèfles, ce qui fait $\binom{24}{2}$ possibilités. Donc $|A| = \binom{8}{3}\binom{24}{2}$.

On en déduit que $P(A) = \dfrac{\binom{8}{3}\binom{24}{2}}{\binom{32}{5}}$. ■

3) Propriétés générales

Proposition Soient (Ω, P) un espace probabilisé (fini) et $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$. Alors :

- ⋆ $P(A) \in [0,1]$ et $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
- ⋆ $P(\varnothing) = 0$;
- ⋆ $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$ et si $B \subset A$, alors $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$;
- ⋆ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- ⋆ $A \subset B \implies P(A) \leqslant P(B)$ (*croissance d'une probabilité*) ;
- ⋆ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

Démonstration ⋆ On a :

$$1 = P(\Omega) = P(A \sqcup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

donc $P(\overline{A}) = 1 - P(A) \leqslant 1$ car $P(A) \geqslant 0$. Ceci démontre le premier point.

⋆ D'après le point précédent :

$$P(\varnothing) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 0$$

⋆ On a $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$. Ainsi :

$$P(A) = P\big((A \cap B) \sqcup (A \setminus B)\big) = P(A \cap B) + P(A \setminus B),$$

d'où le deuxième point.

⋆ On a l'égalité $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$ donc :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A) \\ &= (P(A) - P(A \cap B)) + P(A \cap B) + (P(B) - P(A \cap B)) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

⋆ Si $A \subset B$, alors :

$$0 \leqslant P(B \setminus A) = P(B) - P(A),$$

d'où l'on déduit l'inégalité annoncée.

⋆ On démontre l'inégalité par récurrence sur le nombre d'événements mis en jeu. Il n'y a rien à démontrer si $n = 1$ (l'inégalité est une égalité). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que l'inégalité soit vraie pour n événements. Soient $A_1, \dots, A_n, A_{n+1} \in \mathscr{P}(\Omega)$ et posons $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Alors :

$$\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k = A \cup A_{n+1} \qquad \text{donc} \qquad \begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= P(A) + P(A_{n+1}) - \underbrace{P(A \cap A_{n+1})}_{\geqslant 0} \\ &\leqslant P(A) + P(A_{n+1}) \\ &= P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) + P(A_{n+1}) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + P(A_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence. ■

✎✎✎ **Exercice** Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ un espace probabilisé et $A, B, C \in \mathscr{P}(\Omega)$. Montrer que :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

III – Probabilités conditionnelles

Dans tout ce paragraphe, (Ω, P) désigne un espace probabilisé (fini).

1) Définition

Définition (probabilité conditionnelle) Soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ tels que $P(A) > 0$. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, notée $P_A(B)$ ou $P(B \mid A)$, le nombre :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarque : sachant que l'événement A est réalisé, on calcule la probabilité que B se réalise.

Théorème Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(A) > 0$. Alors l'application :

$$P_A : \begin{cases} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ B & \longmapsto & P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{cases}$$

est une probabilité sur Ω, appelée probabilité relative à l'événement A.

Démonstration Tout d'abord, l'application P_A est bien définie car $P(A) \neq 0$ et on a bien $P_A(B) \geqslant 0$ pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$. Il reste à vérifier les deux axiomes d'une probabilité.

- On a :
$$P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$
- Soient $B, C \in \mathscr{P}(\Omega)$ tels que $B \cap C = \varnothing$. On veut montrer que $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)$. Par définition :
$$P_A(B \cup C) = \frac{P\big((B \cup C) \cap A\big)}{P(A)} = \frac{P\big((B \cap A) \cup (C \cap A)\big)}{P(A)}$$
par distributivité de l'intersection par rapport à l'union. Or $B \cap A$ et $C \cap A$ sont deux événements incompatibles car :
$$(B \cap A) \cap (C \cap A) = B \cap A \cap C \cap A = (B \cap C) \cap A = \varnothing \cap A = \varnothing$$
par associativité et commutativité de l'intersection. Ainsi (P étant une probabilité) :
$$P\big((B \cap A) \cup (C \cap A)\big) = P(B \cap A) + P(C \cap A)$$
Finalement,
$$P_A(B \cup C) = \frac{P(B \cap A) + P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} + \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = P_A(B) + P_A(C)$$

L'application P_A est donc une probabilité sur Ω. ■

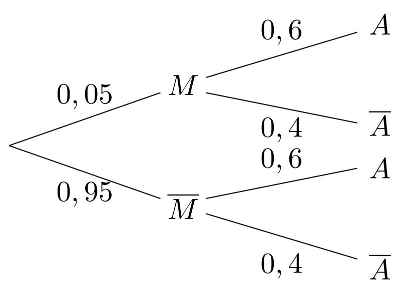
2) Formule des probabilités composées

Une relecture de la définition précédente consiste à dire que si A et$B$ sont deux événements tels que $P(A) > 0$, alors :

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) \qquad \text{(formule des probabilités composées)}$$

Dans une situation de probabilité conditionnelle, on représente souvent l'expérience à l'aide d'un arbre pondéré de probabilité.

Exemple On note Ω l'ensemble des habitants d'une ville. Dans cette ville, la probabilité qu'un habitant soit malade (événement M) est égale à $0,05$. Quand une personne est malade, la probabilité que son médecin lui prescrive un antibiotique (événement A) est de $0,6$.



Par exemple, la probabilité qu'une personne soit malade et se soit fait prescrire un antibiotique est égale à :

$$P\big(M \cap \overline{A}\big) = P(M) \times P_M(A) = 0,05 \times 0,6 = 0,03$$

✎✎✎ **Exercice** Soient r et v deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On considère une urne contenant r boules rouges et v boules vertes. On effectue dans cette urne deux tirages sans remise. Quelle est la probabilité de tirer deux boules vertes ?

Une solution.
Posons $N = r + v$ (nombre de boules initialement dans l'urne). Pour tout $i \in \{1, 2\}$, considérons l'événement V_i : « la boule tirée au i^{e} tirage est verte ». Par équiprobabilité, il est clair que :

$$P(V_1) = \frac{v}{N} > 0 \qquad \text{et} \qquad P_{V_1}(V_2) = \frac{v-1}{N-1}$$

donc (d'après la formule des probabilités composées) :

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1)P_{V_1}(V_2) = \frac{v(v-1)}{N(N-1)}$$

La formule des probabilités composées se généralise à une intersection finie d'événements.

Théorème Soient (Ω, P) un espace probabilisé (fini), n un entier supérieur ou égal à 2 et $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ des événements telle que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Alors :

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Démonstration ⋆ Pour $n = 2$, c'est la formule des probabilités composées.

- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On suppose que la propriété est vraie pour n événements et on considère $n+1$ événements $A_1, \dots, A_n, A_{n+1} \in \mathscr{P}(\Omega)$ tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n) > 0$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a :
$$A_1 \cap \dots \cap A_n \subset A_1 \cap \dots \cap A_j \qquad \text{donc} \qquad 0 < P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \leqslant P(A_1 \cap \dots A_j)$$
par croissance d'une probabilité, ce qui assure l'existence de la probabilité conditionnelle $P_{A_1 \cap \dots \cap A_j}(A_{j+1})$. Démontrons maintenant la formule. On commence par appliquer la formule des probabilités composées aux deux événements $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ et A_{n+1} :
$$P(A \cap A_{n+1}) = P_A(A_{n+1})P(A)$$
En appliquant maintenant l'hypothèse de récurrence avec les événements $A_1, \dots, A_n$ (on a montré précédemment que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$), on a :
$$P(A) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$
On en déduit donc que :
$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}) &= P(A \cap A_{n+1}) \\ &= P_{A_1 \cap \dots \cap A_n}(A_{n+1}) \times P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) \end{aligned}$$

Le théorème est donc démontré par principe de récurrence simple. ■

Exemple Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard, successivement et sans remise quatre boules dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches puis deux boules noires dans cet ordre ?

Une solution.
Pour $i \in \{1,2\}$, on note B_i l'événement : « La i^{e} boule tirée est blanche » et pour $j \in \{3,4\}$, on note N_j l'événement : « La j^{e} boule tirée est noire ». La probabilité cherchée est $P(B_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap N_4)$. La probabilité de l'événement $B_1 \cap B_2 \cap N_3$ est non nulle donc, d'après la formule des probabilités composées généralisée, on a
$$P(B_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap N_4) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(N_3)P_{B_1 \cap B_2 \cap N_3}(N_4)$$
Il reste ensuite à calculer chacune des quatre probabilités qui apparaît dans la formule précédente.

- ⋆ Au début, il y a 4 boules blanches sur 7 boules au total donc $P(B_1) = \frac{4}{7}$.
- ⋆ Une fois qu'une boule blanche a été tirée, il en reste 3 sur 6 boules au total. Donc $P_{B_1}(B_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
- ⋆ Ensuite, il reste 2 boules blanches et les 3 boules noires. La probabilité de tirer une boule noire est donc $P_{B_1 \cap B_2}(N_3) = \frac{3}{5}$.
- ⋆ Enfin, il reste 2 boules noires sur 4 au total donc $P_{B_1 \cap B_2 \cap N_3}(N_4) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Finalement, $P(B_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap N_4) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{35}$.

3) Formule des probabilités totales

Proposition (formule des probabilités totales) Soit (Ω, P) un espace probabilisé (fini), $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $(A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$ un système complet d'événements. Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a :
$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap B)$$
et, si $A_1, \dots, A_n$ sont de probabilités non nulles, alors :
$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P_{A_k}(B)$$

Démonstration Soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$. Comme $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements, on a

$$\Omega = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \qquad \text{et donc} \qquad \Omega \cap B = B = \bigsqcup_{k=1}^{n} (A_k \cap B)$$

On en déduit que :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B)$$

si $A_1, \dots, A_n$ sont de probabilités non nulles. ■

✎✎✎ **Exercice** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne numérotée k contient n boules dont exactement k boules blanches. On choisit une urne au hasard puis on prélève une boule dans l'urne choisie.

1. Quelle est la probabilité que la boule choisie soit blanche ?
2. On a prélevé une boule blanche. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne numérotée k (où $k \in [\![1, n]\!]$ est fixé) ?

4) Formule de Bayes

La formule de Bayes permet de faire le lien entre deux probabilités conditionnelles.

Proposition Soient (Ω, P) un espace probabilisé (fini).

⋆ Soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$. Alors :

$$P_A(B) = \frac{P_B(A) P(B)}{P(A)}$$

⋆ Soient $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$ et $(A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad P_B(A_i) = \frac{P(A_i) P_{A_i}(B)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B)}$$

Démonstration ⋆ Soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$. Alors :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P_B(A) P(B)}{P(A)}$$

⋆ Soient $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ et $i \in [\![1, n]\!]$. D'après la formule précédente, on a :

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) P_{A_i}(B)}{P(B)}$$

Il reste ensuite à calculer $P(B)$ en utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(A_1, \dots, A_n)$. ■

Exemple Un étudiant répond à un QCM comprenant 5 choix de réponses possibles dont une seule réponse est exacte. Soit l'étudiant connaît la réponse, soit il répond au hasard. On estime que la probabilité que l'étudiant connaisse la réponse est de $0,7$. Sachant que l'étudiant a répondu correctement, quelle est la probabilité qu'il ait répondu en connaissant la réponse ?

IV – Indépendance

Soit (Ω, P) un espace probabilisé (fini).

1) Définition

Définition (événements indépendants) Soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$. On dit que A et B sont *indépendants*, ce que l'on note $A \perp\!\!\!\perp B$, si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Remarque. Il ne faut pas confondre la notion d'indépendance avec la notion d'événements incompatibles.

Exemple Les résultats de tirages dans une urne avec remise, ou de lancers de dés, sont indépendants.

Proposition Soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ tels que $P(A) > 0$. Alors A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Démonstration Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, d'où la propriété en divisant par $P(A) \neq 0$. ■

Remarque : si A et B sont indépendants, alors probabilité que B se réalise n'a pas de lien avec la réalisation de l'événement A.

✎✎✎ **Exercice** On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. On note D l'événement « La carte tirée est une dame », C l'événement « La carte tirée est un cœur » et F l'événement « La carte tirée est une figure ».

1. Les événements D et C sont-ils indépendants ?
2. Les événements D et F sont-ils indépendants ?

On peut généraliser la définition précédente à un nombre fini d'événements.

Définition Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$. On dit que $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux indépendants si :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i \neq j \implies P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

2) Événements mutuellement indépendants

Définition Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$. On dit que $A_1, \ldots, A_n$ sont *mutuellement indépendants* si

$$\forall J \in \mathscr{P}([\![1, n]\!]) \setminus \{\varnothing\}, \qquad P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

Exemple Dire que trois événements $A_1, A_2, A_3 \in \mathscr{P}(\Omega)$ sont mutuellement indépendants signifie que :

- ⋆ $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$;
- ⋆ $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$;
- ⋆ $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$;
- ⋆ $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.

Remarque : l'indépendance mutuelle entraîne que les événements sont deux à deux indépendants mais la réciproque est fausse.

Exemple Considérons l'ensemble $\Omega = [\![1, 4]\!]$ muni de la probabilité uniforme. On vérifie facilement que les événements $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ et $C = \{1, 4\}$ sont deux à deux indépendants mais que :

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C),$$

donc que les événements A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Proposition

- ⋆ Soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$. On suppose que A et B sont indépendants. Alors $\overline{A}$ et B sont indépendants. De même, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.
- ⋆ Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ des événements mutuellement indépendants. Toute famille :

$$(B_1, \ldots, B_n) \in \{A_1, \overline{A_1}\} \times \cdots \times \{A_n, \overline{A_n}\}$$

est constituée d'événements mutuellement indépendants.

Démonstration

- ⋆ Montrons que $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A})P(B)$. Comme $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B) = P(\overline{A} \cap B) + P(A)P(B),$$

d'où le résultat.

- ⋆ Admis (il s'agit de raisonner par récurrence sur le nombre d'événements de la famille). ∎